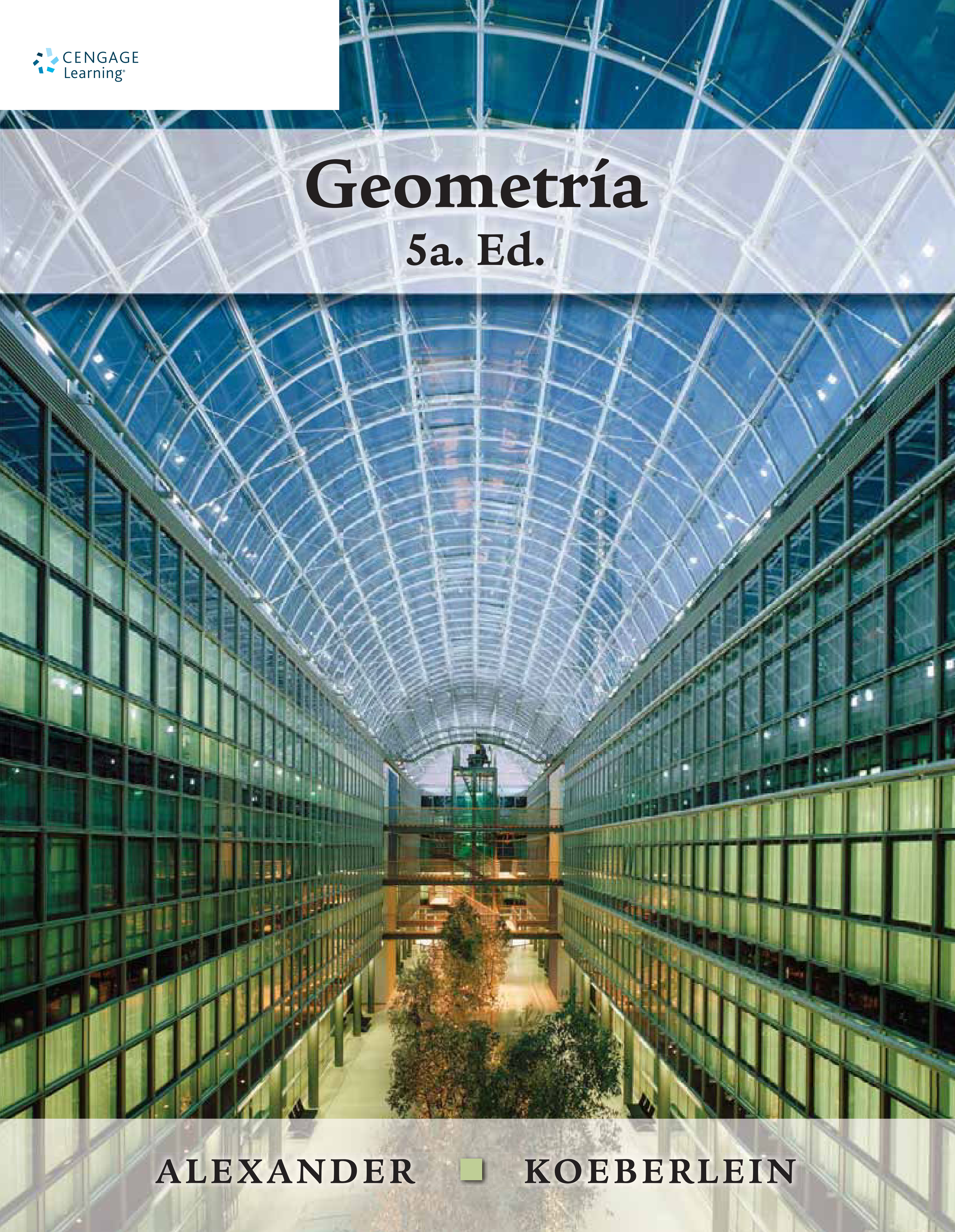
CENGAGE Learning

Geometría

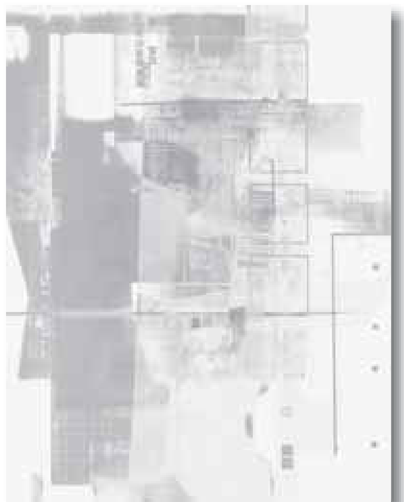
5a. Ed.



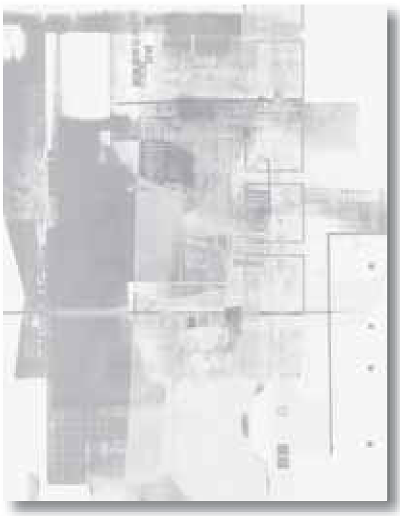
ALEXANDER ■ KOEBERLEIN

Geometría

5a. Ed.



Geometría
5a. Ed.



Daniel C. Alexander
Parkland College

Geralyn M. Koeberlein
Mahomet-Seymour High School

Traducción
Mtro. Javier León Cárdenas
Facultad de Ingeniería
Universidad La Salle

Revisión técnica
Dra. Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional

CENGAGE Learning®

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning®

Geometría, 5a. Ed.
Daniel C. Alexander y
Geralyn M. Koeberlein

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Gerente de Procesos para Latinoamérica:
Claudia Islas Licona

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial de Contenidos en Español:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editores:
Abril Vega Orozco
Timoteo Eliosa García

Diseño de portada:
Terri Wrigth

Imagen de portada:
© Fancy Photography/Veer

Composición tipográfica:
Ediciones OVA

Traducido del libro *Elementary Geometry for College Students,* Fifth Edition.
Daniel C. Alexander and Geralyn M. Koeberlein.
Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía de Cengage Learning © 2011
ISBN: 978-14390-4790-3

Datos para catalogación bibliográfica:
Alexander Daniel C. y Geralyn M. Koeberlein.
Geometría, 5a. Ed.
ISBN: 978-607-481-889-5

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 16 15 14 13

Dedicamos esta edición a nuestras esposas, hijos y nietos.
Dan Alexander y Geralyn Koeberlein

CARTA DEL AUTOR

Después de muchos años de enseñar matemáticas, en particular geometría, encontré que a los libros sobre este tema les faltaba incluir “qué se conoce, por qué la conclusión se debe deducir a partir de esta información y cómo lograr esto”. Conforme enseñaba geometría reuní gran cantidad de notas que utilicé para complementar el libro con análisis y explicaciones en clase. Dado que en los libros de texto faltaban algunas explicaciones, tuve que investigar sobre geometría para descubrir técnicas nuevas y mejoradas, enfoques alternativos, pruebas y explicaciones adicionales. Cuando no pude encontrar lo que buscaba con frecuencia, desarrollé una explicación propia más concisa o de mayor comprensión.

Al ejemplificar la geometría con escenas deportivas, los libros suelen recrear cada jugada sin explicar los detalles que faciliten la comprensión. Descubrí que faltaban temas completos y no siempre se incluían las figuras que permitirían a los estudiantes “ver” los resultados de manera intuitiva. La explicación de por qué un teorema debe ser cierto puede ser muy confusa, innecesariamente larga, o bien no estar incluida en el libro. En muchos textos de geometría se evita dar pruebas y demostraciones como si fueran un virus. En otros, se incluían las pruebas pero no contemplaban sugerencias o agudeza en la síntesis de las pruebas.

Durante mi enseñanza en el Parkland College me pidieron, a principios de la década de 1980, participar en el comité de selección de libros de geometría. Después de la selección descubrí problemas graves conforme enseñaba con base en el “mejor” libro disponible. De manera impactante para mí, comprobé que el libro en uso tenía errores, incluyendo fallas lógicas que conducían a contradicciones, incluso a más de una respuesta permisible para algunos problemas.

En algún momento, a finales de esa década de 1980, comencé a imaginar un futuro para la compilación de mis propias notas y problemas de ejemplo. Por supuesto, había que planear el libro para asegurar que incluyera todos los temas de la geometría elemental. El texto tendría que ser lógico para proporcionar un enfoque de “trampolín” para los estudiantes. Se desarrollaría de tal manera que allanara el camino con explicaciones y pruebas que se pudieran leer y comprender, y de modo que proporcionara una guía idónea para que un estudiante pudiera aprender el vocabulario de la geometría, reconocer visualmente relaciones, resolver problemas, incluso desarrollar algunas comprobaciones. Se incluirían figuras si éstas proporcionaban una relación obvia donde un enunciado de hechos demasiado prolijo fuera oscuro. El libro debería tener muchos ejercicios, bloques de construcción que en la práctica harían la transición de las habilidades del estudiante del nivel inferior a un rango medio y también a problemas más estimulantes.

Al escribir este libro para estudiantes universitarios he incorporado mi filosofía para enseñar geometría. He buscado mejorar cada edición a partir de la anterior. Creo con firmeza que el estudiante que desee estudiar geometría, tal como se presenta aquí, estará bien preparado para un estudio futuro y habrá desarrollado habilidades de lógica perdurables y de gran alcance.

Daniel C. Alexander

Contenido

4 Cuadriláteros 177

5 Triángulos semejantes 219

6 Círculos 277

7 Lugar geométrico y concurrencia 323

8 Áreas de polígonos y círculos 351

9 Superficies y sólidos 403

10 Geometría analítica 449

11 Introducción a la trigonometría 495

Apéndices 537

Respuestas 571

Prefacio

La quinta edición de *Geometría*, se escribió en un estilo cuya finalidad es enseñarles a los estudiantes a explorar los principios de la geometría, a razonar de manera deductiva y realizar aplicaciones geométricas en el mundo real. Este libro se escribió para muchos estudiantes: para los que nunca han estudiado geometría, para los que necesitan un enfoque nuevo y para aquellos que necesitan analizar la geometría desde una perspectiva diferente, incluyendo futuros maestros de geometría en muchos niveles. Las ediciones anteriores de este libro han tenido buena aceptación y se han empleado en gran medida en el aula de clases de geometría.

De manera muy similar a como lo haría un maestro, los autores (quienes han sido maestros de geometría durante muchos años) escribieron este libro a fin de introducir una idea con su vocabulario relevante, se examina y explora el concepto, se desarrolla gran variedad de teorías pertinentes que se comprueban de manera deductiva e igualmente se aplica el concepto en algunas situaciones del mundo real. A lo largo del texto nuestro enfoque a la geometría es en su mayor parte visual, como debe ser para que el libro sea efectivo.

El concepto de demostración es un tanto sofisticado. Esperamos que los estudiantes entiendan la importancia de la función de la demostración en la geometría, que puedan comprender las demostraciones que se dan e incluso que sean capaces de generar algunas por ellos mismos. Los autores han proporcionado demostraciones en varios formatos: a dos columnas, en párrafos corridos y, de manera menos formal, con "fotografías", debido a que la creación de una demostración requiere una secuencia lógica de enunciados, tiene efectos de gran alcance que amplían la habilidad del estudiante para razonar, escribir mejor un párrafo o una tarea, incluso escribir mejor subrutinas para un código de cómputo.

Los objetivos de esta obra son similares a las metas de muchos programas de geometría de nivel preparatoria y el contenido está muy influenciado por los estándares impuestos por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) y la American Mathematical Association of Two-Year Colleges (AMATYC).

RESULTADOS PARA EL ESTUDIANTE

- Dominio de los conceptos esenciales de la geometría para las necesidades intelectuales y vocacionales
- Preparación del estudiante para una transferencia posterior al estudio de matemáticas y geometría en una institución universitaria
- Comprensión del razonamiento paso a paso necesario para desarrollar por completo un sistema matemático como la geometría
- Aumento del interés en la geometría mediante actividades de descubrimiento, puntos destacados y soluciones para los ejercicios

NUEVAS CARACTERÍSTICAS PARA LA QUINTA EDICIÓN

Se incluyen aproximadamente 150 nuevos ejercicios, muchos de naturaleza estimulante.

Hay más uniformidad en los pasos que definen las técnicas de construcción.

Se elaboró un nuevo capítulo 7 para aislar los temas basados en el lugar geométrico y la concurrencia; este capítulo se puede tratar como opcional para un curso con horas-crédito limitadas.

Se incluye una nueva sección: *Estrategia para una demostración*, que proporciona una visión en el desarrollo de demostraciones.

Se amplió la cobertura de polígonos regulares como se presenta en las secciones 7.3 y 8.3.

CARACTERÍSTICAS QUE SE MANTIENEN

La sección **Recuerde,** que aparece en los márgenes de las páginas proporciona un mecanismo conveniente cuando se requiere que los estudiantes recuerden un punto importante.

Las actividades llamadas **Descubra** enfatizan la importancia de la inducción en el desarrollo de la geometría.

La **geometría en la naturaleza** y la **geometría en el mundo real** ilustran la geometría que se encuentra en la vida cotidiana.

Las **tablas** que aparecen en el material de fin de capítulo organizan propiedades importantes y otra información del capítulo.

El **índice de aplicaciones** atrae la atención a las aplicaciones prácticas de la geometría.

El **glosario** al final del libro proporciona una referencia rápida de términos de geometría.

Las **fotografías de apertura de capítulo** destacan el tema para cada capítulo.

Se incluyen **advertencias** de manera que los estudiantes eviten cometer errores comunes.

En los **resúmenes** se repasa el capítulo, se introduce al capítulo siguiente y se proporciona una lista de conceptos importantes en el capítulo leído.

Perspectiva histórica son recuadros que proporcionan a los estudiantes el contexto en el que se descubrieron teorías importantes de la geometría.

Perspectiva de aplicación son recuadros que exploran aplicaciones clásicas y demostraciones.

Los **repasos de capítulo** proporcionan numerosos problemas prácticos para ayudar a afirmar la comprensión del estudiante de los conceptos del capítulo.

Los **exámenes de capítulo** dan a los estudiantes la oportunidad de prepararse para las evaluaciones.

Las **páginas de fórmulas** que aparecen al final del libro incluyen fórmulas importantes con figuras relevantes para fines de ilustración.

Las **páginas de referencia** al final del libro resumen las abreviaturas y los símbolos importantes que se utilizan en el texto.

RECURSOS DEL ESTUDIANTE

Student Solutions Guide with Solutions Manual (978-1-439-04793-4) proporciona soluciones resueltas para los problemas con número impar del libro, así como nuevos conjuntos de ejercicios interactivos para un repaso adicional. Las soluciones selectas para los conjuntos de ejercicios interactivos adicionales se encuentran dentro de la guía de estudio. Las soluciones completas están disponibles en el sitio web de los maestros.

Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

Text Specific DVD (978-1-439-04795-8) presentado por Dana Mosely proporcionan un contenido producido de manera profesional que cubre temas clave del libro y ofrece un recurso valioso para aumentar las instrucciones que se den en las aulas o para el estudio y el repaso independientes.

Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

SITIO WEB DEL ESTUDIANTE

Visítenos en nuestro sitio web para tener acceso a gran cantidad de recursos de aprendizaje.

RECURSOS DEL PROFESOR

El **Instructor's Solutions Manual** (978-0-538-73769-2) proporciona soluciones para todos los ejercicios en el libro, alternativas por orden de presentación de los temas incluidos, diapositivas y sugerencias para la enseñanza de cada tema.

Este recurso se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

PowerLecture with Examview® (978-1-439-04797-2). Este CD-ROM le proporciona al profesor herramientas visuales dinámicas para la enseñanza. Se pueden crear, entregar y adaptar exámenes (tanto impresos como en línea) en minutos con ExamView® Computerized Testing Featuring Algorithmic Equations. Se pueden desarrollar con facilidad conjuntos de soluciones para tareas o exámenes utilizando el manual de soluciones en línea Solution Builder's. También se incluyen diapositivas para conferencias en Microsoft® PowerPoint®, figuras del libro y Test Bank, en formato electrónico.

Este recurso se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

Solution Builder (978-1-439-04792-7) permite que los maestros desarrollen soluciones a medida que pueden imprimir para distribuir o publicar según se requiera. Ésta es una forma conveniente y oportuna para suministrar soluciones para conjuntos de tarea específicos.

Este recurso se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

SITIO WEB DEL PROFESOR

Visite nuestro sitio web para tener acceso a una gran cantidad de recursos de aprendizaje.

RECONOCIMIENTOS

Deseamos agradecer a Marc Bove, Acquisitions Editor; así como a los miembros del equipo en Cengage Learning, Shaun Williams, Assistant Editor, Kyle O'Loughlin, Editorial Assistant, Maureen Ross, Senior Media Editor, Heleny Wong, Media Editor, Gordon Lee, Marketing Manager, Angela Kim, Marketing Assistant y Mary Anne Payumo, Marketing Communications Manager. Además, quisiéramos dar crédito y agradecer a quienes hicieron posible las ediciones anteriores de este libro: Beth Dahlke, Theresa Grutz, Florence Powers, Dawn Nuttall, Lynn Cox, Melissa Parkin, Noel Kamm y Carol Merrigan.

Expresamos nuestra gratitud a los revisores de las ediciones anteriores, incluyendo a:

Paul Allen, *University of Alabama*
Jane C. Beatie, *University of South Carolina en Aiken*
Steven Blasberg, *West Valley College*
Barbara Brown, *Anoka Ramsey Community College*
Patricia Clark, *Indiana State University*
Joyce Cutler, *Framingham State College*
Walter Czarnec, *Framingham State College*
Darwin G. Dorn, *University of Wisconsin-Washington County*
William W. Durand, *Henderson State University*
Zoltan Fischer, *Minneapolis Community and Technical College*
Kathryn E. Godshalk, *Cypress College*
Chris Graham, *Mt. San Antonio Community College*
Sharon Gronberg, *Southwest Texas State University*
Geoff Hagopian, *College of the Desert*
Edith Hays, *Texas Woman's University*
Ben L. Hill, *Lane Community College*
George L. Holloway, *Los Angeles Valley College*
Tracy Hoy, *College of Lake County*
Josephine G. Lane, *Eastern Kentucky University*
John C. Longnecker, *University of Northern Iowa*

Erin C. Martin, *Parkland College*
Nicholas Martin, *Shepherd College*
Jill McKenney, *Lane Community College*
James R. McKinney, *Cal Poly en Pomona*
Iris C. McMurtry, *Motlow State Community College*
Michael Naylor, *Western Washington University*
Maurice Ngo, *Chabot College*
Ellen L. Rebold, *Brookdale Community College*
Lauri Semarne, *Los Angeles, California*
Patty Shovanec, *Texas Technical University*
Marvin Stick, *University of Massachusetts-Lowell*
Joseph F. Stokes, *Western Kentucky University*
Kay Stroope, *Phillips Community College-University of Arkansas*
Dr. John Stroyls, *Georgia Southwestern State University*
Karen R. Swick, *Palm Beach Atlantic College*
Steven L. Thomassin, *Ventura College*
Bettie A. Truitt, Ph.D., *Black Hawk College*
Jean A. Vrecheck, *Sacramento City College*
Tom Zerger, *Saginaw Valley State University*

Prólogo

En la quinta edición de *Geometría* los temas que comprenden un curso mínimo se incluyen en los capítulos 1 al 6 y en el capítulo 8. Para un curso básico se recomienda la cobertura de los capítulos 1 al 8. Algunas secciones que se pueden tratar como opcionales al formular la descripción de un curso son las siguientes:

- Sección 2.6 Simetría y transformaciones
- Sección 3.4 Justificación de construcciones básicas
- Sección 3.5 Desigualdades en un triángulo
- Sección 5.6 Segmentos divididos proporcionalmente
- Sección 6.4 Algunas construcciones y desigualdades para el círculo
- Sección 7.1 Lugar geométrico de puntos
- Sección 7.2 Concurrencia de rectas
- Sección 7.3 Más acerca de polígonos regulares
- Sección 8.5 Más acerca de relaciones en el círculo

Dado que este libro se utiliza para cursos de tres, cuatro y cinco horas, el siguiente diagrama de flujo representa diferentes órdenes en que se puede emplear el libro. Como se sugiere en el párrafo anterior, es posible tratar ciertas secciones como opcionales.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & & 7 \arrow[dr] & 9 & \\
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 6 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 8 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & 10 \\
 & & & & & & & 11 &
\end{tikzcd}
$$

Para estudiantes que necesiten un repaso adicional de temas algebraicos relacionados, considere estos temas que se encuentran en el apéndice A:

A.1: Expresiones algebraicas
A.2: Fórmulas y ecuaciones
A.3: Desigualdades
A.4: Ecuaciones cuadráticas

En la sección A.4 se incluyen los siguientes métodos para resolver ecuaciones cuadráticas: el método de factorización, el método de las raíces cuadradas y la fórmula cuadrática.

En el sitio web del libro se pueden encontrar apéndices lógicos. Éstos incluyen:

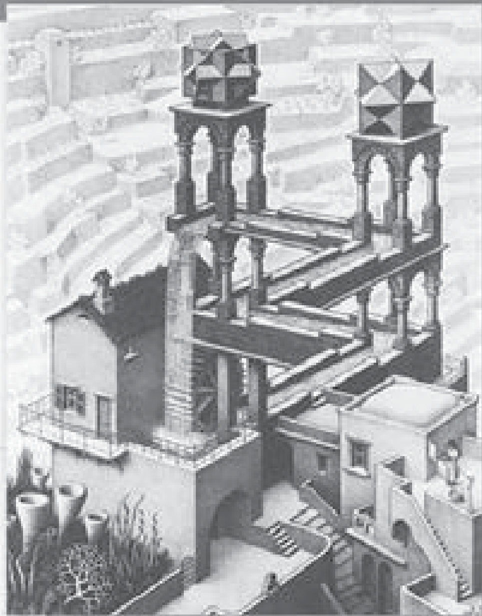
Apéndice lógico 1: Tablas de verdad
Apéndice lógico 2: Argumentos válidos

Daniel C. Alexander y Geralyn M. Koeberlein

Índice de aplicaciones

Relaciones lineales y angulares

Capítulo 1



CONTENIDO

Hay un DVD disponible que cuenta con un video con explicación de conceptos, problemas de ejemplo y aplicaciones. Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

¡Mágico! En geometría las figuras se pueden trazar a modo de crear una ilusión. M. C. Escher (1898-1971), un artista conocido por sus complejas ilusiones ópticas, creó "Waterfall" en 1961. Al analizar con cuidado la figura la atención se concentra en la percepción de que el agua puede fluir hacia arriba. Si bien la torre a la izquierda es un piso más alta que la torre a la derecha, ambas parecen tener la misma altura. Con frecuencia las obras de Escher hacen que el observador cuestione su razonamiento. Este capítulo inicia con un análisis de los enunciados y los tipos de razonamiento utilizados en la geometría. La sección 1.2 se enfoca en las herramientas de la geometría, como la regla y el transportador. El resto del capítulo inicia el desarrollo formal y lógico de la geometría considerando las relaciones entre rectas y ángulos. Cualquier estudiante que necesite un repaso de álgebra puede consultar algunos temas selectos en los apéndices de este libro. Se repasan o desarrollan otras técnicas del álgebra junto con temas relacionados de la geometría y en nuestro sitio web se encuentra una introducción a la lógica.

1.1 Conjuntos, enunciados y razonamiento

CONCEPTOS CLAVE

Enunciado
Variable
Conjunción
Disyunción
Negación
Implicación (condicional)
Hipótesis
Conclusión
Intuición
Inducción
Deducción
Argumento (válido y no válido)
Ley de separación
Conjunto
Subconjunto
Intersección
Unión
Diagrama de Venn

Un **conjunto** es cualquier colección de objetos, los cuales se conocen como *elementos* del conjunto. El enunciado $A = \{1, 2, 3\}$ se lee, "A es el conjunto de elementos 1, 2 y 3". En geometría las figuras geométricas como rectas y ángulos en realidad son conjuntos de puntos.

En $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{\text{números cardinales}\}$, A es un *subconjunto* de B ya que cada elemento en A también está en B; en símbolos, $A \subseteq B$. En el capítulo 2 se descubrirá que $T = \{\text{todos los triángulos}\}$ es un subconjunto de $P = \{\text{todos los polígonos}\}$.

ENUNCIADOS

DEFINICIÓN

Un **enunciado** es un conjunto de palabras y símbolos que de manera conjunta forman una afirmación que se puede clasificar como verdadera o falsa.

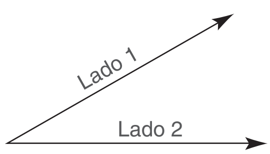


Figura 1.1

EJEMPLO 1

Clasifique cada uno de los enunciados siguientes como verdadero, falso o ninguno de ellos.

1. $4 + 3 = 7$
2. Un ángulo tiene dos lados. (Consulte la figura 1.1.)
3. Robert E. Lee jugó como parador en corto para los Yankees.
4. $7 < 3$ (esto se lee, "7 es menor que 3").
5. ¡Cuidado!

Solución 1 y 2 son enunciados verdaderos; 3 y 4 son enunciados falsos; el 5 no es un enunciado. ■

Algunos enunciados contienen una o más *variables*; una **variable** es una letra que representa un número. La afirmación "$x + 5 = 6$" se denomina *sentencia abierta* o *enunciado abierto* dado que se puede clasificar como verdadero o falso, dependiendo del valor de reemplazo de x. Por ejemplo, $x + 5 = 6$ es verdadero si $x = 1$; para x diferente de 1, $x + 5 = 6$ es falso. Algunos enunciados que contienen variables se clasifican como verdaderos debido a que son verdaderos para todos los reemplazos. Considere la propiedad conmutativa de la adición, que suele enunciarse en la forma $a + b = b + a$. En palabras, esta propiedad establece que se obtiene el mismo resultado cuando dos números se suman en cualquier orden; por ejemplo, cuando $a = 4$ y $b = 7$, se deduce que $4 + 7 = 7 + 4$.

La **negación** de un enunciado dado P hace una afirmación opuesta a la del enunciado original. Si el enunciado dado es verdadero, su negación es falsa y viceversa. Si P es un enunciado se utiliza $\sim P$ (que se lee "no P") para indicar su negación.

EJEMPLO 2

De la negación de cada enunciado.

a) $4 + 3 = 7$ b) Todos los peces pueden nadar.

Solución

a) $4 + 3 \neq 7$ ($\neq$ significa "no es igual a").
b) Algunos peces no pueden nadar. (Para negar "Todos los peces pueden nadar", se dice que al menos un pez no puede nadar.) ■

La conjunción

P	*Q*	*P* y *Q*
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Un enunciado *compuesto* se forma combinando otros enunciados que se utilizan como "componentes estructurales". En esos casos se pueden emplear letras como P y Q para representar enunciados simples. Por ejemplo, la letra P se puede referir al enunciado "$4 + 3 = 7$", y la letra Q al enunciado "Babe Ruth fue un presidente de los Estados Unidos". El enunciado "$4 + 3 = 7$ *y* Babe Ruth fue un presidente de los Estados Unidos" tiene la forma P *y* Q y se conoce como la **conjunción** de P y Q. El enunciado "$4 + 3 = 7$ *o* Babe Ruth fue un presidente de los Estados Unidos" tiene la forma P *o* Q y se conoce como la **disyunción** de P y Q. Una conjunción es verdadera sólo cuando P y Q son *ambos* verdaderos. Una disyunción es falsa sólo cuando P y Q son *ambos* falsos. Consulte las tablas 1.1 y 1.2.

TABLA 1.2
La disyunción

P	*Q*	*P* o *Q*
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO 3

Suponga que los enunciados P y Q son verdaderos.

P: $4 + 3 = 7$
Q: Un ángulo tiene dos lados.

Clasifique los enunciados siguientes como verdaderos o falsos.

1. $4 + 3 \neq 7$ y un ángulo tiene dos lados.
2. $4 + 3 \neq 7$ o un ángulo tiene dos lados.

Solución El enunciado 1 es falso debido a que la conjunción tiene la forma "F y V".
El enunciado 2 es verdadero dado que la disyunción tiene la forma "F o V". ■

El enunciado "Si P, entonces Q, conocido como **enunciado condicional** (o **implicación**), se clasifica como verdadero o falso como un todo. Un enunciado de esta forma se puede escribir en formas equivalentes; por ejemplo, el enunciado condicional "Si un ángulo es un ángulo recto, entonces mide 90 grados" es equivalente al enunciado "Todos los ángulos rectos miden 90 grados".

EJEMPLO 4

Clasifique cada enunciado condicional como verdadero o falso.

1. Si un animal es un pez, entonces puede nadar. (Establece, "Todos los peces pueden nadar".)
2. Si dos lados de un triángulo tienen la misma longitud, entonces dos ángulos del triángulo tienen la misma medida. (Consulte la figura 1.2 en la página 4.)

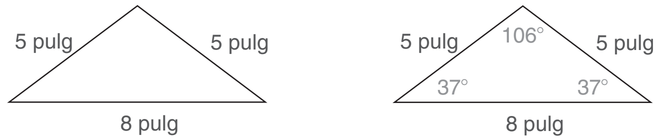


Figura 1.2

3. Si Wendell estudia, entonces recibirá una A en su examen.

Solución Los enunciados 1 y 2 son verdaderos. El enunciado 3 es falso; Wendell puede estudiar pero no obtener una A. ■

En el enunciado condicional "Si P, entonces Q", P es la **hipótesis** y Q es la **conclusión**. En el enunciado 2 del ejemplo 4, se tiene:

Hipótesis: Dos lados de un triángulo son iguales en longitud.

Conclusión: Dos ángulos del triángulo son iguales en medida.

GEE *Ejercicios 1-7*

Para el enunciado verdadero, "Si P, entonces Q", la situación hipotética descrita en P implica la conclusión descrita en Q. Este tipo de enunciado con frecuencia sugiere alguna forma de razonamiento, por lo que volvemos nuestra atención a este punto.

RAZONAMIENTO

El éxito en el estudio de la geometría requiere un desarrollo de vocabulario, atención a los detalles y al orden, sustentar afirmaciones y deducciones. El **razonamiento** es un proceso basado en la experiencia y en los principios que permiten llegar a una conclusión. Los tipos siguientes de razonamiento se utilizan para desarrollar principios matemáticos.

1. Intuición	Inspiración que conduce al enunciado de una teoría
2. Inducción	Esfuerzo organizado para probar y validar una teoría
3. Deducción	Argumento formal que comprueba la teoría probada

▶ *Intuición*

Con frecuencia estamos inclinados a pensar y decir "Se me ocurre que…" Con **intuición** una súbita iluminación nos permite formular un enunciado sin aplicar ningún razonamiento formal. Cuando usamos la intuición en ocasiones erramos al sacar conclusiones precipitadas. En una caricatura el personaje que tiene la "idea brillante" (valiéndose de la intuición) se muestra con una bombilla iluminada sobre su cabeza.

EJEMPLO 5

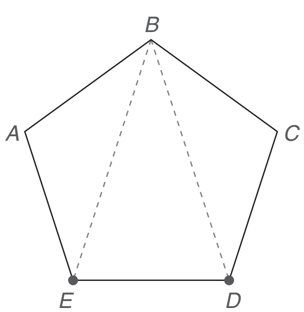


Figura 1.3

La figura 1.3 se denomina *pentágono regular* debido a que sus cinco lados tienen longitudes iguales y sus ángulos tienen medidas iguales. ¿Qué supone que sea verdadero respecto a las longitudes de las rectas discontinuas de B a E y de B a D?

Solución La intuición sugiere que las longitudes de las rectas discontinuas (conocidas como *diagonales* del pentágono) son iguales.

NOTA 1: Se puede utilizar una *regla* para verificar que esta afirmación es verdadera. Las mediciones con una regla se analizan con más detalle en la sección 1.2.

NOTA 2: Aplicando los métodos del capítulo 3, mediante deducción se puede demostrar que las dos diagonales tienen, en efecto, la misma longitud. ■

La función que desempeña la intuición al formular pensamientos matemáticos es muy significativa. Sin embargo, ¡tener una idea no es suficiente! Probar una teoría puede conducir a una revisión de la teoría o incluso a su rechazo total. Si una teoría pasa la prueba se acerca más a convertirse en ley matemática.

▶ *Inducción*

A menudo se utilizan observaciones específicas y experimentos para obtener una conclusión general. Este tipo de razonamiento se llama **inducción**. Como podría esperarse el proceso de observación/experimentación es común en entornos de laboratorio y clínicos. Los químicos, físicos, doctores, psicólogos, pronosticadores del clima y muchos otros se basan en la información recopilada para sacar conclusiones… ¡y nosotros también!

EJEMPLO 6

En una tienda de abarrotes, usted examina varios recipientes de yogur de 8 onzas. Aunque los sabores y las marcas difieren, cada recipiente cuesta 75 centavos. ¿Qué concluiría?

Conclusión En la tienda cada recipiente de yogur de 8 oz cuesta 75 centavos. ■

Como ya debe saber (consulte la figura 1.2), una figura con tres rectas se denomina *triángulo*.

EJEMPLO 7

En una clase de geometría, se le pide medir los tres ángulos interiores de cada uno de los triángulos en la figura 1.4. Usted descubre que los triángulos I, II y IV tienen dos ángulos (marcados) con medidas iguales. ¿Qué puede concluir?

Conclusión Los triángulos que tienen dos lados de igual longitud también tienen dos ángulos de igual medida.

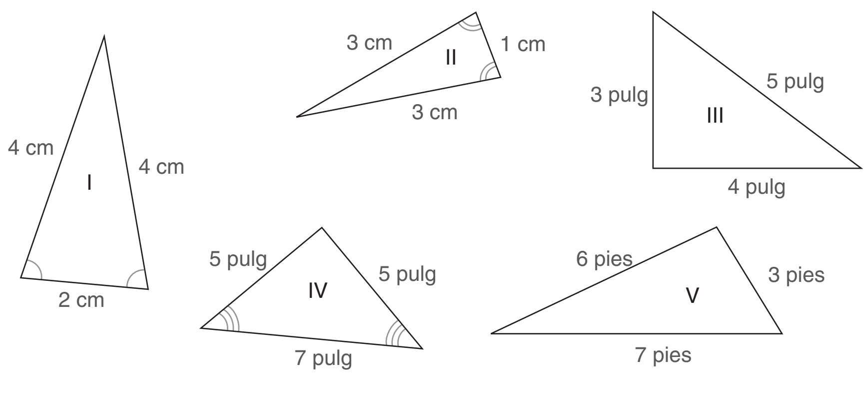


Figura 1.4

NOTA: Se puede utilizar un *transportador* para apoyar la conclusión obtenida en el ejemplo 7. El transportador se estudiará en la sección 1.2. ■

▶ *Deducción*

DEFINICIÓN

Deducción es el tipo de razonamiento en el que el conocimiento y la aceptación de suposiciones seleccionadas garantizan la veracidad de una conclusión particular.

En el ejemplo 8 se ilustrará la forma de un razonamiento deductivo que con mayor frecuencia se emplea en el desarrollo de la geometría. En esta forma, conocida como **argumento válido**, al menos dos enunciados se tratan como hechos; estas suposiciones se denominan *premisas* del argumento. Con base en las premisas, debe deducirse una *conclusión* particular. Esta forma de deducción se llama ley de separación.

EJEMPLO 8

Si acepta como verdaderos los siguientes enunciados 1 y 2, ¿qué debe concluir?

1. Si un estudiante juega en el equipo de basquetbol de la preparatoria Rockville, entonces es un atleta talentoso.
2. Todd juega en el equipo de basquetbol de la preparatoria Rockville.

Conclusión Todd es un atleta talentoso. ■

Para reconocer con más facilidad este patrón para el razonamiento deductivo se utilizan letras con el fin de representar enunciados en la generalización siguiente.

LEY DE SEPARACIÓN

Si P y Q representan enunciados simples y suponiendo que los enunciados 1 y 2 son verdaderos. Entonces un argumento válido que tiene la conclusión C tiene la forma

1. Si P, entonces Q } **premisas**
2. P

C. $\therefore Q$ } **conclusión**

NOTA: El símbolo $\therefore$ significa “por lo tanto”.

En la forma anterior el enunciado “si P, entonces Q” con frecuencia se lee “P implica Q”. Es decir, cuando se sabe que P es verdadero, Q debe serlo también.

EJEMPLO 9

¿Es válido el siguiente argumento? Suponga que las premisas 1 y 2 son verdaderas.

1. Si está lloviendo, entonces Tim se quedará en casa.
2. Está lloviendo

C. $\therefore$ Tim se quedará en casa.

Conclusión El argumento es válido ya que la forma del argumento es

1. Si P, entonces Q
2. P
C. $\therefore Q$

con P = "está lloviendo" y Q = "Tim se quedará en casa". ■

EJEMPLO 10

¿Es válido el argumento siguiente? Suponga que las premisas 1 y 2 son verdaderas.

1. Si una persona vive en Londres, entonces vive en Inglaterra.
2. William vive en Inglaterra.
C. ∴ William vive en Londres.

Conclusión El argumento no es válido. Aquí, P = "Una persona vive en Londres" y Q = "Una persona vive en Inglaterra". Por tanto, la forma de este argumento es

1. Si P, entonces Q
2. Q
C. $\therefore P$

Pero la ley de separación no responde la pregunta "Si Q, ¿entonces qué?" Si bien el enunciado Q es verdadero, no permite sacar una conclusión válida acerca de P. Por supuesto, si William vive en Inglaterra, *podría* vivir en Londres; pero en cambio podría vivir en Liverpool, Manchester, Coventry o en cualquiera de los innumerables lugares en Inglaterra. Cada una de estas posibilidades es un **contraejemplo** que desaprueba la validez del argumento. Recuerde que el razonamiento deductivo tiene que ver con alcanzar conclusiones que *deben ser verdaderas*, dada la veracidad de las premisas. ■

Advertencia

En el recuadro, el argumento a la izquierda es válido y basado en el ejemplo 9. El argumento a la derecha no es válido; esta forma se dio en el ejemplo 10.

ARGUMENTO VÁLIDO	ARGUMENTO NO VÁLIDO
1. Si P, entonces Q	**1.** Si P, entonces Q
2. P	**2.** Q
C. $\therefore Q$	C. $\therefore P$

A lo largo del trabajo en geometría se utilizará el razonamiento deductivo. Por ejemplo, suponga que se conocen estos dos hechos:

GÉE

Ejercicios 8-12

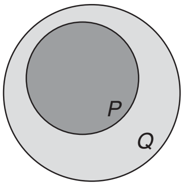
1. Si un ángulo es un ángulo recto, entonces mide 90°.
2. El ángulo A es un ángulo recto.

Entonces se puede concluir

C. El ángulo A mide 90°.

DIAGRAMAS DE VENN

Los conjuntos de objetos con frecuencia se representan mediante figuras geométricas conocidas como *diagramas de Venn*. Su creador, John Venn, fue un inglés que vivió de 1834 a 1923. En un diagrama de Venn cada conjunto se representa con una figura cerrada (limitada), como un círculo o un rectángulo. Si los enunciados P y Q del enunciado condicional "Si P, entonces Q" están representados por conjuntos de objetos P y Q, respectivamente, entonces la ley de separación se puede justificar mediante un argumento geométrico. Cuando un diagrama de Venn se utiliza para representar el enunciado “Si P, entonces Q”, es absolutamente necesario que el círculo P esté dentro del círculo Q; es decir, P es un *subconjunto* de Q. (Vea la figura 1.5.)



Si P, entonces Q.

Figura 1.5

EJEMPLO 11

Utilice diagramas de Venn para comprobar el ejemplo 8.

Solución Sea B = los estudiantes en el equipo de basquetbol de la preparatoria Rockville.

Sea A = las personas que son atletas talentosos.
Para representar el enunciado “Si es un jugador de basquetbol (B), entonces es un atleta talentoso (A)”, se muestra B dentro de A. En la figura 1.6 se utiliza el punto T para representar a Todd, una persona en el equipo de basquetbol (T en B). Con el punto T también en el círculo A, se concluye que “Todd es un atleta talentoso”. ■

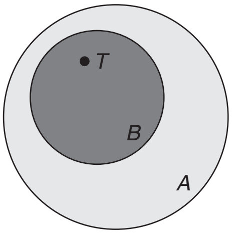


Figura 1.6

Descubra

Una encuesta a 100 entusiastas del deporte en el área de San Luis muestra que 74 apoyan al equipo de béisbol de los Cardenales y 58 al equipo de futbol de los Carneros. Todos los encuestados apoyan a un equipo, a otro equipo, o a los dos. ¿Cuántos apoyan a ambos equipos?

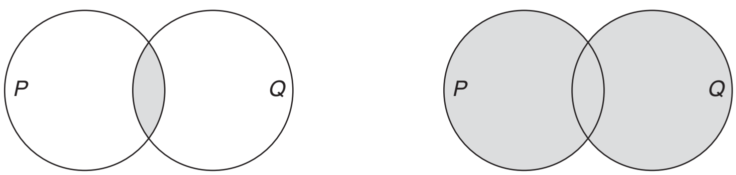
RESPUESTA

32; 74 + 58 − 100

El enunciado “Si P, entonces Q” en ocasiones se expresa en la forma “Todos los P son Q”. Por ejemplo, el enunciado condicional de los ejemplos 8 y 11 se puede reescribir “Todos los jugadores de la preparatoria Rockville son atletas talentosos”. Los diagramas de Venn también se pueden utilizar para demostrar que el argumento del ejemplo 10 no es válido. Para demostrar la invalidez del argumento en el ejemplo 10 se debe demostrar que un objeto en Q puede *no* estar dentro del círculo P. (Vea la figura 1.5.)

Los enunciados compuestos conocidos como conjunción y disyunción también se pueden relacionar con la intersección y la unión de conjuntos, relaciones que se pueden ilustrar empleando diagramas de Venn. Para los diagramas de Venn, se supone que los conjuntos P y Q pueden tener elementos en común. (Vea la figura 1.7.)

Los elementos comunes a P y Q forman la **intersección** de P y Q, que se escribe $P \cap Q$. Este conjunto, $P \cap Q$, es el conjunto de todos los elementos en P **y** Q. Los elementos que están en P, en Q, o en ambos forman la **unión** de P y Q, la cual se escribe $P \cup Q$. Este conjunto, $P \cup Q$, es el conjunto de elementos en P **o** Q.



(a) $P \cap Q$ (b) $P \cup Q$

GEE *Ejercicios 13-15*

Figura 1.7

▶▶▶ Ejercicios 1.1

En los ejercicios 1 y 2, ¿cuáles frases son enunciados? Si una frase es un enunciado, clasifíquela como verdadera o falsa.

1. a) ¿Dónde vive?
b) $4 + 7 \neq 5$.
c) Washington fue el primer presidente de los Estados Unidos.
d) $x + 3 = 7$ cuando $x = 5$.

2. a) Chicago se localiza en el estado de Illinois.
b) ¡Fuera de aquí!
c) $x < 6$ (se lee “x es menor que 6”) cuando $x = 10$.
d) A Babe Ruth se le recuerda como un gran jugador de futbol.

En los ejercicios 3 y 4 proporcione la negación de cada enunciado.

3. a) Cristóbal Colón cruzó el Océano Atlántico.
b) Todas las bromas son divertidas.

4. a) Nadie me quiere.
b) El ángulo 1 es un ángulo recto.

En los ejercicios 5 al 10 clasifique cada enunciado como simple, condicional, si es una conjunción o una disyunción.

5. Si Alicia juega, el equipo de voleibol ganará.

6. Alicia jugó y el equipo ganó.

7. El trofeo del primer lugar es hermoso.

8. Un entero es impar o par.

9. Matthew está jugando como parador en corto.

10. Estará en problemas si no cambia sus modales.

En los ejercicios 11 al 18, establezca las hipótesis y la conclusión de cada enunciado.

11. Si va al juego, entonces pasará un buen rato.

12. Si dos cuerdas de un círculo tienen longitudes iguales, entonces los arcos de las cuerdas son congruentes.

13. Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, entonces el paralelogramo es un rombo.

14. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $a \cdot d = b \cdot c$.

15. Los ángulos correspondientes son congruentes si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal.

16. Los ángulos verticales son congruentes cuando dos rectas se intersecan.

17. Todos los cuadrados son rectángulos.

18. Los ángulos base de un triángulo isósceles son congruentes.

En los ejercicios 19 al 24, clasifique cada enunciado como verdadero o falso.

19. Si un número es divisible entre 6, entonces es divisible entre 3.

20. La lluvia es húmeda y la nieve es fría.

21. La lluvia es húmeda o la nieve es fría.

22. Si Jim vive en Idaho, entonces vive en Boise.

23. Los triángulos son redondos o los círculos son cuadrados.

24. Los triángulos son cuadrados o los círculos son redondos.

En los ejercicios 25 al 32, mencione (si lo hay) el tipo de razonamiento que se usa.

25. Al participar en una búsqueda de huevos de Pascua, Sarah nota que cada uno de los siete huevos que encontró está numerado. Sarah concluye que todos los huevos utilizados para la búsqueda están numerados.

26. Usted entra a su clase de geometría, observa al maestro y concluye que hoy tendrá un examen.

27. Albert conoce la regla "Si un número se suma a cada lado de una ecuación, entonces la nueva ecuación tiene la misma solución que la correspondiente a la ecuación dada". Dada la ecuación $x - 5 = 7$, Albert concluye que $x = 12$.

28. Usted cree que "Cualquiera que juegue en la liga mayor de béisbol es un atleta talentoso". Sabiendo que Duane Gibson ha sido recién llamado a las ligas mayores, usted concluye que Duane Gibson es un atleta talentoso.

29. Cuando un hombre esposado es llevado a la estación de policía usted lo mira y le dice a su amigo: "Ese sujeto me parece que es culpable".

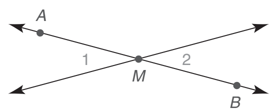
30. Al juzgar un proyecto en la Feria de Ciencias, el señor Cange encuentra que cada uno de los primeros 5 proyectos es extraordinario y concluye que los 10 serán extraordinarios.

31. Usted conoce la regla "Si una persona vive en el distrito del Santa Rosa Junior College, entonces esa persona recibirá una beca en Santa Rosa". Candance le dice que ella recibió una beca. Usted concluye que ella vive en el distrito del Santa Rosa Junior College.

32. Cuando la señora Gibson entra a la sala de espera del doctor, concluye que será una espera prolongada.

En los ejercicios 33 al 36 utilice la intuición para establecer una conclusión.

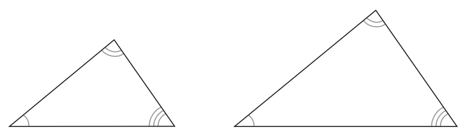
33. Le dicen que los ángulos opuestos que se forman cuando dos rectas se cruzan son **ángulos verticales**. En la figura, los ángulos 1 y 2 son ángulos verticales. ¿Cuál es la conclusión?



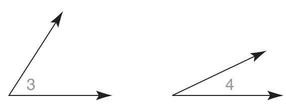
Ejercicios 33, 34

34. En la figura, el punto M se denomina **punto medio** del segmento de recta AB. ¿Cuál es su conclusión?

35. Los dos triángulos que se muestran son **semejantes** entre sí. ¿Cuál es su conclusión?



36. Observe (pero no mida) los ángulos siguientes. ¿Cuál es su conclusión?



En los ejercicios 37 al 40, utilice la inducción para establecer una conclusión.

37. Varias películas dirigidas por Lawrence Garrison han ganado premios de la Academia y muchas otras han recibido nominaciones. Su última película, *Un prisionero de la sociedad*, se estrenará la próxima semana. ¿Cuál es su conclusión?

38. El lunes Matt le dice: "Andy golpeó a su hermanita hoy en la escuela". El martes, Matt le informa: "Andy tiró a la basura su libro de matemáticas durante la clase". El miércoles, Matt le dice: "Como Andy estaba lanzando chícharos en la cafetería de la escuela, lo enviaron a la oficina del director". ¿Cuál es su conclusión?

39. Al buscar un salón de clases Tom se detiene en la oficina de un maestro para pedir información. En los libreros de la oficina hay textos titulados *Álgebra intermedia*, *Cálculo*, *Geometría moderna*, *Álgebra lineal* y *Ecuaciones diferenciales*. ¿Cuál es su conclusión?

40. En la casa de un amigo, usted ve varios artículos alimenticios, incluyendo manzanas, peras, uvas, naranjas y plátanos. ¿Cuál es su conclusión?

En los ejercicios 41 al 50, utilice la deducción para establecer una conclusión, si es posible.

41. Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90°, entonces estos ángulos se denominan "complementarios". El ángulo 1 mide 27° y el ángulo 2 mide 63°. ¿Cuál es su conclusión?

42. Si una persona asiste a la universidad, entonces esa persona tendrá éxito en la vida. Kathy Jones asiste al Dade County Community College. ¿Cuál es su conclusión?

43. Todos los maestros de matemáticas tienen un extraño sentido del humor. Alex es un maestro de matemáticas. ¿Cuál es su conclusión?

44. Todos los maestros de matemáticas tienen un extraño sentido del humor. Alex tiene un extraño sentido del humor. ¿Cuál es su conclusión?

45. Si Stewart Powers es electo presidente, entonces cada familia tendrá un automóvil. Cada familia tiene un automóvil. ¿Cuál es su conclusión?

46. Si Tabby está maullando, entonces tiene hambre. Tabby tiene hambre. ¿Cuál es su conclusión?

47. Si una persona se involucra en la política, entonces esa persona estará en la mira del público. June Jesse ha sido electa al senado del estado de Missouri. ¿Cuál es su conclusión?

48. Si un estudiante se inscribe en un curso de literatura, entonces esa persona trabajará muy duro. Bram Spiegel cava zanjas a mano seis días a la semana. ¿Cuál es su conclusión?

49. Si una persona es rica y famosa, entonces esa persona es feliz. Marilyn es rica y bien conocida. ¿Cuál es su conclusión?

50. Si usted estudia con ahínco y contrata un tutor, entonces obtendrá una A en este curso. Usted obtiene una A en este curso. ¿Cuál es su conclusión?

En los ejercicios 51 al 54, utilice diagramas de Venn para determinar si el argumento es válido o no válido.

51. (1) Si un animal es un gato, entonces emite un sonido de "miau".
(2) Tipper es un gato.
(C) Entonces Tipper emite un sonido de "miau".

52. (1) Si un animal es un gato, entonces emite un sonido de "miau".
(2) Tipper emite un sonido de "miau".
(C) Entonces Tipper es un gato.

53. (1) Todos los boy scouts están al servicio de los Estados Unidos de América.
(2) Sean está al servicio de los Estados Unidos de América.
(C) Sean es un boy scout.

54. (1) Todos los boy scouts están al servicio de los Estados Unidos de América.
(2) Sean es un boy scout.
(C) Sean está al servicio de los Estados Unidos de América.

55. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, clasifique cada uno de los siguientes como verdadero o falso.
(a) $A \cap B = \{2\}$
(b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
(c) $A \subseteq B$

1.2 Geometría informal y medición

CONCEPTOS CLAVE

Punto	Punto medio	Perpendicular
Recta	Congruencia	Compás
Plano	Transportador	Construcciones
Puntos colineales	Paralelo	Círculo
Segmento de recta	Bisecar	Arco
Puntos intermedios	Intersecar	Radio

En geometría los términos *punto, recta* y *plano* se describen pero no se definen. Otros conceptos que se aceptan intuitivamente, pero que nunca se definen, incluyen la *rectitud* de una recta, la *llanura* de un plano, el concepto de que un punto se encuentra *entre* otros dos puntos en una recta, y el concepto de que un punto se encuentra en el *interior* o en el *exterior* de un ángulo. Algunos de los términos que se encuentran en esta sección se definen de manera formal en secciones posteriores de este capítulo 1. Las siguientes son descripciones de algunos de los términos indefinidos.

Un **punto**, que se representa por un punto, tiene ubicación pero no tamaño; es decir, un punto no tiene dimensiones. Se utiliza una letra cursiva mayúscula para nombrar un punto. En la figura 1.8 se muestran los puntos *A*, *B* y *C*. (Por conveniencia "punto" se puede abreviar "pto.".)

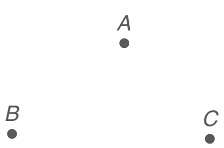


Figura 1.8

El segundo término indefinido es **recta**. Una recta es un conjunto infinito de puntos. Dados dos puntos cualesquiera en una recta, siempre existe un punto que se encuentra

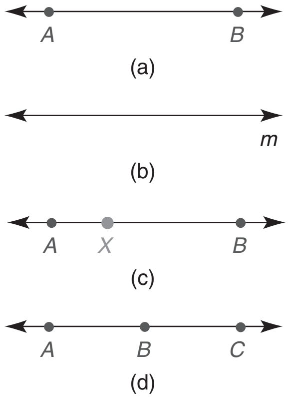


Figura 1.9

entre ellos en esa recta. Las rectas tienen una cualidad de "rectitud" que no se define pero que se supone. Dados varios puntos en una recta, estos puntos forman una trayectoria recta. Mientras que un punto no tiene dimensiones, una recta es unidimensional; es decir, la distancia entre cualesquiera dos puntos en una recta dada se puede medir. La recta *AB*, representada de manera simbólica mediante $\overleftrightarrow{AB}$, se extiende infinitamente en direcciones opuestas, como lo sugieren las flechas sobre la recta. Una recta también puede ser representada por una sola letra minúscula. En las figuras 1.9(a) y (b) se muestran las rectas *AB* y *m*. Cuando se utiliza una letra minúscula para designar una recta, se omite el símbolo de recta; es decir, $\overleftrightarrow{AB}$ y *m* pueden designar a la misma recta.

Observe la posición del punto *X* en $\overleftrightarrow{AB}$ en la figura 1.9(c). Cuando tres puntos como *A*, *X* y *B* están sobre la misma recta, se dice que son **colineales**. En el orden que se muestra, el cual se simboliza *A*-*X*-*B* o *B*-*X*-*A*, el punto *X* se dice que está *entre A* y *B*.

Cuando no se proporciona un esquema la notación *A*-*B*-*C* significa que estos puntos son colineales, con *B entre A* y *C*. Cuando se proporciona un esquema se supone que todos los puntos en el esquema que aparecen colineales *son* colineales, *a menos que se indique lo contrario.* En la figura 1.9(d) se muestra que *A*, *B* y *C* son colineales, con *B* entre *A* y *C*.

En este momento se introducen de manera informal algunos términos que más adelante se definirán formalmente. Es probable que haya encontrado ya muchas veces los términos *ángulo*, *triángulo* y *rectángulo*. Un ejemplo de cada uno se muestra en la figura 1.10.

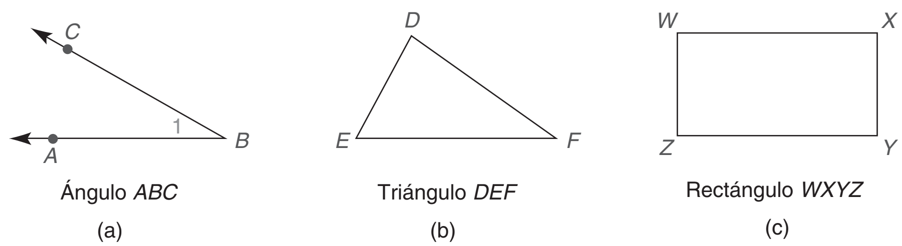


Figura 1.10

Utilizando símbolos y abreviaciones nos referimos a las figuras 1.10(a), (b) y (c) como $\angle ABC$, $\triangle DEF$ y el rectángulo *WXYZ*, respectivamente. Se debe tener cuidado al nombrar las figuras; si bien el ángulo en la figura 1.10(a) se puede denominar $\angle CBA$, es incorrecto describir el $\angle ACB$ debido a que ese orden implica una trayectoria del punto *A* al punto *C* al punto *B*… ¡un ángulo distinto! En $\angle ABC$, el punto *B* en el cual convergen los lados se denomina **vértice** del ángulo. Como no hay confusión respecto al ángulo descrito, $\angle ABC$ también se conoce como $\angle B$ (utilizando sólo el vértice) o como $\angle 1$. Los puntos *D*, *E* y *F* en los cuales convergen los lados del $\triangle DEF$ (también llamados $\triangle DFE$, $\triangle EFD$, etcétera) se denominan *vértices* (plural de *vértice*) del triángulo. De manera similar, *W*, *X*, *Y* y *Z* son los vértices del rectángulo.

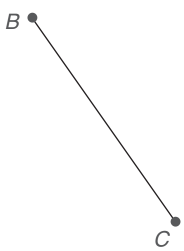


Figura 1.11

Un **segmento de recta** es una parte de una recta y consiste en dos puntos distintos en la recta y todos los puntos entre ellos. (Consulte la figura 1.11.) Utilizando símbolos, el segmento de recta se indica mediante $\overline{BC}$; observe que $\overline{BC}$ es un conjunto de puntos pero no es un número. Se utiliza *BC* (omitiendo el símbolo de segmento) para indicar la *longitud* de este segmento de recta; así pues, *BC* es un número. Los lados de un triángulo o rectángulo son segmentos de recta. Los vértices de un rectángulo se nombran en el orden que trazan sus lados de segmentos de recta ordenados.

EJEMPLO 1

¿Puede nombrarse el rectángulo en la figura 1.10(c) como a) *XYZW*? b) *WYXZ*?

Solución

a) Sí, ya que los puntos tomados en este orden trazan la figura.
b) No; por ejemplo, $\overline{WY}$ no es un lado del rectángulo. ■

Descubra

Al convertir unidades inglesas al sistema métrico sabemos que 1 pulg ≈ 2.54 cm. ¿Cuál es el equivalente en cm de 3.7 pulgadas?

RESPUESTA

9.4 cm

MEDICIÓN DE SEGMENTOS DE RECTA

El instrumento que se emplea para medir un segmento de recta es un borde recto graduado como una *regla*, una *yarda* o un *metro*. En general, el “punto 0” de la regla se coloca en un extremo del segmento de recta y se localiza la longitud numérica igual al número en el otro extremo. El segmento de recta RS ($\overline{RS}$ en símbolos) en la figura 1.12 mide 5 centímetros. Puesto que la longitud de $\overline{RS}$ se expresa como RS (sin la barra), se escribe $RS = 5$ cm.

Debido a que los dispositivos de medición fabricados como la regla, la yarda o el metro pueden no ser perfectos o se pueden leer de forma errónea, hay un margen de error cada vez que se utilizan. En la figura 1.12, por ejemplo, RS en realidad puede medir 5.02 cm (que podría estar redondeado de 5.023 cm, etcétera). Las mediciones son aproximadas, no perfectas.

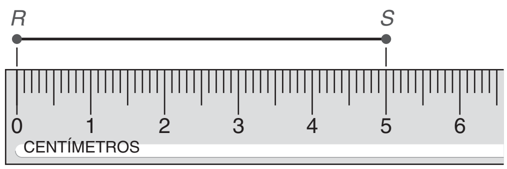


Figura 1.12

En el ejemplo 2, una regla (no dibujada a escala) se muestra en la figura 1.13. En el dibujo, la distancia entre marcas consecutivas en la regla corresponde a 1 pulgada. La medida de un segmento de recta se conoce como *medida lineal*.

EJEMPLO 2

En el rectángulo $ABCD$ de la figura 1.13, los segmentos de recta $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que se muestran son las diagonales del rectángulo. ¿Cómo son las longitudes de las diagonales comparadas entre sí?

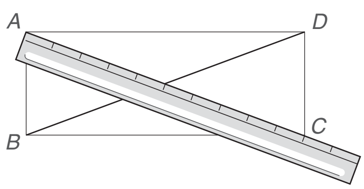


Figura 1.13

Solución Como sugiere la intuición, las longitudes de las diagonales son las mismas. Tal como se muestra, $AC = 10''$ y $BD = 10''$.

NOTA: En medida lineal, $10''$ indica 10 pulgadas y $10'$ indica 10 pies. ■

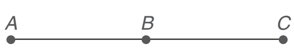


Figura 1.14

En la figura 1.14 el punto B se encuentra entre A y C en $\overline{AC}$. Si $AB = BC$, entonces B es el **punto medio** de $\overline{AC}$. Cuando $AB = BC$, las figuras geométricas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se dice que son **congruentes**. Las longitudes numéricas pueden ser iguales, pero los segmentos de recta reales (figuras geométricas) son congruentes. El símbolo para la congruencia es $\cong$; por tanto, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ si B es el punto medio de $\overline{AC}$. En el ejemplo 3 se enfatiza la relación entre $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ cuando B se encuentra entre A y C.

EJEMPLO 3

GEE
Ejercicios 1-8

En la figura 1.15, las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son $AB = 4$ y $BC = 8$. ¿Cuál es AC, la longitud de $\overline{AC}$?

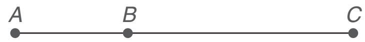


Figura 1.15

Solución Como sugiere la intuición, la longitud de $\overline{AC}$ es igual a $AB + BC$. Por tanto, $AC = 4 + 8 = 12$. ■

MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Si bien en la sección 1.4 se define un ángulo de manera formal, ahora se considerará de modo intuitivo.

La medida de un ángulo no depende de las longitudes de sus lados, sino de la cantidad de apertura entre sus lados. En la figura 1.16, las flechas en los lados de los ángulos sugieren que los lados se extienden infinitamente.

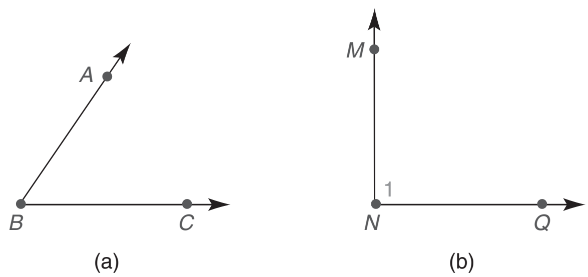


Figura 1.16

El instrumento que se muestra en la figura 1.17 (y que se utiliza en la medición de ángulos) es un **transportador**. Por ejemplo, la medida del $\angle RST$ se expresaría escribiendo $\angle RST = 50°$; este enunciado se lee, "la medida del $\angle RST$ es 50 grados". Al medir los ángulos en la figura 1.16 con un transportador, se determina que $m\angle B = 55°$ y $m\angle 1 = 90°$. Si el símbolo de grado se omite, se entiende que la medida está en grados; así pues $m\angle 1 = 90$.

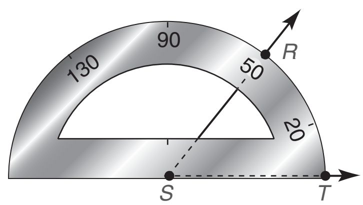


Figura 1.17

En la práctica, con el transportador que se ilustra se medirá un ángulo que es mayor que 0° pero menor o igual a 180°. Para medir un ángulo con transportador:

1. Se coloca la marca del transportador en el punto donde convergen los lados del ángulo (el vértice del ángulo). Consulte el punto S en la figura 1.18.
2. Se coloca el borde del transportador a lo largo de un lado del ángulo de manera que en la escala se lea "0". Vea el punto T en la figura 1.18 donde se utiliza "0" en la escala externa.
3. Utilizando la misma escala (externa), el tamaño del ángulo se lee mencionando la medida en grados que corresponda al segundo lado del ángulo.

Advertencia

Muchos transportadores tienen escalas dobles, como se muestra en la figura 1.18.

EJEMPLO 4

Para la figura 1.18, encuentre la medida del $\angle RST$.

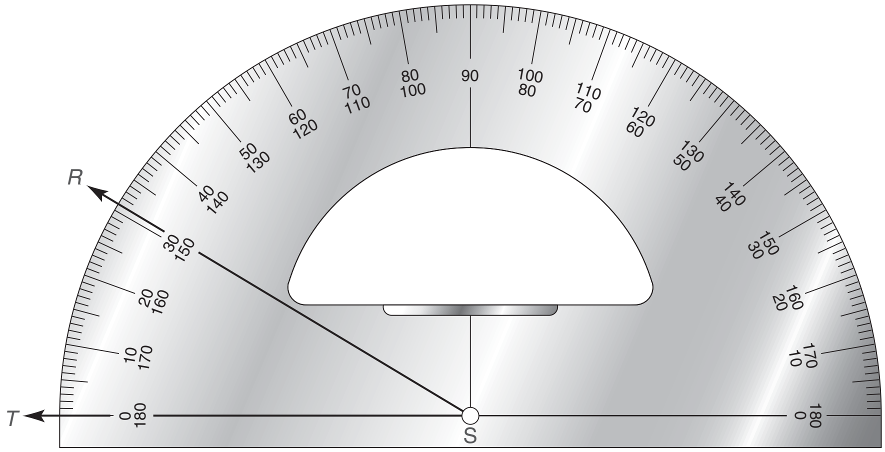


Figura 1.18

Solución Utilizando el transportador se encuentra que la medida del ángulo *RST* es 31°. (En símbolos, $m\angle RST = 31°$ o $m\angle RST = 31$.) ■

En algunos transportadores se muestran todos los 360° y se utilizan para medir un ángulo cuya medida es mayor que 180°; este tipo de ángulo se conoce como *ángulo reflejo*.

Al igual que con una regla, la medición con un transportador no será perfecta.

Las rectas en la hoja de una libreta son *paralelas*. De manera informal, las rectas **paralelas** se encuentran en la misma página y no se cruzan entre sí incluso si se extienden de manera indefinida. Se dice que las rectas ℓ y m en la figura 1.19(a) son paralelas; observe que aquí se utilizó una letra minúscula para nombrar una recta. Se dice que los segmentos de recta son paralelos si son partes de rectas paralelas; si $\overleftrightarrow{RS}$ es paralela a $\overleftrightarrow{MN}$, entonces $\overline{RS}$ es paralela a $\overline{MN}$ en la figura 1.19(b).

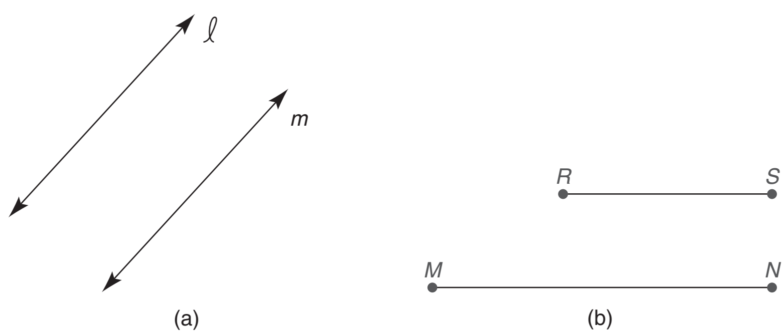


Figura 1.19

Para $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{6, 8, 10\}$ no hay elementos comunes; por esta razón, se dice que la intersección de A y B es el **conjunto vacío** (su símbolo es $\emptyset$). Al igual que $A \cap B = \emptyset$, las rectas paralelas en la figura 1.19(a) se describen por $\ell \cap m = \emptyset$.

EJEMPLO 5

En la figura 1.20, los lados de los ángulos ABC y DEF son paralelos ($\overline{AB}$ a $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ a $\overline{EF}$). Utilice un transportador para decidir si estos ángulos tienen medidas iguales.

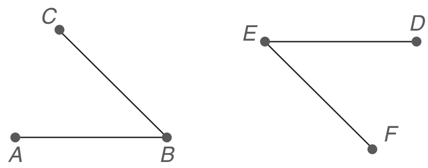


Figura 1.20

Solución Los ángulos tienen medidas iguales. Ambos miden 44°. ■

Se dice que dos ángulos con medidas iguales son *congruentes*. En la figura 1.20, se observa que $\angle ABC \cong \angle DEF$. En la figura 1.21, $\angle ABC \cong \angle CBD$.

En la figura 1.21, el ángulo ABD se separó en dos ángulos menores ABC y CBD; si los dos ángulos menores son congruentes (tienen medidas iguales), entonces el ángulo ABD se *bisecó*. En general, la palabra **bisecar** significa separar en dos partes que miden lo mismo.

Cualquier ángulo con una medida de 180° se denomina **ángulo llano**, un ángulo cuyos lados están en direcciones opuestas. Vea el ángulo RST en la figura 1.22(a). Cuando un ángulo llano se biseca, como se muestra en la figura 1.22(b), los dos ángulos que se forman son **ángulos rectos** (cada uno mide 90°).

Cuando dos rectas tienen un punto en común, como en la figura 1.23, se dice que se **intersecan**. Cuando dos rectas se intersecan y forman ángulos adyacentes congruentes, se dice que son **perpendiculares**.

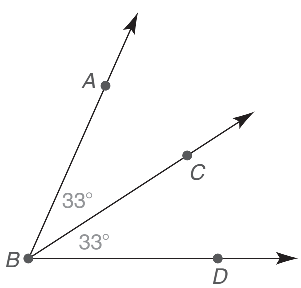


Figura 1.21

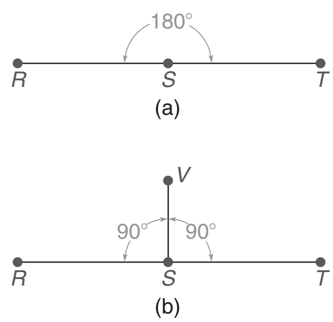


Figura 1.22

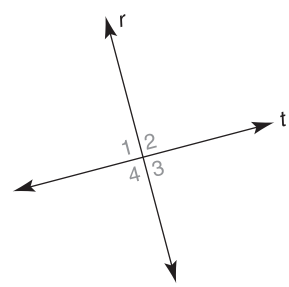


Figura 1.23

EJEMPLO 6

En la figura 1.23 suponga que las rectas r y t son perpendiculares. ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos formados?

Ejercicios 9-13

Solución Cada uno de los ángulos marcados (numerados 1, 2, 3 y 4) es el resultado de bisecar un ángulo llano, por lo que cada ángulo es un ángulo rt y mide 90°. ■

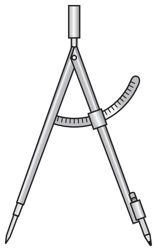


Figura 1.24

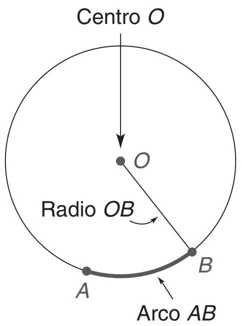


Figura 1.25

CONSTRUCCIONES

Otra herramienta que se utiliza en la geometría es el **compás**. Este instrumento, que se ilustra en la figura 1.24, se emplea para construir círculos y partes de círculos conocidas como *arcos*. El compás y el círculo se estudian en los párrafos siguientes.

Los antiguos griegos insistían en que sólo se utilizaran dos herramientas (un compás y una regla) en las **construcciones** geométricas, las cuales eran dibujos idealizados suponiendo la perfección en el uso de dichas herramientas. El compás se utilizó para crear círculos "perfectos" y para marcar segmentos de "igual" longitud. La regla se podría emplear para pasar una recta por dos puntos designados.

Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos en un plano que se encuentran a una distancia dada desde un punto particular (conocido como "centro" del círculo). La parte de un círculo entre cualesquiera dos de sus puntos se conoce como **arco**. Cualquier segmento de recta que une el centro con un punto es un **radio** del círculo. Vea la figura 1.25.

La construcción 1 siguiente es muy básica y depende sólo del uso de arcos con la misma longitud del radio para construir segmentos de rectas de la misma longitud. Los arcos se crearon utilizando un compás. La construcción 2 es más difícil de realizar y explicar, por lo cual su explicación se abordará en un capítulo posterior (vea la sección 3.4).

Construcción 1 *Construir un segmento congruente para un segmento dado.*

DADO: $\overline{AB}$ en la figura 1.26(a).

CONSTRUYA: $\overline{CD}$ en la recta m de modo que $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ (o $CD = AB$).

CONSTRUCCIÓN: Con su compás abierto a la longitud de $\overline{AB}$, coloque el punto estacionario del compás en C y marque una longitud igual a AB en el punto D, como se muestra en la figura 1.26(b). Entonces $CD = AB$.

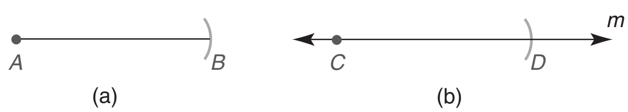


Figura 1.26

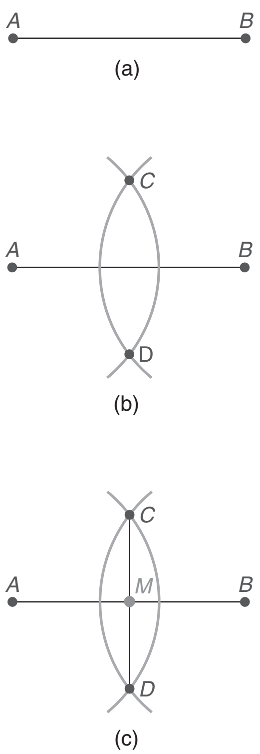


Figura 1.27

La construcción siguiente se muestra paso a paso en la figura 1.27. La intuición sugiere que el punto M en la figura 1.27(c) es el punto medio de $\overline{AB}$.

Construcción 2 *Construir el punto medio M de un segmento de recta dado AB.*

DADO: $\overline{AB}$ en la figura 1.27(a).

CONSTRUYA: M en $\overline{AB}$ de modo que $AM = MB$.

CONSTRUCCIÓN: Figura 1.27(a): abra su compás a una longitud mayor que la mitad de $\overline{AB}$.

Figura 1.27(b): utilizando A como el centro del arco, marque un arco que se extienda arriba y abajo del segmento AB. Con B como el centro y manteniendo la misma longitud del radio, marque un arco que se extienda arriba y abajo de $\overline{AB}$ de manera que se determinen dos puntos (C y D) donde se cruzan los arcos.

Figura 1.27(c): ahora trace $\overline{CD}$. El punto donde $\overline{CD}$ cruza $\overline{AB}$ es el punto medio M.

GEE

Ejercicios 14-17

EJEMPLO 7

En la figura 1.28, M es el punto medio de $\overline{AB}$.

a) Encuentre AM si $AB = 15$.
b) Encuentre AB si $AM = 4.3$
c) Encuentre AB si $AM = 2x + 1$.

Figura 1.28

Solución

a) AM es la mitad de AB, por tanto $AM = 7\frac{1}{2}$.
b) AB es el doble de AM, por tanto $AB = 2(4.3)$ o $AB = 8.6$.
c) AB es el doble de AM, por tanto $AB = 2(2x + 1)$ o $AB = 4x + 2$.

La técnica del álgebra que se utilizó en el ejemplo 8 y que también se necesita para los ejercicios 47 y 48 de esta sección depende de las propiedades siguientes de la adición y sustracción.

Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

En palabras: Iguales sumados a iguales da sumas iguales.

Ilustración: Puesto que $0.5 = \frac{5}{10}$ y $0.2 = \frac{2}{10}$, se deduce que

$0.5 + 0.2 = \frac{5}{10} + \frac{2}{10}$; es decir, $0.7 = \frac{7}{10}$.

Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a - c = b - d$.

En palabras: Iguales restados de iguales da diferencias iguales.

Ilustración: Puesto que $0.5 = \frac{5}{10}$ y $0.2 = \frac{2}{10}$, se deduce que

$0.5 - 0.2 = \frac{5}{10} - \frac{2}{10}$; es decir, $0.3 = \frac{3}{10}$.

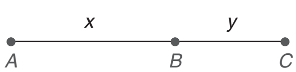


Figura 1.29

EJEMPLO 8

En la figura 1.29, el punto B se encuentra en $\overline{AC}$ entre A y C. Si $AC = 10$ y AB es 2 unidades mayor que BC, encuentre la longitud x de $\overline{AB}$ y la longitud y de $\overline{BC}$.

Solución

Puesto que $AB + BC = AC$, se tiene que $x + y = 10$.
Puesto que $AB – BC = 2$, se tiene que $x – y = 2$.
Sumando los lados izquierdo y derecho de estas ecuaciones se tiene

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 10 \\ x - y & = & 2 \\ \hline 2x & = & 12 \end{array} \qquad \text{por tanto } x = 6.$$

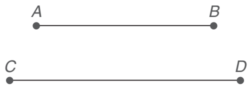
Si $x = 6$, entonces $x + y = 10$ se convierte en $6 + y = 10$ y $y = 4$.

Ejercicios 18, 19

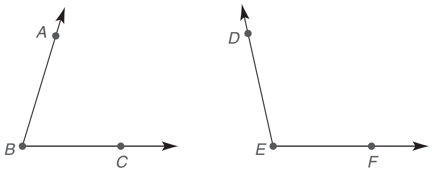
Así pues, $AB = 6$ y $BC = 4$.

Ejercicios 1.2

1. Si el segmento de recta *AB* y el segmento de recta *CD* se trazan a escala, ¿qué le dice su intuición acerca de las longitudes de estos segmentos?



2. Si los ángulos *ABC* y *DEF* se midieron con un transportador, ¿qué le dice su intuición acerca de las medidas en grados de estos ángulos?



3. ¿Cuántos puntos extremos tiene un segmento de recta? ¿Cuántos puntos medios tiene un segmento de recta?

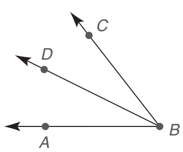
4. ¿Parecen colineales los puntos *A*, *B* y *C*?

Ejercicios 4-6

5. ¿Cuántas rectas se pueden trazar que contengan los dos puntos *A* y *B*? ¿Cuántas rectas se pueden trazar que contengan los puntos *A*, *B* y *C*?

6. Considere los puntos no colineales *A*, *B* y *C*. Si cada recta debe contener dos de los puntos, ¿cuál es el número de rectas que se determinan por estos puntos?

7. Mencione todos los ángulos en la figura.

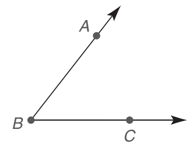


8. ¿Cuáles de las medidas siguientes puede tener un ángulo? 23°, 90°, 200°, 110.5°, −15°

9. ¿Deben ser colineales dos puntos diferentes? ¿Deben ser colineales tres o más puntos? ¿Pueden ser colineales tres o más puntos?

10. ¿Cuál(es) símbolo(s) expresa(n) el orden en el que los puntos *A*, *B* y *X* se encuentran en la recta dada, *A-X-B* o *A-B-X*?

11. ¿Cuáles símbolos nombran correctamente el ángulo que se ilustra? $\angle ABC$, $\angle ACB$, $\angle CBA$



12. Un triángulo se llama $\triangle ABC$. ¿También se le puede nombrar $\triangle ACB$? ¿Puede llamarse $\triangle BAC$?

13. Considere el rectángulo *MNPQ*. ¿También se le puede llamar rectángulo *PQMN*? ¿Se puede llamar rectángulo *MNQP*?

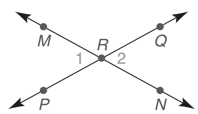
14. Suponga que $\angle ABC$ y $\angle DEF$ tienen la misma medida. ¿Qué enunciados están expresados de manera correcta?

a) $m\angle ABC = m\angle DEF$ b) $\angle ABC = \angle DEF$
c) $m\angle ABC \cong m\angle DEF$ d) $\angle ABC \cong \angle DEF$

15. Suponga que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tienen la misma longitud. ¿Cuáles enunciados están expresados de manera correcta?

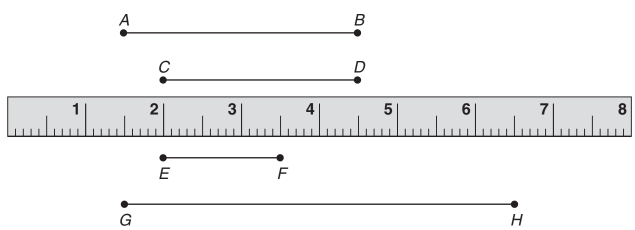
a) $AB = CD$ b) $\overline{AB} = \overline{CD}$
c) $AB \cong CD$ d) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

16. Cuando dos rectas se cruzan (intersecan), tienen exactamente un punto en común. En el dibujo, ¿cuál es el punto de intersección? ¿Cómo se comparan entre sí las medidas de $\angle 1$ y $\angle 2$?



17. Juzgando con base en la regla que se muestra (no a escala), estime la medida de cada segmento de recta.

a) *AB*   b) *CD*



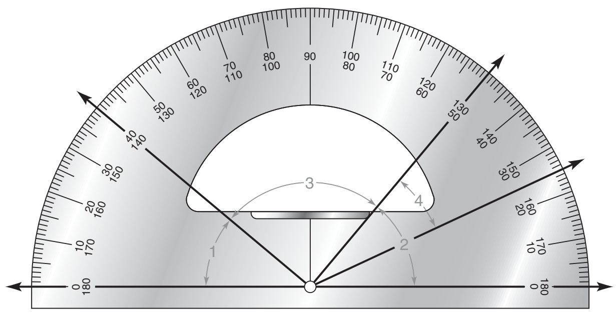
Ejercicios 17, 18

18. Juzgando con base en la regla estime la medida de cada segmento de recta.

a) *EF*   b) *GH*

19. Juzgando con base en el transportador que se ilustra, estime la medida de cada ángulo hasta el múltiplo más cercano de 5° (por ejemplo, 20°, 25°, 30°, etcétera).

a) m∠1 b) m∠2

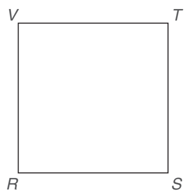


Ejercicios 19, 20

20. Juzgando con base en el transportador estime la medida de cada ángulo hasta el múltiplo más cercano de 5° (por ejemplo, 20°, 25°, 30°, etcétera).

a) m∠3 b) m∠4

21. Considere el cuadrado a la derecha, *RSTV*. Tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados con la misma longitud. ¿Cómo están relacionados los lados $\overline{RS}$ y $\overline{ST}$? ¿Cómo están relacionados los lados $\overline{RS}$ y $\overline{VT}$?



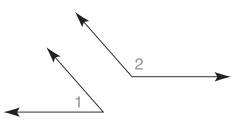
Ejercicios 21, 22

22. El cuadrado *RSTV* tiene diagonales $\overline{RT}$ y $\overline{SV}$ (no se muestran). Si las diagonales están trazadas, ¿cómo son sus longitudes comparadas entre sí? ¿Resultan perpendiculares las diagonales de un cuadrado?

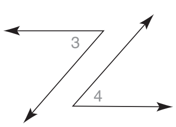
23. Utilice un compás para trazar un círculo. Trace un radio, un segmento de recta que conecte el centro con un punto en el círculo. Mida la longitud del radio. Trace otros radios y encuentre sus longitudes. ¿Cómo son las longitudes de los radios comparadas entre sí?

24. Emplee un compás para trazar un círculo de 1 pulgada de radio. Trace una cuerda, un segmento de recta que una dos puntos en el círculo. Trace otras cuerdas y mida sus longitudes. ¿Cuál es la longitud máxima posible de una cuerda en este círculo?

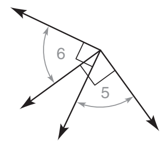
25. Los lados del par de ángulos son paralelos. ¿Son congruentes ∠1 y ∠2?



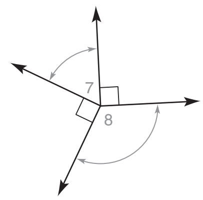
26. Los lados del par de ángulos son paralelos. ¿Son congruentes ∠3 y ∠4?



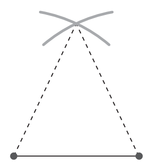
27. Los lados del par de ángulos son perpendiculares. ¿Son congruentes ∠5 y ∠6?



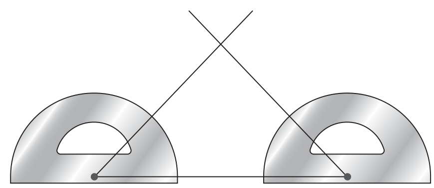
28. Los lados del par de ángulos son perpendiculares. ¿Son congruentes ∠7 y ∠8?



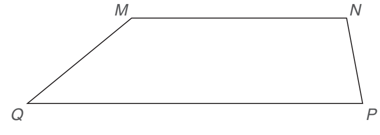
29. Sobre una hoja de papel utilice su compás para construir un triángulo que tenga dos lados con la misma longitud. Recorte el triángulo y dóblelo a la mitad de manera que los lados congruentes coincidan (uno sobre el otro). ¿Qué concluye acerca de los dos ángulos del triángulo?



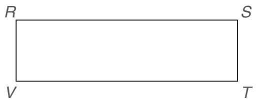
30. Sobre una hoja de papel utilice su transportador para trazar un triángulo que tenga dos ángulos con la misma medida. Recorte el triángulo y dóblelo a la mitad, de manera que coincidan los ángulos de igual medida (uno sobre el otro). ¿Qué concluye acerca de los dos lados del triángulo?



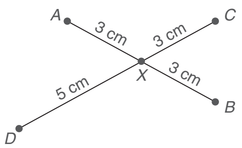
31. Un trapezoide es una figura de cuatro lados que contiene un par de lados paralelos. ¿Cuáles lados del trapezoide *MNPQ* resultan ser paralelos?



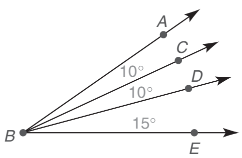
32. En el rectángulo ilustrado, ¿qué concluye acerca de las longitudes de cada par de lados opuestos?



33. Un segmento de recta está bisecado si sus dos partes tienen la misma longitud. ¿Cuál segmento de recta, $\overline{AB}$ o $\overline{CD}$, está bisecado en el punto X?



34. Un ángulo está bisecado si sus dos partes tienen la misma medida. Utilice tres letras para nombrar el ángulo que está bisecado.



En los ejercicios 35 al 38, donde A-B-C en $\overline{AC}$, se deduce que $AB + BC = AC$.

Ejercicios 35-38

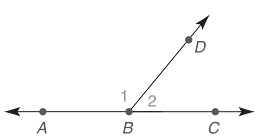
35. Encuentre AC si $AB = 9$ y $BC = 13$.

36. Encuentre AB si $AC = 25$ y $BC = 11$.

37. Encuentre x si $AB = x$, $BC = x + 3$ y $AC = 21$.

38. Encuentre una expresión para AC (la longitud de $\overline{AC}$) si $AB = x$ y $BC = y$.

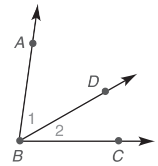
39. El $\angle ABC$ es un ángulo llano. Utilizando su transportador, puede demostrar que $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$. Encuentre $m\angle 1$ si $m\angle 2 = 56°$.



Ejercicios 39, 40

40. Encuentre $m\angle 1$ si $m\angle 1 = 2x$ y $m\angle 2 = x$.
(SUGERENCIA: Consulte el ejercicio 39.)

En los ejercicios 41 al 44, $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle ABC$.



Ejercicios 41-44

41. Encuentre $m\angle ABC$ si $m\angle 1 = 32°$ y $m\angle 2 = 39°$.

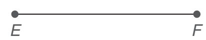
42. Encuentre $m\angle 1$ si $m\angle ABC = 68°$ y $m\angle 1 = m\angle 2$.

43. Encuentre x si $m\angle 1 = x$, $m\angle 2 = 2x + 3$ y $m\angle ABC = 72°$.

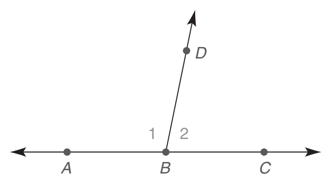
44. Determine una expresión para $m\angle ABC$ si $m\angle 1 = x$ y $m\angle 2 = y$.

45. Se utilizó un compás para marcar tres segmentos congruentes, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$. Por tanto, $\overline{AD}$ se ha trisecado en los puntos B y C. Si $AD = 32.7$, ¿cuánto mide $\overline{AB}$?

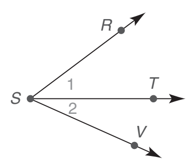
46. Utilice su compás y su regla para bisecar $\overline{EF}$.



***47.** En la figura, $m\angle 1 = x$ y $m\angle 2 = y$. Si $x - y = 24°$, encuentre x y y.
(SUGERENCIA: $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$.)



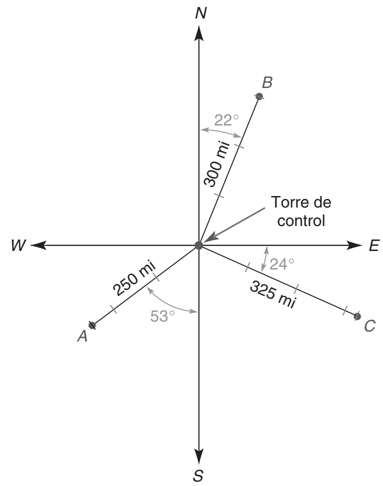
***48.** En el dibujo, $m\angle 1 = x$ y $m\angle 2 = y$. Si $m\angle RSV = 67°$ y $x - y = 17°$, encuentre x y y.
(SUGERENCIA: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle RSV$.)



Para los ejercicios 49 y 50 utilice la información siguiente. Respecto a su punto de salida o a algún otro punto de referencia, el ángulo que se emplea para localizar la posición de un barco o de un avión se denomina rumbo. El rumbo también se puede utilizar para describir la dirección en la cual el avión o el barco se mueven. Al emplear un ángulo entre 0 y 90°, un rumbo se mide desde la línea Norte-Sur hacia el Este o el Oeste. En el diagrama el avión A (que se encuentra a 250 millas de la torre de control del aeropuerto O'Hare de Chicago) tiene un rumbo S 53° W.

49. Encuentre el rumbo del avión *B* respecto a la torre de control.

50. Encuentre el rumbo del avión *C* respecto a la torre de control.



Ejercicios 49, 50

1.3 Primeras definiciones y postulados

▶▶▶ **CONCEPTOS CLAVE**

- Sistema matemático
- Axioma o postulado
- Teorema
- Postulado de la regla
- Distancia
- Postulado segmento-adición
- Punto medio de un segmento de recta
- Rayo
- Rayos opuestos
- Intersección de dos figuras geométricas
- Plano
- Puntos coplanares
- Espacio

UN SISTEMA MATEMÁTICO

Al igual que el álgebra, la rama de las matemáticas denominada geometría es un **sistema matemático.** Cada sistema tiene sus propios vocabulario y propiedades. En el estudio formal de un sistema matemático, iniciamos con los términos indefinidos. Con base en esta información se pueden definir términos adicionales. Una vez que la terminología está suficientemente desarrollada, se vuelven aparentes ciertas propiedades (características) del sistema. Estas propiedades se conocen como **axiomas** o **postulados** del sistema; de manera más general, esos enunciados se denominan **suposiciones**. Al haber desarrollado un vocabulario y aceptado ciertos postulados, muchos principios se deducen de forma lógica cuando se aplican métodos deductivos. Estos enunciados se pueden demostrar y se llaman **teoremas**. En el recuadro siguiente se resumen los componentes de un sistema matemático (en ocasiones llamado sistema lógico o sistema deductivo).

CUATRO PARTES DE UN SISTEMA MATEMÁTICO

1. Términos indefinidos **2.** Términos definidos	vocabulario
3. Axiomas o postulados **4.** Teoremas	principios

Descubra

Aunque en realidad no se pueden definir *recta* y *plano*, se pueden comparar mediante la siguiente analogía. Complete: Una __?__ es a una *línea recta* como un __?__ es a una llanura.

RESPUESTA

recta, plano

CARACTERÍSTICAS DE UNA BUENA DEFINICIÓN

Términos como *punto, recta* y *plano* se clasifican como indefinidos ya que no se ajustan a ningún conjunto o categoría que se haya determinado con anterioridad. Sin embargo, los términos que *están* definidos se deben describir con precisión. *Pero ¿qué es una buena definición?* Una buena definición es como una ecuación matemática escrita con palabras. Una buena definición debe tener cuatro características. Esto se ilustrará con un término que volverá a definirse más adelante.

DEFINICIÓN

Un **triángulo isósceles** es un triángulo que tiene dos lados congruentes.

En la definición observe que: (1) Se nombra el término que se está definiendo: *triángulo isósceles*. (2) El término que se está definiendo se coloca en una categoría mayor (un tipo de *triángulo*). (3) Se incluye la cualidad distinguible (que dos lados del triángulo son congruentes). (4) La *reversibilidad* de la definición se ilustra con estos enunciados:

"Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos lados congruentes."
"Si un triángulo tiene dos lados congruentes, entonces es un triángulo isósceles."

EN RESUMEN, UNA BUENA DEFINICIÓN TENDRÁ ESTAS CUALIDADES

1. Menciona el término que se está definiendo.
2. Coloca el término dentro de un conjunto o categoría.
3. Distingue el término definido de otros términos sin proporcionar hechos innecesarios.
4. Es reversible.

En muchos libros es común utilizar la frase "si y sólo si" al expresar la definición de un término. Por ejemplo, se podrían definir *ángulos congruentes* diciendo que dos ángulos son congruentes si y sólo si estos ángulos tienen medidas iguales. El enunciado "si y sólo si" tiene el significado dual siguiente:

"Si dos ángulos son congruentes, entonces tienen medidas iguales."
"Si dos ángulos tienen medidas iguales, entonces son congruentes."

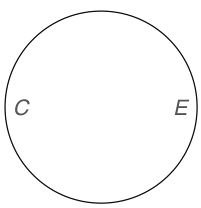


Figura 1.30

Cuando se representa con un diagrama de Venn esta definición puede relacionar el conjunto $C = \{\text{ángulos congruentes}\}$ con el conjunto $E = \{\text{ángulos con medidas iguales}\}$, como se muestra en la figura 1.30. Los conjuntos C y E son idénticos y se conocen como **conjuntos equivalentes**.

Una vez que se han descrito los términos indefinidos se convierten en los bloques estructurales para otra terminología. En este libro la definición de los términos primarios aparecen dentro de recuadros, en tanto que los términos relacionados suelen aparecer en negritas y se definen mediante enunciados. Considere la definición siguiente (vea la figura 1.31).

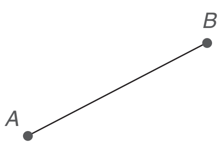


Figura 1.31

GÉE *Ejercicios 1-4*

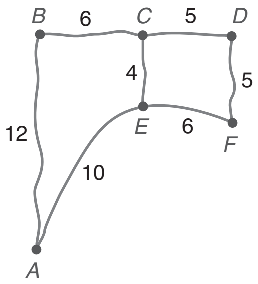
DEFINICIÓN

Un **segmento de recta** es la parte de una recta que consiste en dos puntos, conocidos como *puntos extremos,* y todos los puntos entre ellos.

Considerando esta definición, se observa que

1. El término que se está definiendo, *segmento de recta*, está claramente presente en la definición.
2. Un segmento de recta se define como parte de una recta (una categoría).
3. En la definición se distingue el segmento de recta como una parte específica de una recta.

Geometría en el mundo real



En el mapa de caminos se muestran las distancias de los recorridos en automóvil entre ciudades. Al viajar de la ciudad A a la D, ¿qué ruta recorre la menor distancia?
Solución *A* a *E*, *E* a *C*, *C* a *D*:
$10 + 4 + 5 = 19$

4. La definición es reversible.
 i) Un segmento de recta es la parte de una recta que está entre dos puntos e incluye a éstos.
 ii) La parte de una recta que está entre dos puntos e incluye a éstos es un segmento de recta.

POSTULADOS INICIALES

Recuerde que un postulado es un enunciado que se supone que es verdadero.

POSTULADO 1
A lo largo de dos puntos distintos hay exactamente una recta.

El postulado 1 en ocasiones se enuncia en la forma "dos puntos determinan una recta". Vea la figura 1.32, en donde los puntos C y D determinan exactamente una recta, que es la $\overleftrightarrow{CD}$. Por supuesto, el postulado 1 también implica la existencia de un segmento de recta único determinado por dos puntos distintos que se utilizan como puntos extremos. Recuerde la figura 1.31, en la cual los puntos A y B determinan $\overline{AB}$.

NOTA: En geometría los números de referencia empleados con postulados (como en el postulado 1) no necesitan memorizarse.

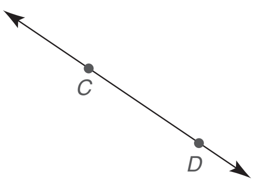


Figura 1.32

EJEMPLO 1

En la figura 1.33, ¿cuántas rectas distintas se pueden trazar a través

a) del punto A?
b) de los dos puntos A y B al mismo tiempo?
c) de todos los puntos A, B y C al mismo tiempo?

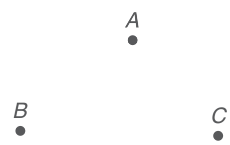
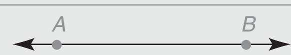


Figura 1.33

Solución
a) Un número infinito (innumerable).
b) Exactamente una.
c) Ninguna recta contiene los tres puntos. ■

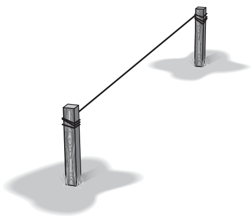
Recuerde de la sección 1.2 que el símbolo para el segmento de recta AB, llamado así por sus puntos extremos, es $\overline{AB}$. La omisión de la barra en $\overline{AB}$, como en AB, significa que se está considerando la *longitud* del segmento. Estos símbolos se resumen en la tabla 1.3.

TABLA 1.3

Símbolo	*Palabra para el símbolo*	*Figura geométrica*
$\overleftrightarrow{AB}$	Recta AB	
$\overline{AB}$	Segmento de recta AB	
AB	Longitud del segmento AB	Un número

Para medir la longitud de cualquier segmento de recta como el $\overline{AB}$, se utiliza una regla. Esta longitud se puede representar mediante AB o BA (el orden de A y B no es importante). Sin embargo, AB debe ser un número positivo.

Geometría en el mundo real



En la construcción, una cuerda une dos estacas. La recta determinada se describe en el postulado 1 de la página anterior.

POSTULADO 2 ▶ (Postulado de la regla)

La medida de cualquier segmento de recta es un número positivo único.

En este momento se desea fijar la atención en el término *único* y en el concepto general de unicidad. El postulado de la regla implica lo siguiente:

1. Existe una medida numérica para cada segmento de recta.
2. Sólo es permisible *una* medida.

¡Las características 1 y 2 son necesarias para la unicidad! Otras frases que pueden reemplazar el término *único* son

Una y sólo una

Exactamente una

Una y no más de una

Una afirmación más precisa que el enunciado que comúnmente escuchamos, “La distancia más corta entre dos puntos es una recta”, se encuentra en la siguiente definición.

DEFINICIÓN

La **distancia** entre dos puntos A y B es la longitud del segmento de recta $\overline{AB}$ que une los dos puntos.

Figura 1.34

Como se vio en la sección 1.2, existe una relación entre las longitudes de los segmentos de rectas determinados en la figura 1.34. Esta relación se enuncia en el tercer postulado. ¡Son el título y el significado del postulado lo que importa!

POSTULADO 3 ▶ (Postulado del segmento-adición)

Si X es un punto de $\overline{AB}$ y A-X-B, entonces $AX + XB = AB$.

Exploración tecnológica

Utilice software si dispone de él.

1. Trace el segmento de recta $\overline{XY}$.
2. Elija un punto P sobre $\overline{XY}$.
3. Mida $\overline{XP}$, $\overline{PY}$ y $\overline{XY}$.
4. Demuestre que $XP + PY = XY$.

EJEMPLO 2

En la figura 1.34, encuentre AB si

a) $AX = 7.32$ y $XB = 6.19$. b) $AX = 2x + 3$ y $XB = 3x - 7$.

Solución

a) $AB = 7.32 + 6.19$, por tanto $AB = 13.51$.
b) $AB = (2x + 3) + (3x - 7)$, por tanto $AB = 5x - 4$. ■

DEFINICIÓN

Los **segmentos** de recta congruentes ($\cong$) son dos segmentos de recta que tienen la misma longitud.

En general se dice que las figuras geométricas que se pueden hacer coincidir (que ajusten perfectamente una arriba de la otra) son **congruentes**. El símbolo $\cong$ es una combinación del símbolo ~, el cual significa que las figuras tienen la misma forma; e = que

Figura 1.35

significa que las partes correspondientes de las figuras tienen la misma medida. En la figura 1.35, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, pero $\overline{AB} \not\cong \overline{EF}$ (lo que significa que $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ no son congruentes). ¿Parece que $\overline{CD} \cong \overline{EF}$?

EJEMPLO 3

En el sistema de medida inglés, 1 pie = 12 pulgadas. Si $AB = 2.5$ pies y $CD = 2$ pies 6 pulgadas, ¿son congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$?

Solución Sí, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ya que 2.5 pies = 2 pies + 0.5 pies o 2 pies + 0.5(12 pulgadas) o 2 pies 6 pulgadas. ■

DEFINICIÓN

El **punto medio** de un segmento de recta es el punto que separa el segmento de recta en dos partes congruentes.

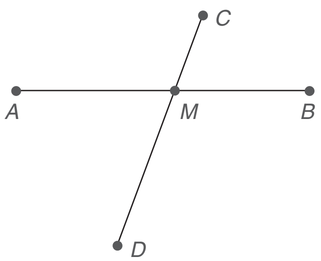


Figura 1.36

En la figura 1.36, si A, M y B son colineales y $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, entonces M es el **punto medio** de $\overline{AB}$. De manera equivalente, M es el punto medio de $\overline{AB}$ si $AM = MB$. Además, si $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, entonces $\overline{CD}$ se describe como un **bisector** de $\overline{AB}$.

Si M es el punto medio de $\overline{AB}$ en la figura 1.36 se pueden obtener estas conclusiones:

$$AM = MB \qquad MB = \tfrac{1}{2}(AB) \qquad AB = 2\,(MB)$$
$$AM = \tfrac{1}{2}(AB) \qquad AB = 2\,(AM)$$

Descubra

Suponga que M es el punto medio de $\overline{AB}$ en la figura 1.36. ¿Puede concluir también que M es el punto medio de $\overline{CD}$?

RESPUESTA

oN

EJEMPLO 4

DADO: M es el punto medio de $\overline{EF}$ (no se muestra). $EM = 3x + 9$ y $MF = x + 17$

ENCUENTRE: x y EM

Solución Como M es el punto medio de $\overline{EF}$, $EM = MF$. Entonces

$$\begin{aligned} 3x + 9 &= x + 17 \\ 2x + 9 &= 17 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Por sustitución, $EM = 3(4) + 9 = 12 + 9 = 21$. ■

En geometría, la palabra **unión** se utiliza para describir la asociación o combinación de dos figuras o conjuntos de puntos.

DEFINICIÓN

El **rayo** AB, denotado por $\overrightarrow{AB}$, es la unión de $\overline{AB}$ y todos los puntos X en $\overleftrightarrow{AB}$ de manera que B está entre A y X.

En la figura 1.37, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ no se muestran; observe que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ no son el mismo rayo.

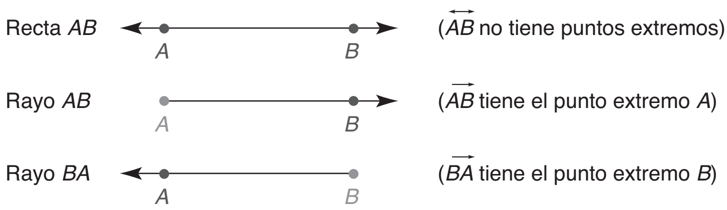


Figura 1.37

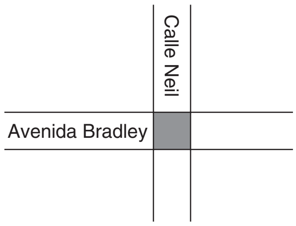


Figura 1.38

Los **rayos opuestos** son dos rayos con un punto extremo común; además, la unión de rayos opuestos es una línea recta. En la figura 1.39(a), $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son rayos opuestos.

La **intersección** de dos figuras geométricas es el conjunto de puntos que ambas figuras tienen en común. En la vida cotidiana la intersección de la Avenida Bradley y la Calle Neil es la parte de la calzada que los dos caminos tienen en común (figura 1.38).

POSTULADO 4

Si dos rectas se intersecan lo hacen en un punto.

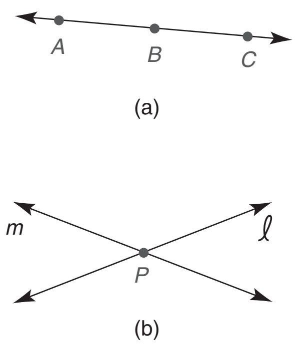


Figura 1.39

Cuando dos rectas comparten dos (o más) puntos, las rectas coinciden; en esta situación se dice que sólo hay una recta. En la figura 1.39(a), $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son las mismas que $\overleftrightarrow{AC}$. En la figura 1.39(b), las rectas ℓ y m se intersecan en el punto P.

DEFINICIÓN

Las **rectas paralelas** son rectas que están en el mismo plano pero no se intersecan.

En la figura 1.40, ℓ y n son paralelas; en símbolos $\ell \parallel n$ y $\ell \cap n = \emptyset$. Sin embargo, ℓ y m se intersecan y no son paralelas; por tanto $\ell \cap m = A$ y $\ell \nparallel m$.

GEE
Ejercicios 5-12

EJEMPLO 5

En la figura 1.40 $\ell \parallel n$. ¿Cuál es la intersección de

a) las rectas ℓ y m?
b) la recta ℓ y la recta n?

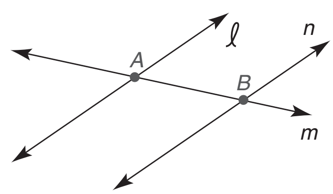


Figura 1.40

Solución

a) El punto A
b) Las rectas paralelas no se intersecan. ■

Otro término indefinido en la geometría es el **plano**. Un plano es bidimensional; es decir, tiene longitud infinita y ancho infinito pero no tiene espesor. Excepto por su tamaño limitado, una superficie plana como la superficie de una mesa se podría utilizar como ejemplo de un plano. Para nombrar un plano se puede emplear una letra mayúscula. Como un plano (al igual que una recta) es infinito, sólo se puede mostrar una parte del plano o los planos, como en la figura 1.41 de la página 27.

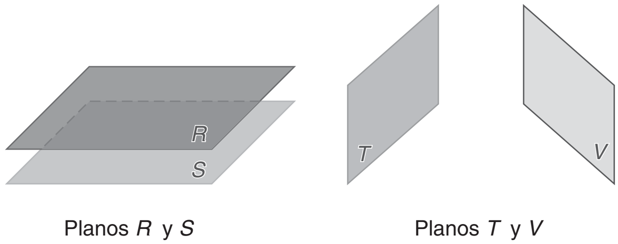


Figura 1.41

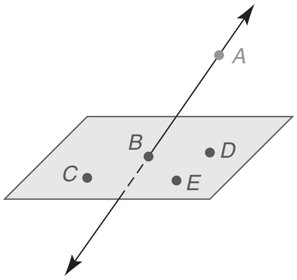


Figura 1.42

Un plano es bidimensional, consiste en un número infinito de puntos y contiene un número infinito de rectas. Dos puntos distintos pueden determinar (o "fijar") una recta; de igual forma, exactamente tres puntos no colineales determinan un plano. Al igual que los puntos colineales se encuentran en la misma recta, los **puntos coplanares** se encuentran en el mismo plano. En la figura 1.42 los puntos *B*, *C*, *D* y *E* son coplanares, en tanto que *A*, *B*, *C* y *D* no son coplanares.

En este libro los puntos que se muestran en las figuras se suponen coplanares a menos que se indique lo contrario. Por ejemplo, los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E* son coplanares en la figura 1.43(a), como lo son los puntos *F*, *G*, *H*, *J* y *K* en la figura 1.43(b).

Geometría en el mundo real

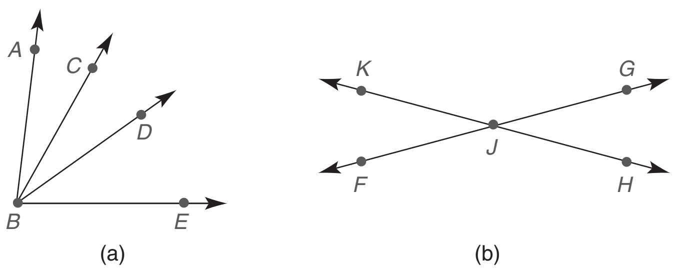


Figura 1.43

© Yuny Chaban /Shutterstock

El trípode ilustra el postulado 5 en que los tres puntos en la base permiten que la unidad permanezca nivelada.

POSTULADO 5

A través de tres puntos no colineales hay exactamente un plano.

Con base en el postulado 5 se puede observar por qué una mesa con tres patas permanece estable, pero una mesa con cuatro patas se "tambalearía" si éstas fuesen de longitud desigual.

El **espacio** es el conjunto de puntos posibles. Es tridimensional, con cualidades de longitud, ancho y profundidad. Cuando dos planos se intersecan en el espacio, su intersección es una recta. Una tarjeta de felicitación abierta sugiere esta relación, como se muestra en la figura 1.44(a). Esta noción da origen a nuestro postulado siguiente.

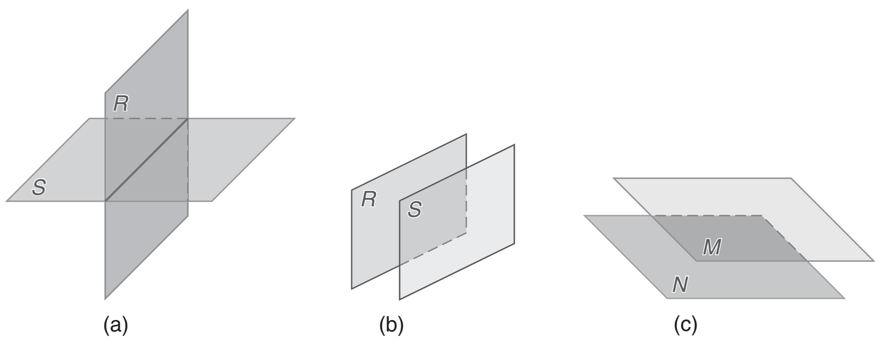


Figura 1.44

POSTULADO 6

Si dos planos distintos se intersecan, entonces su intersección es una recta.

La intersección de dos planos es infinita ya que es una recta. [Consulte la figura 1.44(a) en la página 27.] Si dos planos no se intersecan, entonces son **paralelos**. Los planos **verticales** paralelos R y S en la figura 1.44(b) pueden recordarle las paredes opuestas de su salón de clases. Los planos horizontales paralelos M y N en la figura 1.44(c) sugieren la relación entre el cielo raso y el suelo.

Imagine un plano y dos puntos en ese plano, digamos los puntos A y B. Ahora considere la recta que contiene los dos puntos y la relación de $\overleftrightarrow{AB}$ con el plano. Tal vez su conclusión pueda resumirse como sigue.

POSTULADO 7

Dados dos puntos distintos en un plano, la recta que contiene estos puntos también se encuentran en el plano.

GEE

Ejercicios 13-16

Debido a que la unicidad del punto medio de un segmento puede justificarse, al enunciado siguiente lo llamamos teorema. La "demostración" del teorema se encuentra en la sección 2.2.

TEOREMA 1.3.1

El punto medio de un segmento de recta es único.

Figura 1.45

Si M es el punto medio de $\overline{AB}$ en la figura 1.45, entonces ningún otro punto puede separar $\overline{AB}$ en dos partes congruentes. La demostración de este teorema se basa en el postulado de la regla. M es *el* punto que está ubicado $\frac{1}{2}(AB)$ unidades de A (y de B).

No es necesario memorizar el sistema de numeración utilizado para justificar el teorema 1.3.1. Sin embargo, este teorema se puede emplear en una referencia posterior. El sistema de numeración funciona como sigue:

1	3	1
CAPÍTULO	SECCIÓN	ORDEN
donde	donde	en que aparece
se encuentra	se encuentra	en la sección

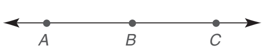
GEE

Ejercicios 17-20

Al final del libro se encuentra un resumen de los teoremas que presentamos en esta obra.

▶▶▶ Ejercicios 1.3

En los ejercicios 1 y 2 complete el enunciado.



Ejercicios 1, 2

1. $AB + BC =$ __?__
2. Si $AB = BC$, entonces B es el __?__ de $\overline{AC}$.

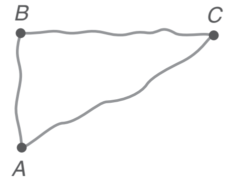
En los ejercicios 3 y 4 utilice el hecho de que 1 pie = 12 pulgadas.

3. Convierta 6.25 pies a una medida en pulgadas.
4. Convierta 52 pulgadas a una medida en pies y pulgadas.

En los ejercicios 5 y 6 utilice el hecho de que 1 metro ≈ 3.28 pies (medida aproximada).

5. Convierta $\frac{1}{2}$ metro en pies.
6. Convierta 16.4 pies en metros.

7. En la figura el camino de 15 millas de A a C se encuentra en proceso de construcción, por lo que se debe tomar una desviación de A a B de 5 millas y luego otra de B a C de 13 millas. ¿Cuánto más recorre por la "desviación" de A a C que el camino de A a C?



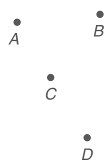
Ejercicios 7, 8

8. Una corredora de campo traviesa trota a una velocidad de 15 metros por segundo. Si corre 300 metros de A a B, 450 de B a C y luego 600 de C a A, ¿cuánto tiempo le tomará regresar al punto A?

(SUGERENCIA: Consulte la figura del ejercicio 7.)

En los ejercicios 9 al 28 utilice los dibujos según sea necesario para responder las preguntas siguientes.

9. Mencione tres puntos que parezcan ser
a) colineales. b) no colineales.



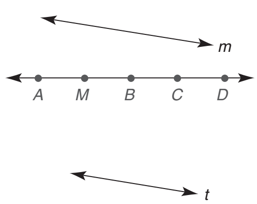
Ejercicios 9, 10

10. ¿Cuántas rectas se pueden trazar a través
a) del punto A?
b) de los puntos A y B?
c) de los puntos A, B y C?
d) de los puntos A, B y D?

11. Proporcione los significados de $\overleftrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$, CD y $\overline{CD}$.

12. Explique la diferencia, si la hay, entre
a) $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{DC}$.
b) $\overline{CD}$ y $\overline{DC}$.
c) CD y DC.
d) $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DC}$.

13. Nombre dos rectas que parezcan ser
a) paralelas. b) no paralelas.



Ejercicios 13-17

14. Clasifique como verdadero o falso:
a) $AB + BC = AD$
b) $AD - CD = AB$
c) $AD - CD = AC$
d) $AB + BC + CD = AD$
e) $AB = BC$

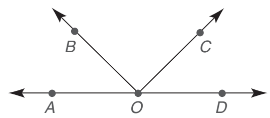
15. *Dado:* M es el punto medio de $\overline{AB}$
$AM = 2x + 1$ y $MB = 3x - 2$
Encuentre: x y AM

16. *Dado:* M es el punto medio de $\overline{AB}$
$AM = 2(x + 1)$ y $MB = 3(x - 2)$
Encuentre: x y AB

17. *Dado:* $AM = 2x + 1$, $MB = 3x + 2$ y $AB = 6x - 4$
Encuentre: x y AB

18. ¿Puede un segmento bisecar una recta? ¿Puede un segmento bisecar un segmento? ¿Y a una recta?

19. En la figura, mencione
a) dos rayos opuestos.
b) dos rayos que no sean opuestos.



20. Suponga que (a) el punto C se encuentra en el plano X, y (b) el punto D se encuentra en el plano X. ¿Qué concluye respecto a $\overleftrightarrow{CD}$?

21. Haga un bosquejo de
a) dos rectas intersecantes que sean perpendiculares.
b) dos rectas intersecantes que *no* sean perpendiculares.
c) dos rectas paralelas.

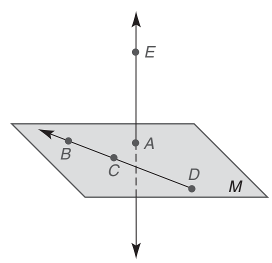
22. Haga un bosquejo de
a) dos planos intersecantes.
b) dos planos paralelos.
c) dos planos paralelos intersecados por un tercer plano que no sea paralelo al primer plano ni al segundo plano.

23. Suponga que (a) los planos M y N se intersecan, (b) el punto A se encuentra en los dos planos M y N, y (c) el punto B se encuentra en los dos planos M y N. ¿Qué concluye respecto a $\overleftrightarrow{AB}$?

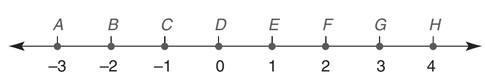
24. Suponga que (a) los puntos A, B y C son colineales y (b) $AB > AC$. ¿Qué punto concluye usted que *no puede* encontrarse entre los otros dos?

25. Suponga que los puntos A, R y V son colineales. Si $AR = 7$ y $RV = 5$, entonces ¿cuál punto no es posible que se encuentre entre los otros dos?

26. Los puntos A, B, C y D son coplanares; B, C y D son colineales; el punto E no está en el plano M. ¿Cuántos planos contienen
a) los puntos A, B y C?
b) los puntos B, C y D?
c) los puntos A, B, C y D?
d) los puntos A, B, C y E?



27. Utilizando la recta numérica dada, mencione el punto que
a) es el punto medio de $\overline{AE}$.
b) es el punto extremo de un segmento de longitud 4, si el otro punto extremo es el punto G.
c) tiene una distancia desde B igual a $3(AC)$.



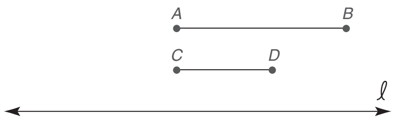
Ejercicios 27, 28

28. Considere la figura para el ejercicio 27. Dado que B es el punto medio de $\overline{AC}$ y C es el punto medio de $\overline{BD}$, ¿qué concluye acerca de las longitudes de

a) $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$? c) $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$?
b) $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$?

En los ejercicios 29 al 32 utilice sólo un compás y una regla para completar cada construcción.

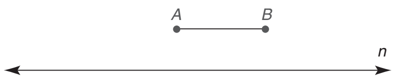
29. *Dado:* $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ $(AB > CD)$
Construya: $\overline{MN}$ en la recta ℓ de modo que $MN = AB + CD$



Ejercicios 29, 30

30. *Dado:* $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ $(AB > CD)$
Construya: $\overline{EF}$ de modo que $EF = AB - CD$

31. *Dado:* $\overline{AB}$ como se muestra en la figura
Construya: $\overline{PQ}$ en la recta n de modo que $PQ = 3(AB)$



Ejercicios 31, 32

32. *Dado:* $\overline{AB}$ como se muestra en la figura
Construya: $\overline{TV}$ en la recta n de modo que $TV = \frac{1}{2}(AB)$

33. ¿Puede utilizar la construcción para el punto medio de un segmento para dividir un segmento de recta en

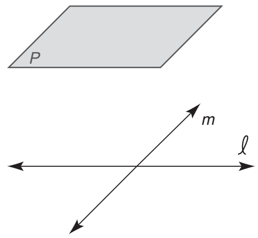
a) tres partes congruentes? c) seis partes congruentes?
b) cuatro partes congruentes d) ocho partes congruentes?

34. Generalice sus descubrimientos en el ejercicio 33.

35. Considere los puntos A, B, C y D, de los cuales tres no son colineales. Utilizando dos puntos a la vez (como A y B), ¿cuántas rectas se determinan por estos puntos?

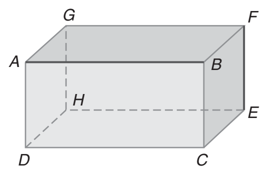
36. Considere los puntos no coplanares A, B, C y D. Utilizando tres puntos a la vez (como A, B y C), ¿cuántos planos se determinan por estos puntos?

37. La recta ℓ es paralela al plano P (es decir, no interseca P incluso extendida). La recta m interseca la recta ℓ. ¿Qué concluye acerca de m y P?

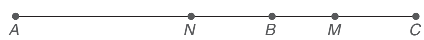


38. Se dice que $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ son rectas **oblicuas** debido a que no se intersecan ni son paralelas. ¿Cuántos planos se determinan por

a) las rectas paralelas AB y DC?
b) las rectas intersecantes AB y BC?
c) las rectas AB y EF?
d) las rectas AB, BC y DC?
e) los puntos A, B y F?
f) los puntos A, C y H?
g) los puntos A, C, F y H?



***39.** Sean $AB = a$ y $BC = b$. El punto M es el punto medio de $\overline{BC}$. Si $AN = \frac{2}{3}(AB)$, encuentre la longitud de $\overline{NM}$ en términos de a y b.



1.4 Los ángulos y sus relaciones

CONCEPTOS CLAVE

Ángulo: lados del ángulo, vértice del ángulo
Postulado del transportador
Ángulos agudo, recto, obtuso, llano y reflejo
Postulado ángulo-adición
Ángulos adyacentes
Ángulos congruentes
Bisector de un ángulo
Ángulos complementarios
Ángulos suplementarios
Ángulos verticales

En esta sección se introduce el lenguaje de los ángulos. Recuerde, de las secciones 1.1 y 1.3, que la palabra *unión* significa que dos conjuntos o figuras están unidas.

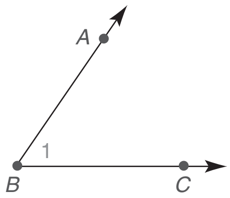


Figura 1.46

DEFINICIÓN

Un **ángulo** es la unión de dos rayos que comparten un punto extremo común.

En la figura 1.46, el ángulo está simbolizado por $\angle ABC$ o $\angle CBA$. Los rayos BA y BC se conocen como los **lados** del ángulo. El punto extremo común de estos rayos, B, se conoce como el **vértice** del ángulo. Cuando se utilizan tres letras para nombrar un ángulo, el vértice siempre se menciona en medio. Recuerde que una letra o número individual se puede emplear para nombrar el ángulo. El ángulo en la figura 1.46 se puede describir como $\angle B$ (el vértice del ángulo) o como $\angle 1$. En notación de conjuntos, $\angle B = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$.

POSTULADO 8 ▶ (Postulado del transportador)

La medida de un ángulo es un número positivo único.

NOTA: En los capítulos 1 al 10 las medidas de la mayoría de los ángulos estará entre 0° y 180°, incluyendo 180°. Los ángulos con medidas entre 180° y 360° se introducen en esta sección; estos ángulos no se utilizan con frecuencia en nuestro estudio de la geometría.

TIPOS DE ÁNGULOS

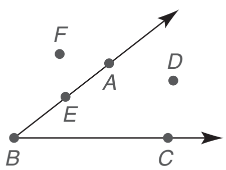


Figura 1.47

Un ángulo cuya medida es menor que 90° es un **ángulo agudo**. Si la medida del ángulo es exactamente 90°, se trata de un **ángulo recto**. Si la medida del ángulo está entre 90° y 180°, el ángulo es **obtuso**. Un ángulo cuya medida es exactamente 180° es un **ángulo llano**; de manera alterna, un ángulo llano es aquel cuyos lados forman rayos opuestos (una línea recta). Un **ángulo reflejo** es aquel cuya medida está entre 180° y 360°. Consulte la tabla 1.4 en la página 32.

En la figura 1.47, el $\angle ABC$ contiene los puntos no colineales A, B y C. Estos tres puntos, a su vez, determinan un plano. El plano que contiene el $\angle ABC$ está separado en tres subconjuntos por el ángulo:

Los puntos como D se dice que están en el *interior* del $\angle ABC$.

Los puntos como E se dice que están *sobre* el $\angle ABC$.

Los puntos como F se dice que están en el *exterior* del $\angle ABC$.

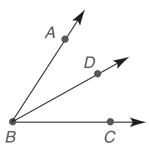


Figura 1.48

Con esta descripción ¡es posible establecer la contraparte del postulado segmento-adición! Considere la figura 1.48 conforme lea el postulado 9.

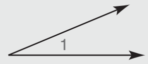
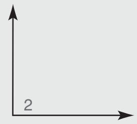
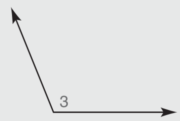
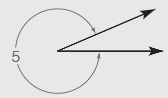
POSTULADO 9 ▶ (Postulado ángulo-adición)

Si un punto D se encuentra en el interior del ángulo ABC, entonces $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$.

Exploración tecnológica

Utilice software si dispone de él.
1. Trace $\angle RST$.
2. A través del punto V en el interior del $\angle RST$, trace $\overrightarrow{SV}$.
3. Mida el $\angle RST$, el $\angle RSV$ y el $\angle VST$.
4. Demuestre que $m\angle RS, V + m\angle VST = m\angle RST$.

TABLA 1.4
Ángulos

Ángulo	*Ejemplo*	
Agudo (1)	$m\angle 1 = 23°$	
Recto (2)	$m\angle 2 = 90°$	
Obtuso (3)	$m\angle 3 = 112°$	
Llano (4)	$m\angle 4 = 180°$	
Reflejo (5)	$m\angle 5 = 337°$	

NOTA: Es necesario un arco para indicar un ángulo reflejo y también se puede utilizar para indicar un ángulo llano.

Descubra

Cuando se requiera más precisión en la medición de ángulos, un grado se puede dividir en 60 minutos. En símbolos, $1° = 60'$. Convierta 22.5° a grados y minutos.

RESPUESTA

$22°\ 30'$

EJEMPLO 1

Con base en la figura 1.48 de la página 31 encuentre $m\angle ABC$ si:

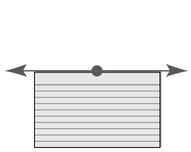
a) $m\angle ABD = 27°$ y $m\angle DBC = 42°$
b) $m\angle ABD = x°$ y $m\angle DBC = (2x - 3)°$

Solución

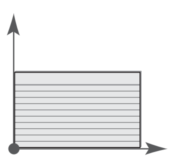
a) Utilizando el postulado ángulo-adición, $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$. Es decir, $m\angle ABC = 27° + 42° = 69°$.
b) $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC = x° + (2x - 3)° = (3x - 3)°$ ■

Descubra

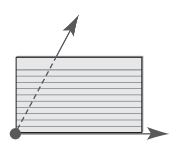
Se puede emplear una ficha (o tarjeta) para categorizar los tipos de ángulos ilustrados. En cada bosquejo hay una ficha sobre un ángulo. Un rayo discontinuo indica que un lado está oculto. ¿Qué tipo de ángulo se muestra en cada figura? (Observe la ubicación de la ficha en cada figura.)



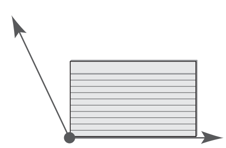
Un extremo de la tarjeta coincide con los dos lados del ángulo



Los lados del ángulo coinciden con dos extremos de la tarjeta



La tarjeta esconde el segundo lado del ángulo



La tarjeta expone el segundo lado del ángulo

RESPUESTAS

Ángulo llano   Ángulo recto   Ángulo agudo   Ángulo obtuso

GÉE *Ejercicios 1-6*

CLASIFICACIÓN DE PARES DE ÁNGULOS

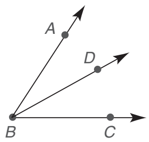


Figura 1.48

Muchas relaciones angulares comprenden exactamente dos ángulos (un par); ¡nunca más de dos ángulos y nunca menos de dos ángulos!

En la figura 1.48 se dice que el $\angle ABD$ y el $\angle DBC$ son ángulos *adyacentes*. En esta descripción el término *adyacente* significa que los ángulos se encuentran "uno al lado del otro"; en la vida cotidiana se podría decir que el restaurante de emparedados Subway está adyacente a la tienda de helados Baskin-Robbins. Cuando dos ángulos son adyacentes tienen un vértice común y un lado común entre ellos. En la figura 1.48, el $\angle ABC$ y el $\angle ABD$ no son adyacentes debido a que tienen puntos interiores en común.

DEFINICIÓN

Dos ángulos son **adyacentes** ($\angle$s adyacentes) si tienen un vértice común y un lado común entre ellos.

Ahora recordemos el significado de ángulos *congruentes*.

DEFINICIÓN

Los **ángulos congruentes** ($\cong\angle$**s**) son dos ángulos con la misma medida.

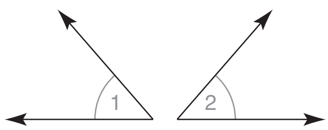


Figura 1.49

Los ángulos congruentes deben coincidir cuando uno se coloca encima del otro. (No considere que los lados parezcan tener longitudes diferentes; ¡recuerde que los rayos son de longitud infinita!) En símbolos, $\angle 1 \cong \angle 2$ si $m\angle 1 = m\angle 2$. En la figura 1.49, marcas similares (arcos) indican que $\angle 1 \cong \angle 2$.

EJEMPLO 2

DADO: $\angle 1 \cong \angle 2$
$m\angle 1 = 2x + 15$
$m\angle 2 = 3x - 2$

ENCUENTRE: x

Solución $\angle 1 \cong \angle 2$ significa que $m\angle 1 = m\angle 2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2x + 15 &= 3x - 2 \\ 17 &= x \qquad \text{o} \qquad x = 17 \end{aligned}$$

NOTA: $m\angle 1 = 2(17) + 15 = 49°$ y $m\angle 2 = 3(17) - 2 = 49°$. ■

DEFINICIÓN

El **bisector** de un ángulo es el rayo que separa el ángulo dado en dos ángulos congruentes.

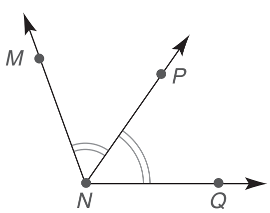


Figura 1.50

Con P en el interior de $\angle MNQ$ de modo que $\angle MNP \cong \angle PNQ$, $\overrightarrow{NP}$ se dice que **biseca** el $\angle MNQ$. De manera equivalente, $\overrightarrow{NP}$ es el bisector o bisector de ángulo del $\angle MNQ$. Con base en la figura 1.50 las consecuencias posibles de la definición de bisector de un ángulo son:

$m\angle MNP = m\angle PNQ$ $\quad$ $m\angle MNQ = 2(m\angle PNQ)$ $\quad$ $m\angle MNQ = 2(m\angle MNP)$

$m\angle PNQ = \frac{1}{2}(m\angle MNQ)$ $\quad$ $m\angle MNP = \frac{1}{2}(m\angle MNQ)$

DEFINICIÓN

Dos ángulos son **complementarios** si la suma de sus medidas es 90°. Cada ángulo en el par se conoce como **complemento** del otro.

Los ángulos con medidas de 37 y 53° son complementarios. El ángulo de 37° es el complemento del ángulo de 53° y viceversa. Si las medidas de dos ángulos son x y y, y se sabe que $x + y = 90°$, entonces estos ángulos son complementarios.

DEFINICIÓN

Dos ángulos son **suplementarios** si la suma de sus medidas es 180°. Cada ángulo en el par se conoce como **suplemento** del otro.

EJEMPLO 3

Dado que $m\angle 1 = 29°$, encuentre:

a) el complemento x b) el suplemento y

Solución

a) $x + 29 = 90$, por tanto $x = 61°$; complemento $= 61°$
b) $y + 29 = 180$, por tanto $y = 151°$; suplemento $= 151°$ ■

EJEMPLO 4

DADO: $\angle P$ y $\angle Q$ son complementarios, donde

$$m\angle P = \frac{x}{2} \qquad \text{y} \qquad m\angle Q = \frac{x}{3}$$

ENCUENTRE: x, $m\angle P$ y $m\angle Q$

Solución

$$\begin{aligned} m\angle P + m\angle Q &= 90 \\ \frac{x}{2} + \frac{x}{3} &= 90 \end{aligned}$$

Multiplicando por 6 (el mínimo común denominador, o MCD, de 2 y 3), se tiene

$$\begin{aligned} 6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} &= 6 \cdot 90 \\ 3x + 2x &= 540 \\ 5x &= 540 \\ x &= 108 \end{aligned}$$

$$m\angle P = \frac{x}{2} = \frac{108}{2} = 54°$$

$$m\angle Q = \frac{x}{3} = \frac{108}{3} = 36°$$

NOTA: $m\angle P = 54°$ y $m\angle Q = 36°$, por tanto su suma es exactamente 90°. ■

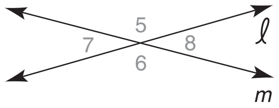


Figura 1.51

Cuando dos líneas rectas se intersecan los pares de ángulos no adyacentes en posiciones opuestas se conocen como **ángulos verticales**. En la figura 1.51, $\angle 5$ y $\angle 6$ son ángulos verticales (como lo son $\angle 7$ y $\angle 8$). Además, $\angle 5$ y $\angle 7$ se pueden describir como ángulos adyacentes y suplementarios, igual que $\angle 5$ y $\angle 8$. Si $m\angle 7 = 30°$, ¿cuál es el valor de $m\angle 5$ y el de $m\angle 8$? En general, es cierto que los ángulos verticales son congruentes y esto se demostrará en el ejemplo 3 de la sección 1.6. En el ejemplo 5 de esta sección se aplica esta propiedad.

GEE *Ejercicios 7-12*

Recuerde las propiedades de adición y sustracción de la igualdad: si $a = b$ y $c = d$, entonces $a \pm c = b \pm d$. Estos principios se pueden aplicar al resolver un sistema de ecuaciones como las siguientes:

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 5 \\ 2x - y &=& 7 \\ \hline 3x &=& 12 \\ x &=& 4 \end{array} \quad \textbf{(se suman los lados izquierdo y derecho)}$$

Se puede sustituir 4 por x en cualquier ecuación para despejar y:

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 5 \\ 4 + y &=& 5 \\ y &=& 1 \end{array} \quad \textbf{(por sustitución)}$$

Si $x = 4$ y $y = 1$, entonces $x + y = 5$ y $2x - y = 7$.

Cuando cada término en una ecuación se multiplica por el mismo número distinto de cero las soluciones de la ecuación no cambian. Por ejemplo, las dos ecuaciones $2x - 3 = 7$ y $6x - 9 = 21$ (cada término multiplicado por 3) tienen la solución $x = 5$. De igual forma los valores de x y y que validan la ecuación $4x + y = 180$ también validan la ecuación $16x + 4y = 720$ (cada término multiplicado por 4). En el ejemplo 5 se utiliza este método.

EJEMPLO 5

DADO: En la figura 1.51, ℓ y m se intersecan de manera que

$$\begin{array}{rcl} m\angle 5 &=& 2x + 2y \\ m\angle 8 &=& 2x - y \\ m\angle 6 &=& 4x - 2y \end{array}$$

ENCUENTRE: x y y

Solución $\angle 5$ y $\angle 8$ son suplementarios (los lados adyacentes y externos forman un ángulo llano). Por lo tanto, $m\angle 5 + m\angle 8 = 180$. $\angle 5$ y $\angle 6$ son congruentes (verticales). Por tanto, $m\angle 5 = m\angle 6$. En consecuencia, se tiene

$$\begin{array}{rcll} (2x + 2y) + (2x - y) &=& 180 & \textbf{(}\angle\textbf{s 5 y 8 suplementarios)} \\ 2x + 2y &=& 4x - 2y & \textbf{(}\cong\angle\textbf{s 5 y 6)} \end{array}$$

Simplificando,

$$\begin{array}{rcl} 4x + y &=& 180 \\ 2x - 4y &=& 0 \end{array}$$

Utilizando la propiedad de multiplicación de la igualdad se multiplica la primera ecuación por 4. Entonces el sistema equivalente permite eliminar la variable y por adición.

$$\begin{array}{rcl} 16x + 4y &=& 720 \\ 2x - 4y &=& 0 \\ \hline 18x &=& 720 \\ x &=& 40 \end{array} \quad \textbf{(sumando los lados izquierdo y derecho)}$$

Utilizando la ecuación $4x + y = 180$, se deduce que

$$\begin{aligned} 4(40) + y &= 180 \\ 160 + y &= 180 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

Resumiendo, $x = 40$ y $y = 20$.

NOTA: $m\angle 5 = 120°$, $m\angle 8 = 60°$ y $m\angle 6 = 120°$. ■

CONSTRUCCIONES CON ÁNGULOS

En la sección 1.2 se consideraron las construcciones 1 y 2 con segmentos de recta. Ahora se consideran dos construcciones que comprenden conceptos angulares. En la sección 3.4 se aclarará por qué estos métodos son válidos. Sin embargo, la intuición sugiere que las técnicas son apropiadas.

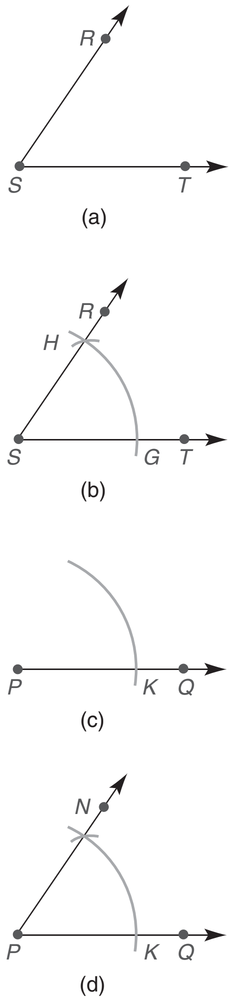


Figura 1.52

Construcción 3 *Para construir un ángulo congruente con un ángulo dado.*

DADO: $\angle RST$ en la figura 1.52(a)

CONSTRUYA: Con $\overrightarrow{PQ}$ como un lado, $\angle NPQ \cong \angle RST$

CONSTRUCCIÓN: Figura 1.52(b): con un compás, marque un arco para intersecar los dos lados del $\angle RST$ (en los puntos G y H, respectivamente).

Figura 1.52(c): sin cambiar el radio marque un arco para intersecar $\overrightarrow{PQ}$ en K y el "que sería" el segundo lado del $\angle NPQ$.

Figura 1.52(b): Ahora marque un arco para medir la distancia de G a H.

Figura 1.52(d): utilizando el mismo radio marque un arco con K como centro para intersecar el que sería el segundo lado del ángulo deseado. Ahora trace el rayo desde P hasta el punto de intersección de los dos arcos.

El ángulo resultante es el deseado, como se demostrará en la sección 3.4, ejemplo 1.

Al igual que un segmento de recta se puede bisecar, también un ángulo se puede bisecar. Esto nos lleva a un cuarto método de construcción.

Construcción 4 *Para construir el ángulo bisector de un ángulo dado.*

DADO: $\angle PRT$ en la figura 1.53(a)

CONSTRUYA: $\overrightarrow{RS}$ de manera que $\angle PRS \cong \angle SRT$

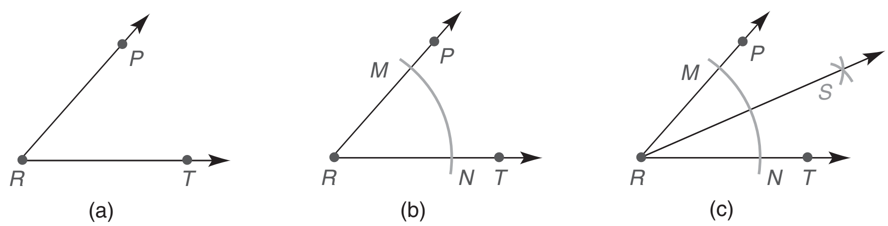


Figura 1.53

CONSTRUCCIÓN: Figura 1.53(b): utilizando un compás, marque un arco para intersecar los lados del $\angle PRT$ en los puntos M y N.

Figura 1.53(c): Ahora, con M y N como centros, marque dos arcos con radios iguales que se intersequen en el punto S en el interior del $\angle PRT$, como se muestra. Ahora trace el rayo RS, el bisector del ángulo deseado.

GEE

Ejercicios 13-20

Razonando a partir de la definición del bisector de un ángulo, del postulado ángulo-adición y del postulado del transportador se puede justificar el teorema siguiente.

TEOREMA 1.4.1

Hay uno y sólo un bisector de ángulo para un ángulo dado.

Este teorema con frecuencia se enuncia así: "El bisector de un ángulo es único". Este enunciado se demuestra en el ejemplo 5 de la sección 2.2.

Ejercicios 1.4

1. ¿Qué *tipo de ángulo* es cada uno de los siguientes?
a) 47° b) 90° c) 137.3°

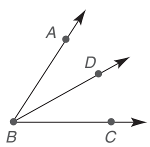
2. ¿Qué *tipo de ángulo* es cada uno de los siguientes?
a) 115° b) 180° c) 36°

3. ¿Qué *relación*, si la hay, existe entre dos ángulos:
a) con medidas de 37° y 53°?
b) con medidas de 37° y 143°?

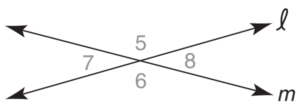
4. ¿Qué *relación*, si la hay, existe entre dos ángulos:
a) con medidas iguales?
b) que tienen el mismo vértice y un lado común entre ellos?

En los ejercicios 5 al 8 describa con una palabra la relación entre los ángulos.

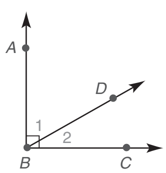
5. $\angle ABD$ y $\angle DBC$



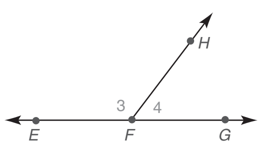
6. $\angle 7$ y $\angle 8$



7. $\angle 1$ y $\angle 2$



8. $\angle 3$ y $\angle 4$

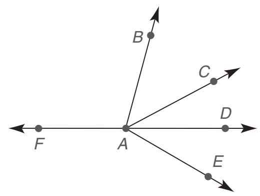


Utilice los dibujos según se requiera para responder cada una de las preguntas siguientes.

9. ¿Dos rayos con un punto extremo común, deben ser coplanares?

¿Tres rayos con un punto extremo común, deben ser coplanares?

10. Suponga que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AF}$ son coplanares.



Ejercicios 10–13

Clasifique lo siguiente como verdadero o falso:
a) $m\angle BAC + m\angle CAD = m\angle BAD$
b) $\angle BAC \cong \angle CAD$
c) $m\angle BAE - m\angle DAE = m\angle BAC$
d) $\angle BAC$ y $\angle DAE$ son adyacentes
e) $m\angle BAC + m\angle CAD + m\angle DAE = m\angle BAE$

11. Sin utilizar el transportador, nombre el tipo de ángulo representado por:
a) $\angle BAE$ b) $\angle FAD$ c) $\angle BAC$ d) $\angle FAE$

12. ¿De ser el caso, qué es incorrecto en la afirmación $m\angle FAB + m\angle BAE = m\angle FAE$?

13. $\angle FAC$ y $\angle CAD$ son adyacentes y $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos. ¿Qué concluye acerca de $\angle FAC$ y $\angle CAD$?

Para los ejercicios 14 y 15, sea $m\angle 1 = x$ y $m\angle 2 = y$.

14. Utilizando las variables x y y, escriba una ecuación que exprese el hecho de que $\angle 1$ y $\angle 2$ son:
a) suplementarios b) congruentes

15. Utilizando las variables x y y, escriba una ecuación que exprese el hecho de que $\angle 1$ y $\angle 2$ son:
a) complementarios b) verticales

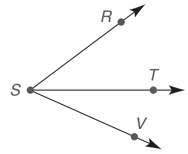
Para los ejercicios 16 y 17 consulte la figura en la página 38.

16. *Dado:* $m\angle RST = 39°$
$m\angle TSV = 23°$
Encuentre: $m\angle RSV$

17. *Dado:* $m\angle RSV = 59°$
$m\angle TSV = 17°$
Encuentre: $m\angle RST$

18. *Dado:* $m\angle RST = 2x + 9$
$m\angle TSV = 3x - 2$
$m\angle RSV = 67°$
Encuentre: x

19. *Dado:* $m\angle RST = 2x - 10$
$m\angle TSV = x + 6$
$m\angle RSV = 4(x - 6)$
Encuentre: x y $m\angle RSV$



Ejercicios 16–24

20. *Dado:* $m\angle RST = 5(x + 1) - 3$
$m\angle TSV = 4(x - 2) + 3$
$m\angle RSV = 4(2x + 3) - 7$
Encuentre: x y $m\angle RSV$

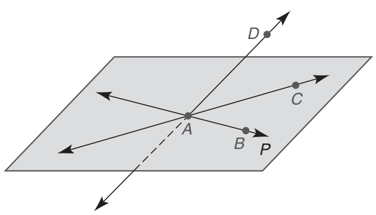
21. *Dado:* $m\angle RST = \frac{x}{2}$
$m\angle TSV = \frac{x}{4}$
$m\angle RSV = 45°$
Encuentre: x y $m\angle RST$

22. *Dado:* $m\angle RST = \frac{2x}{3}$
$m\angle TSV = \frac{x}{2}$
$m\angle RSV = 49°$
Encuentre: x y $m\angle TSV$

23. *Dado:* $\overrightarrow{ST}$ biseca $\angle RSV$
$m\angle RST = x + y$
$m\angle TSV = 2x - 2y$
$m\angle RSV = 64°$
Encuentre: x y y

24. *Dado:* $\overrightarrow{ST}$ biseca $\angle RSV$
$m\angle RST = 2x + 3y$
$m\angle TSV = 3x - y + 2$
$m\angle RSV = 80°$
Encuentre: x y y

25. *Dado:* $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en el plano P como se muestra;
$\overleftrightarrow{AD}$ interseca P en el punto A
$\angle CAB \cong \angle DAC$
$\angle DAC \cong \angle DAB$
¿Qué concluye?



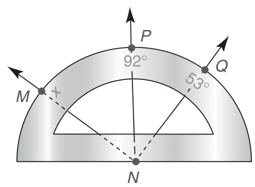
26. Dos ángulos son complementarios. Un ángulo es 12° mayor que el otro. Utilizando dos variables x y y, encuentre el tamaño de cada ángulo resolviendo un sistema de ecuaciones.

27. Dos ángulos son suplementarios. Un ángulo es el doble del otro más 24°. Utilizando dos variables x y y, encuentre la medida de cada ángulo.

28. Para dos ángulos complementarios encuentre una expresión para la medida del segundo ángulo si la medida del primero es:
a) $x°$
b) $(3x - 12)°$
c) $(2x + 5y)°$

29. Suponga que dos ángulos son suplementarios. Encuentre expresiones para los suplementos, empleando las expresiones dadas en el ejercicio 28, incisos (a) a (c).

30. En el transportador que se muestra $\overrightarrow{NP}$ biseca $\angle MNQ$. Encuentre x.

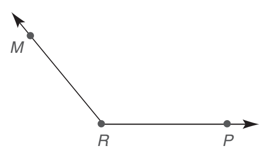


Ejercicios 30, 31

31. En el transportador que se muestra, para el ejercicio 30, $\angle MNP$ y $\angle PNQ$ son complementarios. Encuentre x.

32. Clasifique como verdadero o falso:
a) Si los puntos P y Q se encuentran en el interior del $\angle ABC$, entonces $\overline{PQ}$ se encuentra en el interior del $\angle ABC$.
b) Si los puntos P y Q se encuentran en el interior del $\angle ABC$, entonces $\overleftrightarrow{PQ}$ se encuentra en el interior del $\angle ABC$.
c) Si los puntos P y Q se encuentran en el interior del $\angle ABC$, entonces $\overrightarrow{PQ}$ se encuentra en el interior del $\angle ABC$.

En los ejercicios 33 al 40 utilice sólo un compás y una regla para realizar las construcciones indicadas.



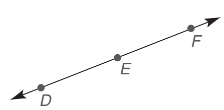
Ejercicios 33-35

33. *Dado:* $\angle MRP$ obtuso
Construya: con $\overrightarrow{OA}$ como un lado, un ángulo $\cong \angle MRP$

34. *Dado:* $\angle MRP$ obtuso
Construya: $\overrightarrow{RS}$, el bisector del $\angle MRP$

35. *Dado:* $\angle MRP$ obtuso
Construya: los rayos $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{RT}$ y $\overrightarrow{RU}$ de manera que $\angle MRP$ se divida en cuatro ángulos

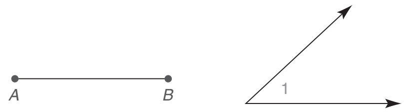
36. *Dado:* $\angle DEF$ llano
Construya: un ángulo recto con vértice en E
(SUGERENCIA: Utilice la construcción 4.)



37. Trace un triángulo con tres ángulos agudos. Construya bisectores de ángulos para cada uno de los tres ángulos. Con base en la apariencia de su construcción, ¿qué parece ser cierto?

38. *Dado:* $\angle 1$ agudo y $\overline{AB}$

Construya: el triángulo ABC con $\angle A \cong \angle 1$, $\angle B \cong \angle 1$ y lado $\overline{AB}$

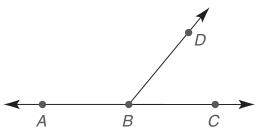


39. ¿Qué parece ser cierto de los dos lados en el triángulo que construyó en el ejercicio 38?

40. *Dado:* $\angle ABC$ llano y $\overrightarrow{BD}$

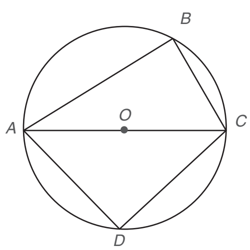
Construya: bisectores de $\angle ABD$ y $\angle DBC$

¿Qué tipo de ángulo se forma por los bisectores de los dos ángulos?

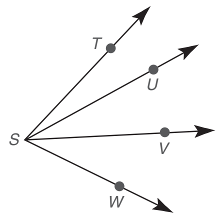


41. Consulte el círculo con centro O.

a) Utilice un transportador para encontrar m$\angle B$.
b) Utilice un transportador para encontrar m$\angle D$.
c) Compare los resultados en los incisos (a) y (b).



42. Si m$\angle TSV = 38°$, m$\angle USW = 40°$ y m$\angle TSW = 61°$, encuentre m$\angle USV$.

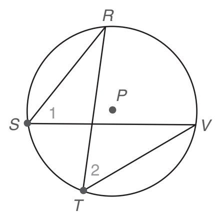


Ejercicios 42, 43

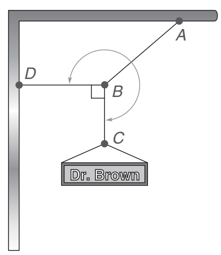
43. Si m$\angle TSU = x + 2z$, m$\angle USV = x - z$, y m$\angle VSW = 2x - z$, encuentre x si m$\angle TSW = 60$. Además, encuentre z si m$\angle USW = 3x - 6$.

44. Consulte el círculo con centro P.

a) Utilice un transportador para encontrar m$\angle 1$.
b) Utilice un transportador para encontrar m$\angle 2$.
c) Compare los resultados en los incisos (a) y (b).



45. En el anuncio suspendido los tres ángulos ($\angle ABD$, $\angle ABC$ y $\angle DBC$) en el vértice B suman 360°. Si m$\angle DBC = 90°$ y $\overrightarrow{BA}$ biseca el ángulo reflejo indicado encuentre m$\angle ABC$.



1.5 Introducción a la demostración geométrica

CONCEPTOS CLAVE

- Demostración
- Propiedades algebraicas
- Problema dado y demostración
- Demostraciones de ejemplo

Para creer ciertos principios geométricos es necesario tener una prueba. En esta sección se introducen algunas directrices para comprobar propiedades geométricas. Se presentan varios ejemplos para ayudarle a desarrollar sus propias demostraciones. Al inicio la forma de la demostración será en dos columnas, con enunciados en la columna izquierda y razones en la derecha. Pero ¿de dónde provienen los enunciados y las razones?

Recuerde

En el apéndice A se pueden encontrar propiedades y técnicas adicionales del álgebra.

Para contestar esta interrogante, debe preguntarse "Qué es aquello que se conoce" (dado) y "Por qué" se debe obtener una conclusión (demostración) a partir de dicha información. Con frecuencia completar la demostración requiere deducir varias conclusiones relacionadas y, por tanto, varios "por qué" intermedios. Al armar de manera correcta una demostración, es usual tachar varias conclusiones y reordenarlas. Cada conclusión se debe justificar citando lo dado (hipótesis), una definición o postulado enunciado previamente, o un teorema demostrado con anterioridad.

Las propiedades seleccionadas del álgebra a menudo se utilizan como razones para justificar enunciados. Por ejemplo, se emplea la propiedad de adición de la igualdad para justificar la suma del mismo número en cada lado de una ecuación. Las razones que con frecuencia se encuentran en una demostración incluyen las propiedades encontradas en las tablas 1.5 y 1.6.

TABLA 1.5
Propiedades de la igualdad (a, b y c son números reales)

Propiedad de adición de la igualdad:	Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$.
Propiedad de sustracción de la igualdad:	Si $a = b$ entonces $a - c = b - c$.
Propiedad de multiplicación de la igualdad:	Si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$.
Propiedad de división de la igualdad:	Si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Como se descubrió en el ejemplo 1, algunas propiedades se pueden emplear de manera intercambiable.

EJEMPLO 1

¿Qué propiedad de la igualdad justifica cada conclusión?

a) Si $2x - 3 = 7$, entonces $2x = 10$. b) Si $2x = 10$, entonces $x = 5$.

Solución

a) Propiedad de adición de la igualdad; se le suma 3 a cada lado de la ecuación.
b) Propiedad de multiplicación de la igualdad; se multiplica cada lado de la ecuación por $\frac{1}{2}$. *O* propiedad de división de la igualdad; se divide cada lado de la ecuación entre 2. ■

TABLA 1.6
Otras propiedades de la igualdad (a, b y c son números reales)

Propiedad reflexiva:	$a = a$.
Propiedad simétrica:	Si $a = b$, entonces $b = a$.
Propiedad distributiva:	$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
Propiedad sustitutiva:	Si $a = b$, entonces a reemplaza a b en cualquier ecuación.
Propiedad transitiva:	Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Antes de considerar la demostración geométrica se estudia la demostración algebraica, en la cual cada enunciado en una secuencia de pasos está sustentado en la razón de *por qué* se puede hacer ese enunciado (afirmación). La primera afirmación en la demostración es el problema *Dado* y la secuencia de pasos debe concluir con un enunciado final que represente la afirmación que se debe demostrar (*Demuestre*).

Ejercicios 1-4

Estudie el ejemplo 2. Luego cubra las razones y proporcione la razón para cada enunciado. Con los enunciados cubiertos, encuentre el enunciado correspondiente a cada razón.

EJEMPLO 2

DADO: $2(x - 3) + 4 = 10$
DEMUESTRE: $x = 6$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $2(x - 3) + 4 = 10$	1. Dado
2. $2x - 6 + 4 = 10$	2. Propiedad distributiva
3. $2x - 2 = 10$	3. Sustitución
4. $2x = 12$	4. Propiedad de adición de la igualdad
5. $x = 6$	5. Propiedad de división de la igualdad

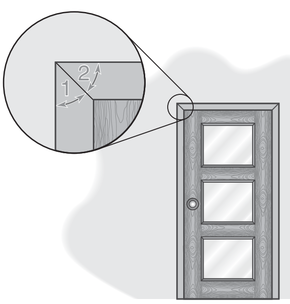
NOTA 1: De manera alterna, en el paso 5 se podría emplear como razón la propiedad de multiplicación de la igualdad (multiplicar por $\frac{1}{2}$). La división entre 2 condujo al mismo resultado.

Ejercicios 5-7

NOTA 2: El quinto paso es el final ya que el enunciado Demuestre se formuló y justificó. ■

Descubra

En el diagrama las piezas decorativas de madera están mitradas (cortadas a un ángulo) para que sean iguales y formen un ángulo recto cuando se colocan juntas. Utilice las propiedades del álgebra para explicar por qué las medidas del $\angle 1$ y del $\angle 2$ son de 45°. Lo que hizo fue una "demostración" informal.



RESPUESTA

$m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$. Dado que $m\angle 1 = m\angle 2$, se observa que $m\angle 1 + m\angle 1 = 90°$. Por tanto, $2 \cdot m\angle 1 = 90°$ y dividiendo entre 2, se observa que $m\angle 1 = 45°$. Entonces $m\angle 2 = 45°$ también.

La actividad Descubra de la izquierda sugiere que también existe una demostración geométrica formal. El formato común para un problema que requiere de una demostración geométrica es

DADO: _______ [esquema]

DEMUESTRE: _______

Considere este problema:

DADO: A-P-B en $\overline{AB}$ (figura 1.54)

DEMUESTRE: $AP = AB - PB$

Primero considere el esquema (figura 1.54) y relaciónelo con cualquier información adicional descrita por lo Dado. Luego considere el enunciado Demuestre. ¿Comprende la afirmación y le parece razonable? Si parecen razonables, las afirmaciones intermedias se deben ordenar y sustentar para formar el contenido de la demostración. Puesto que una demostración debe iniciar con lo Dado y concluir con Demuestre, la demostración del problema anterior tiene esta forma:

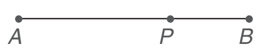


Figura 1.54

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. A-P-B en $\overline{AB}$	1. Dado
2. ?	2. ?
.	.
.	.
.	.
?. $AP = AB - PB$	?. ?

Para construir la demostración se debe deducir del esquema y de lo Dado que

$$AP + PB = AB$$

A su vez se deduce (mediante sustracción) que $AP = AB - PB$. El problema de la demostración completa tendrá la apariencia del ejemplo 3, que sigue a la primera de varias "Estrategias para demostración" que se utilizan en este libro.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ El primer renglón de una demostración

Regla general: El primer *enunciado* de la demostración incluye la información "Dada"; además, la primera *razón* está Dada.
Ilustración: Vea el primer renglón en la demostración del ejemplo 3.

EJEMPLO 3

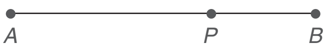


Figura 1.55

DADO: A-P-B en $\overline{AB}$ (figura 1.55)
DEMUESTRE: $AP = AB - PB$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. A-P-B en $\overline{AB}$	1. Dado
2. $AP + PB = AB$	2. Postulado segmento-adición
3. $AP = AB - PB$	3. Propiedad de sustracción de la igualdad

GEE
Ejercicios 8-10

Algunas de las propiedades de la desigualdad que se emplean en el ejemplo 4 se encuentran en la tabla 1.7. Aunque las propiedades se establecieron para la relación "mayor que" (>), también son válidas para la relación "menor que" (<).

TABLA 1.7
Propiedades de la desigualdad (a, b y c son números reales)

Propiedad de adición de la igualdad:	Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
Propiedad de sustracción de la desigualdad:	Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.

DEMOSTRACIONES DE EJEMPLO

Considere la figura 1.56 y este problema:

Figura 1.56

DADO: $MN > PQ$

DEMUESTRE: $MP > NQ$

Para comprender la situación primero estudie el esquema (figura 1.56) y lo Dado relacionado. Luego lea Demuestre en referencia al esquema. La construcción de la demostración requiere que se inicie con lo Dado y se termine con Demuestre. Lo que puede ser confuso aquí es que lo Dado implica MN y PQ, en tanto que Demuestre comprende MP y NQ. Sin embargo, esto se remedia con facilidad mediante la adición de NP a cada lado de la desigualdad $MN > PQ$; vea el paso 2 en la demostración del ejemplo 4.

Figura 1.57

EJEMPLO 4

DADO: $MN > PQ$ (figura 1.57)
DEMUESTRE: $MP > NQ$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $MN > PQ$	1. Dado
2. $MN + NP > NP + PQ$	2. Propiedad de adición de la igualdad
3. Pero $MN + NP = MP$ y $NP + PQ = NQ$	3. Postulado del segmento-adición
4. $MP > NQ$	4. Sustitución

NOTA: La razón final puede sorprender. No obstante, el axioma de sustitución de la igualdad permite reemplazar una cantidad con su igual en *cualquier* enunciado; ¡incluyendo una desigualdad! Consulte el apéndice A.3 para obtener más información.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ El último enunciado de la demostración

Regla general: El *enunciado* final de la demostración es el enunciado “Demuestre”.
Ilustración: Consulte el último enunciado en la demostración del ejemplo 5.

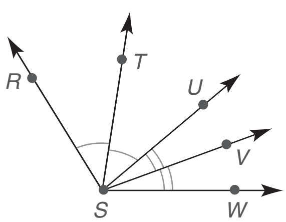


Figura 1.58

EJEMPLO 5

Estudie esta demostración observando el orden de los enunciados y las razones.

DADO: $\overrightarrow{ST}$ biseca $\angle RSU$
$\overrightarrow{SV}$ biseca $\angle USW$ (figura 1.58)

DEMUESTRE: $m\angle RST + m\angle VSW = m\angle TSV$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overrightarrow{ST}$ biseca $\angle RSU$	1. Dado
2. $m\angle RST = m\angle TSU$	2. Si un ángulo se biseca, entonces las medidas de los ángulos resultantes son iguales.
3. $\overrightarrow{SV}$ biseca $\angle USW$	3. Igual que la razón 1
4. $m\angle VSW = m\angle USV$	4. Igual que la razón 2
5. $m\angle RST + m\angle VSW = m\angle TSU + m\angle USV$	5. Propiedad de adición de la igualdad (utilice las ecuaciones de los enunciados 2 y 4)
6. $m\angle TSU + m\angle USV = m\angle TSV$	6. Postulado ángulo-adición
7. $m\angle RST + m\angle VSW = m\angle TSV$	7. Sustitución

GEE
Ejercicios 11, 12

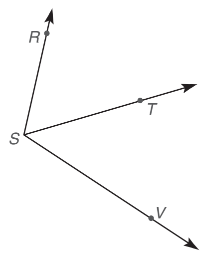
Ejercicios 1.5

En los ejercicios 1 al 6, ¿qué propiedad justifica la conclusión del enunciado?

1. Si $2x = 12$, entonces $x = 6$.
2. Si $x + x = 12$, entonces $2x = 12$.
3. Si $x + 5 = 12$, entonces $x = 7$.
4. Si $x - 5 = 12$, entonces $x = 17$.
5. Si $\frac{x}{5} = 3$, entonces $x = 15$.
6. Si $3x - 2 = 13$, entonces $3x = 15$.

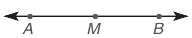
En los ejercicios 7 al 10 enuncie la propiedad o definición que justifique la conclusión (la cláusula "entonces").

7. Dado que los $\angle$s 1 y 2 son suplementarios, entonces $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$.
8. Dado que $m\angle 3 + m\angle 4 = 180°$, entonces los $\angle$s 3 y 4 son suplementarios.
9. Dados $\angle RSV$ y $\overrightarrow{ST}$ como se muestran, entonces $m\angle RST + m\angle TSV = m\angle RSV$.
10. Dado que $m\angle RST = m\angle TSV$, entonces $\overrightarrow{ST}$ biseca $\angle RSV$.



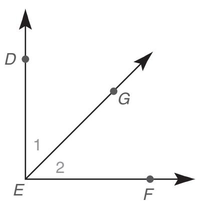
Ejercicios 9, 10

En los ejercicios 11 al 22 utilice la información dada para obtener una conclusión basada en la propiedad o definición establecida.



Ejercicios 11, 12

11. *Dado:* A-M-B; postulado segmento-adición
12. *Dado:* M es el punto medio de $\overline{AB}$; definición de punto medio
13. *Dado:* $m\angle 1 = m\angle 2$; definición de bisector de ángulo
14. *Dado:* $\overrightarrow{EG}$ biseca $\angle DEF$; definición de bisector de ángulo
15. *Dado:* $\angle$s 1 y 2 son complementarios; definición de ángulos complementarios
16. *Dado:* $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$; definición de ángulos complementarios



Ejercicios 13-16

17. *Dado:* $2x - 3 = 7$; propiedad de adición de la igualdad
18. *Dado:* $3x = 21$; propiedad de división de la igualdad
19. *Dado:* $7x + 5 - 3 = 30$; propiedad de sustitución de la igualdad
20. *Dado:* $\frac{1}{2} = 0.5$ y $0.5 = 50\%$; propiedad transitiva de la igualdad
21. *Dado:* $3(2x - 1) = 27$; propiedad distributiva
22. *Dado:* $\frac{x}{5} = -4$; propiedad de multiplicación de la igualdad

En los ejercicios 23 y 24 complete las razones faltantes para la demostración algebraica.

23. *Dado:* $3(x - 5) = 21$
Demuestre: $x = 12$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $3(x - 5) = 21$	1. ?
2. $3x - 15 = 21$	2. ?
3. $3x = 36$	3. ?
4. $x = 12$	4. ?

24. *Dado:* $2x + 9 = 3$
Demuestre: $x = -3$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $2x + 9 = 3$	1. ?
2. $2x = -6$	2. ?
3. $x = -3$	3. ?

En los ejercicios 25 y 26 complete los enunciados faltantes para la demostración algebraica.

25. *Dado:* $2(x + 3) - 7 = 11$
Demuestre: $x = 6$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. ?	2. Propiedad distributiva
3. ?	3. Sustitución (adición)
4. ?	4. Propiedad de adición de la igualdad
5. ?	5. Propiedad de división de la igualdad

26. *Dado:* $\frac{x}{5} + 3 = 9$
Demuestre: $x = 30$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. ?	2. Propiedad de sustracción de la igualdad
3. ?	3. Propiedad de multiplicación de la igualdad

En los ejercicios 27 al 30 complete las razones faltantes para cada demostración geométrica.

Ejercicios 27, 28

27. *Dado:* $D\text{-}E\text{-}F$ en $\overleftrightarrow{DF}$

Demuestre: $DE = DF - EF$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $D\text{-}E\text{-}F$ en $\overleftrightarrow{DF}$	1. ?
2. $DE + EF = DF$	2. ?
3. $DE = DF - EF$	3. ?

28. *Dado:* E es el punto medio de $\overline{DF}$

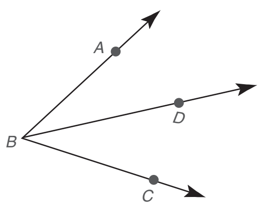
Demuestre: $DE = \frac{1}{2}(DF)$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. E es el punto medio de $\overline{DF}$	1. ?
2. $DE = EF$	2. ?
3. $DE + EF = DF$	3. ?
4. $DE + DE = DF$	4. ?
5. $2(DE) = DF$	5. ?
6. $DE = \frac{1}{2}(DF)$	6. ?

29. *Dado:* $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$

Demuestre: $m\angle ABD = \frac{1}{2}(m\angle ABC)$



Ejercicios 29, 30

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$	1. ?
2. $m\angle ABD = m\angle DBC$	2. ?
3. $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$	3. ?
4. $m\angle ABD + m\angle ABD = m\angle ABC$	4. ?
5. $2(m\angle ABD) = m\angle ABC$	5. ?
6. $m\angle ABD = \frac{1}{2}(m\angle ABC)$	6. ?

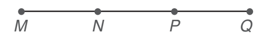
30. *Dado:* $\angle ABC$ y $\overrightarrow{BD}$ (Vea la figura para el ejercicio 29.)

Demuestre: $m\angle ABD = m\angle ABC - m\angle DBC$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle ABC$ y $\overrightarrow{BD}$	1. ?
2. $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$	2. ?
3. $m\angle ABD = m\angle ABC - m\angle DBC$	3. ?

En los ejercicios 31 y 32 complete los enunciados y las razones faltantes.



31. *Dado:* $M\text{-}N\text{-}P\text{-}Q$ en $\overline{MQ}$

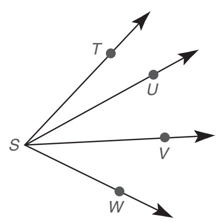
Demuestre: $MN + NP + PQ = MQ$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. ?
2. $MN + NQ = MQ$	2. ?
3. $NP + PQ = NQ$	3. ?
4. ?	4. Propiedad de sustitución de la igualdad

32. *Dado:* $\angle TSW$ con $\overrightarrow{SU}$ y $\overrightarrow{SV}$

Demuestre: $m\angle TSW = m\angle TSU + m\angle USV + m\angle VSW$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. ?
2. $m\angle TSW = m\angle TSU + m\angle USW$	2. ?
3. $m\angle USW = m\angle USV + m\angle VSW$	3. ?
4. ?	4. Propiedad de sustitución de la igualdad

33. Cuando la propiedad distributiva se escribe en su forma *simétrica*, se lee $a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$. Utilice esta forma para reescribir $5x + 5y$.

34. Otra forma de la propiedad distributiva (vea el ejercicio 33) se lee $b \cdot a + c \cdot a = (b + c)a$. Utilice esta forma para reescribir $5x + 7x$. Después simplifique.

35. La propiedad de multiplicación de la desigualdad requiere que se *invierta* el símbolo de desigualdad al multiplicar por un número *negativo*. Dado que $-7 < 5$, forme la desigualdad que resulta cuando se multiplica cada lado por -2.

36. La propiedad de división de la desigualdad requiere que se *invierta* el símbolo de desigualdad al dividir entre un número *negativo*. Dado que $12 > -4$, forme la desigualdad que resulta cuando se divide cada lado entre -4.

37. Proporcione razones para esta demostración: "Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$."

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $a = b$	1. ?
2. $a + c = b + c$	2. ?
3. $c = d$	3. ?
4. $a + c = b + d$	4. ?

38. Escriba una demostración para: "Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a - c = b - d$."

1.6 Relaciones: Rectas perpendiculares

CONCEPTOS CLAVE

Recta(s) vertical(es)
Recta(s) horizontal(es)
Rectas perpendiculares
Relaciones: propiedades reflexiva, simétrica y transitiva
Relación de equivalencia
Bisector perpendicular de un segmento de recta

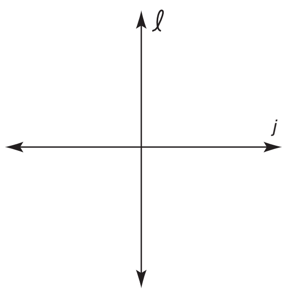


Figura 1.59

De manera informal una recta **vertical** es aquella que se extiende hacia arriba y hacia abajo, como un mástil. Por otro lado, una recta que se extiende de izquierda a derecha es **horizontal**. En la figura 1.59, ℓ es vertical y j es horizontal. Donde las rectas ℓ y j se intersecan parece que forman ángulos de medida igual.

DEFINICIÓN

Las **rectas perpendiculares** son dos rectas que convergen para formar ángulos adyacentes congruentes.

Las rectas perpendiculares no tienen que ser verticales y horizontales. En la figura 1.60 las rectas inclinadas m y p son perpendiculares ($m \perp p$). Como habrá observado, con frecuencia se coloca un cuadrado pequeño en la apertura de un ángulo formado por dos rectas perpendiculares para indicar que las rectas son perpendiculares.

En el ejemplo 1 se incluye una demostración formal de la relación entre rectas perpendiculares y ángulos rectos. Estudie esta demostración observando el orden de los enunciados y las razones. Los números entre paréntesis a la izquierda de los enunciados se refieren al o a los enunciados anteriores en los que se basa el nuevo enunciado.

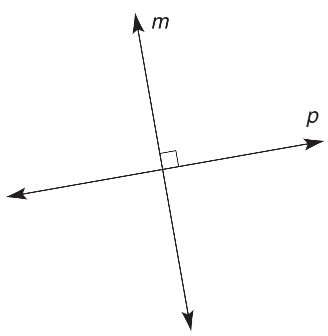


Figura 1.60

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ El dibujo para la demostración

Regla general: Haga un dibujo que caracterice con precisión la información "Dada".
Ilustración: Para la demostración del ejemplo 1 vea la figura 1.61.

TEOREMA 1.6.1

Si dos rectas son perpendiculares entonces convergen para formar ángulos rectos.

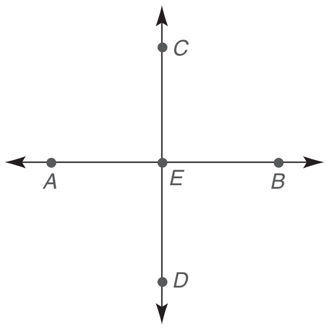


Figura 1.61

EJEMPLO 1

DADO: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$, que se intersecan en E (vea la figura 1.61)
DEMUESTRE: $\angle AEC$ es un ángulo recto

DEMOSTRACIÓN

	Enunciados	Razones
	1. $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$, que se intersecan en E	1. Dado
(1)	2. $\angle AEC \cong \angle CEB$	2. Las rectas perpendiculares convergen para formar ángulos adyacentes congruentes (definición)
(2)	3. $m\angle AEC = m\angle CEB$	3. Si dos ángulos son congruentes, sus medidas son iguales
	4. $\angle AEB$ es un ángulo llano y $m\ \angle AEB = 180°$	4. La medida de un ángulo llano es igual a 180°
	5. $m\angle AEC + m\angle CEB = m\angle AEB$	5. Postulado ángulo-adición
(4), (5)	6. $m\angle AEC + m\angle CEB = 180°$	6. Sustitución
(3), (6)	7. $m\angle AEC + m\angle AEC = 180°$ o $2 \cdot m\ \angle AEC = 180°$	7. Sustitución
(7)	8. $m\angle AEC = 90°$	8. Propiedad de división de la igualdad
(8)	9. $\angle AEC$ es un ángulo recto	9. Si la medida de un ángulo es 90°, entonces el ángulo es un ángulo recto

RELACIONES

La relación entre rectas perpendiculares sugiere el concepto matemático más general, pero indefinido, de **relación**. En general, una relación “conecta” dos elementos de un conjunto de objetos asociados. La tabla 1.8 contiene varios ejemplos de una relación R.

GEE
Ejercicios 1, 2

TABLA 1.8

Relación R	Objetos relacionados	Ejemplo de relación
es igual a	números	$2 + 3 = 5$
es mayor que	números	$7 > 5$
es perpendicular a	rectas	$\ell \perp m$
es complementario a	ángulos	$\angle 1$ es complemento de $\angle 2$
es congruente a	segmentos de recta	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$
es un hermano de	gente	Matt es un hermano de Phil

Recuerde

Los números que miden pueden ser **iguales** ($AB = CD$ o $m\angle 1 = m\angle 2$) en tanto que las figuras geométricas pueden ser **congruentes** ($\overline{AB} \cong \overline{CD}$ o $\angle 1 \cong \angle 2$).

Hay tres propiedades especiales que pueden existir para una relación dada R. Donde a, b y c son objetos asociados con la relación R, las propiedades consideran un objeto (reflexivo), dos objetos en cualquier orden (simétrica) o tres objetos (transitiva). Para que las propiedades existan es necesario que los enunciados sean verdaderos para todos los objetos seleccionados del conjunto asociado. A continuación se generalizan y se dan ejemplos de estas propiedades:

Propiedad reflexiva: $a\text{R}a$ ($5 = 5$; la igualdad de números tiene una propiedad reflexiva)

Propiedad simétrica: Si $a\text{R}b$, entonces $b\text{R}a$. (Si $\ell \perp m$, entonces $m \perp \ell$; la perpendicularidad de las rectas tiene una propiedad simétrica)

Propiedad transitiva: Si $a\text{R}b$ y $b\text{R}c$, entonces $a\text{R}c$. (Si $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 2 \cong \angle 3$, entonces $\angle 1 \cong \angle 3$; la congruencia de ángulos tiene una propiedad transitiva)

EJEMPLO 2

¿La relación "es menor que" para números tiene una propiedad reflexiva? ¿Una propiedad simétrica? ¿Una propiedad transitiva?

Solución Como "$2 < 2$" es falso *no* hay propiedad reflexiva.
"Si $2 < 5$, entonces $5 < 2$" también es falso; *no* hay propiedad simétrica.
"Si $2 < 5$ y $5 < 9$, entonces $2 < 9$" es verdadero; *hay* una propiedad transitiva.

NOTA: Se obtienen los mismos resultados para elecciones distintas de 2, 5 y 9. ■

La congruencia de ángulos (o segmentos de recta) está estrechamente ligada a la igualdad de medidas de ángulos (o medidas de segmentos de recta) de acuerdo con la definición de congruencia. La siguiente es una lista de algunas propiedades útiles de la congruencia de ángulos.

Reflexiva: $\angle 1 \cong \angle 1$; un ángulo es congruente consigo mismo.

Simétrica: Si $\angle 1 \cong \angle 2$, entonces $\angle 2 \cong \angle 1$.

Transitiva: Si $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 2 \cong \angle 3$, entonces $\angle 1 \cong \angle 3$.

GEE
Ejercicios 3-9

Cualquier relación (como la congruencia de ángulos) que tenga propiedades reflexiva, simétrica y transitiva se conoce como *relación de equivalencia*. En capítulos posteriores se verá que la congruencia de triángulos y la similitud de triángulos también tienen propiedades reflexiva, simétrica y transitiva; estas relaciones también son relaciones de equivalencia.

Regresando a la formulación de una demostración, el ejemplo final en esta sección se basa en el hecho de que los ángulos verticales son congruentes cuando dos rectas se intersecan. Vea la figura 1.62. Puesto que hay dos puntos pares de ángulos congruentes se puede establecer la demostración

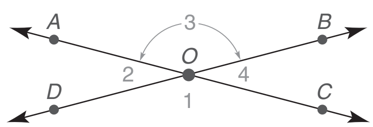


Figura 1.62

Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 3$ y $\angle 2 \cong \angle 4$

La conclusión es una conjunción y se comprobaría si se establecieran las dos congruencias. Por simplicidad, la demostración del ejemplo 3 se establece

Demuestre: $\angle 2 \cong \angle 4$

Estudie esta demostración del teorema 1.6.2, observando el orden de los enunciados y las razones.

TEOREMA 1.6.2
Si dos rectas se intersecan, entonces los ángulos formados son congruentes.

Geometría en la naturaleza

Una estalactita se forma cuando al congelarse el agua adopta una trayectoria vertical.

EJEMPLO 3

DADO: $\overleftrightarrow{AC}$ interseca $\overleftrightarrow{BD}$ en O. (Consulte la figura 1.62 en la página 48.)
DEMUESTRE: $\angle 2 \cong \angle 4$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overrightarrow{AC}$ interseca $\overrightarrow{BD}$ en O	1. Dado
2. $\angle$s AOC y DOB son $\angle$s llanos, con $m\angle AOC = 180$ y $m\angle DOB = 180$	2. La medida de un ángulo llano es 180°
3. $m\angle AOC = m\angle DOB$	3. Sustitución
4. $m\angle 1 + m\angle 4 = m\angle DOB$ y $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle AOC$	4. Postulado ángulo-adición
5. $m\angle 1 + m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$	5. Sustitución
6. $m\angle 4 = m\angle 2$	6. Propiedad de sustracción de la igualdad
7. $\angle 4 \cong \angle 2$	7. Si dos ángulos son iguales en medida son congruentes
8. $\angle 2 \cong \angle 4$	8. Propiedad simétrica de la congruencia de ángulos

■

Exploración tecnológica

Utilice software de cómputo si dispone de él.

1. Construya $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ para que se intersequen en el punto O. (Consulte la figura 1.62.)
2. Mida $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$.
3. Demuestre que $m\angle 1 = m\angle 3$ y $m\angle 2 = m\angle 4$.

En la demostración anterior no es necesario reordenar los ángulos congruentes del enunciado 7 al enunciado 8 ya que la congruencia de los ángulos es simétrica; más adelante, el enunciado 7 se escribirá para que concuerde con el enunciado Demuestre aun si el renglón anterior no tiene el mismo orden. El mismo tipo de razonamiento se aplica a la demostración de rectas perpendiculares o paralelas: ¡el orden simplemente no es importante!

CONSTRUCCIONES QUE CONDUCEN A RECTAS PERPENDICULARES

La construcción 2 en la sección 1.2 determinó no sólo el punto medio de $\overline{AB}$ sino también el correspondiente al **bisector perpendicular** de $\overline{AB}$. En muchos casos se necesita la recta perpendicular a otra recta en un punto distinto del punto medio de un segmento.

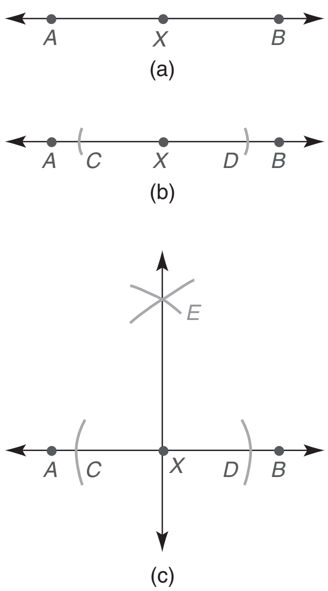


Figura 1.63

Construcción 5 *Para construir la recta perpendicular a una recta dada en un punto especificado de ésta.*

DADO: $\overleftrightarrow{AB}$ con el punto X en la figura 1.63(a)

CONSTRUYA: Una recta $\overleftrightarrow{EX}$, de modo que $\overleftrightarrow{EX} \perp \overleftrightarrow{AB}$

CONSTRUCCIÓN: Figura 1.63(b): utilizando X como el centro, marque arcos de radios iguales en cada lado de X hasta intersecar $\overleftrightarrow{AB}$ en C y D.

Figura 1.63(d): ahora, utilizando C y D como centros marque arcos de radios iguales con una longitud mayor que XD de manera que estos arcos se intersequen arriba (como se muestra) o bien abajo de $\overleftrightarrow{AB}$.

Designando el punto de intersección E trace $\overleftrightarrow{EX}$, que es la recta deseada; es decir, $\overleftrightarrow{EX} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

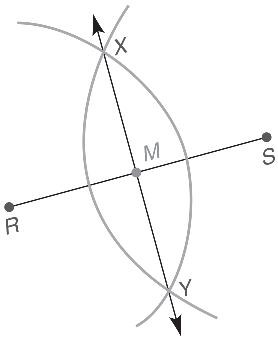


Figura 1.64

El teorema en el que se basa la construcción 5 es una consecuencia del postulado del transportador y se enunció sin demostración.

TEOREMA 1.6.3

En un plano hay exactamente una recta perpendicular a una recta dada en cualquier punto en la recta.

La construcción 2, que se utilizó para localizar el punto medio de un segmento de recta en la sección 1.2, también es el método para construir el bisector perpendicular de un segmento de recta. En la figura 1.64, $\overleftrightarrow{XY}$ es el bisector perpendicular de $\overline{RS}$. El teorema siguiente se puede comprobar mediante métodos que se desarollan más adelante en este libro.

GEE

Ejercicios 10-14

TEOREMA 1.6.4

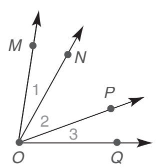
El bisector perpendicular de un segmento de recta es único.

Ejercicios 1.6

En los ejercicios 1 y 2 proporcione razones.

1. *Dado:* $\angle 1 \cong \angle 3$

Demuestre: $\angle MOP \cong \angle NOQ$



DEMOSTRACIÓN

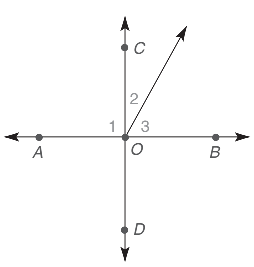
Enunciados	Razones
1. $\angle 1 \cong \angle 3$	1. ?
2. $m\angle 1 = m\angle 3$	2. ?
3. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle MOP$ y $m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle NOQ$	3. ?
4. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$	4. ?
5. $m\angle MOP = m\angle NOQ$	5. ?
6. $\angle MOP \cong \angle NOQ$	6. ?

2. *Dado:* $\overleftrightarrow{AB}$ interseca $\overleftrightarrow{CD}$ en O de modo que $\angle 1$ sea un $\angle$ recto. (Utilice la figura correspondiente a este ejercicio.)

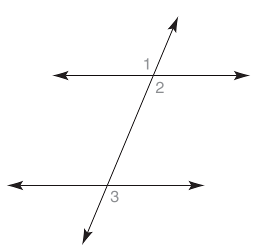
Demuestre: $\angle 2$ y $\angle 3$ son complementarios

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overrightarrow{AB}$ interseca $\overrightarrow{CD}$ en O	1. ?
2. $\angle AOB$ es un $\angle$ llano, por tanto $m\angle AOB = 180$	2. ?
3. $m\angle 1 + m\angle COB = m\angle AOB$	3. ?
4. $m\angle 1 + m\angle COB = 180$	4. ?
5. $\angle 1$ es un ángulo recto	5. ?
6. $m\angle 1 = 90$	6. ?
7. $90 + m\angle COB = 180$	7. ?
8. $m\angle COB = 90$	8. ?
9. $m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle COB$	9. ?
10. $m\angle 2 + m\angle 3 = 90$	10. ?
11. $\angle 2$ y $\angle 3$ son complementarios	11. ?



Ejercicio 2



Ejercicio 3

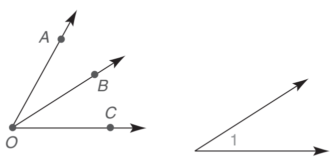
En los ejercicios 3 y 4 proporcione enunciados.

3. *Dado:* $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 2 \cong \angle 3$
Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 3$
(Utilice la figura correspondiente a este ejercicio.)

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. ?	2. Propiedad transitiva de la congruencia

4. *Dado:* $m\angle AOB = m\angle 1$
$m\angle BOC = m\angle 1$
Demuestre: $\overrightarrow{OB}$ biseca $\angle AOC$

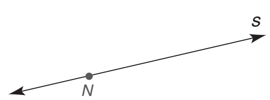


DEMOSTRACIÓN

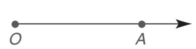
Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. ?	2. Sustitución
3. ?	3. Los ángulos con medidas iguales son congruentes
4. ?	4. Si un rayo divide un ángulo en dos ángulos congruentes, entonces el rayo biseca el ángulo

En los ejercicios 5 al 9 utilice un compás y una regla para completar las construcciones.

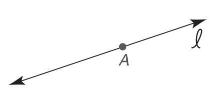
5. *Dado:* El punto N en la recta s
Construya: La recta m a través de N de modo que $m \perp s$



6. *Dado:* $\overrightarrow{OA}$
Construya: El ángulo recto BOA
(SUGERENCIA: Utilice una regla para extender $\overrightarrow{OA}$ hacia la izquierda.)

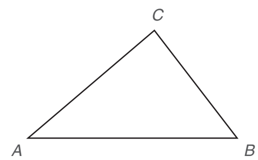


7. *Dado:* La recta ℓ que contiene el punto A
Construya: Un ángulo de 45° con el vértice en A



8. *Dado:* $\overline{AB}$
Construya: El bisector perpendicular de $\overline{AB}$

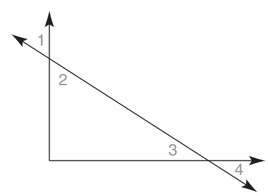
9. *Dado:* El triángulo ABC
Construya: Los bisectores perpendiculares de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$



10. Deduzca una conclusión con base en los resultados del ejercicio 9.

En los ejercicios 11 y 12 proporcione los enunciados y las razones faltantes.

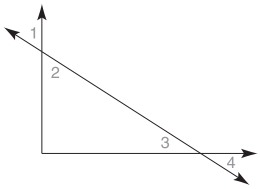
11. *Dado:* $\angle$s 1 y 3 son complementarios
$\angle$s 2 y 3 son complementarios
Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 2$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle$s 1 y 3 son complementarios; $\angle$s 2 y 3 son complementarios	1. ?
2. $m\angle 1 + m\angle 3 = 90$; $m\angle 2 + m\angle 3 = 90$	2. La suma de las medidas de $\angle$s complementarios es 90
(2) 3. $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	3. ?
4. ?	4. Propiedad de sustracción de la igualdad
(4) 5. ?	5. Si dos $\angle$s son = en medida, son $\cong$

12. *Dado:* $\angle 1 \cong \angle 2$; $\angle 3 \cong \angle 4$
$\angle$s 2 y 3 son complementarios
Demuestre: $\angle$s 1 y 4 son complementarios



DEMOSTRACIÓN

	Enunciados	Razones
	1. $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$	1. ?
	2. ? y ?	2. Si dos $\angle$s son $\cong$, entonces sus medidas son iguales
	3. $\angle$s 2 y 3 son complementarios	3. ?
(3)	4. ?	4. La suma de las medidas de $\angle$s complementarios es 90
(2), (4)	5. $m\angle 1 + m\angle 4 = 90$	5. ?
	6. ?	6. Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90, entonces los ángulos son complementarios

13. La relación "es perpendicular a" ¿tiene una propiedad reflexiva (considere la recta ℓ)? ¿Una propiedad simétrica (considere las rectas ℓ y m)? ¿Una propiedad transitiva (considere las rectas ℓ, m y n)?

14. La relación "es mayor que", ¿tiene una propiedad reflexiva (considere el número real a)? ¿Una propiedad simétrica (considere los números reales a y b)? ¿Una propiedad transitiva (considere los números reales a, b y c)?

15. La relación "es complementario a", ¿tiene una propiedad reflexiva (considere un ángulo)? ¿Una propiedad simétrica (considere dos ángulos)? ¿Una propiedad transitiva (considere tres ángulos)?

16. La relación "es menor que", ¿tiene una propiedad reflexiva (considere un número)? ¿Una propiedad simétrica (considere dos números)? ¿Una propiedad transitiva (considere tres números)?

17. La relación "es un hermano de", ¿tiene una propiedad reflexiva (considere un hombre)? ¿Una propiedad simétrica (considere dos hombres)? ¿Una propiedad transitiva (considere tres hombres)?

18. La relación "está enamorado de", ¿tiene una propiedad reflexiva (considere una persona)? ¿Una propiedad simétrica (considere dos personas)? ¿Una propiedad transitiva (considere tres personas)?

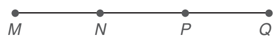
19. En este libro se han utilizado numerosos símbolos y abreviaturas. En este ejercicio indique qué palabra está representada o abreviada por cada uno de lo siguiente:
a) $\perp$ b) $\angle$s c) sup. d) rt. e) $m\angle 1$

20. En este libro se han empleado numerosos símbolos y abreviaturas. En este ejercicio indique qué palabra se representa o abrevia por cada uno de lo siguiente:
a) post. b) $\cup$ c) $\varnothing$ d) $<$ e) pto.

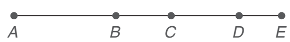
21. En este libro se han empleado numerosos símbolos y abreviaciones. En este ejercicio indique qué palabra está representada o abreviada por cada uno de los siguientes:
a) ady. b) comp. c) $\overrightarrow{AB}$ d) $\cong$ e) vert.

22. Si no hubiese una restricción comprensible para las rectas en un plano en el teorema 1.6.3, el teorema sería falso. Explique por qué el enunciado siguiente es falso: "En el espacio hay exactamente una recta perpendicular a una recta dada en cualquier punto en la recta."

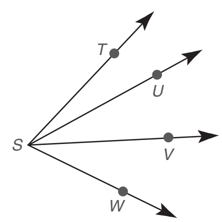
23. Demuestre la propiedad de adición del segmento extendido utilizando el esquema, lo Dado y Demuestre que siguen.
Dado: M-N-P-Q en $\overline{MQ}$
Demuestre: $MN + NP + PQ = MQ$



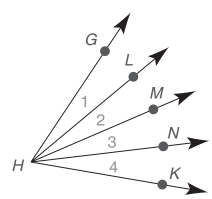
24. El postulado segmento-adición se puede generalizar como sigue: "La longitud de un segmento de recta es igual a la suma de las longitudes de sus partes." Enuncie una conclusión general acerca de AE con base en la figura siguiente.



25. Demuestre la propiedad de adición del ángulo extendido utilizando el esquema, lo Dado y Demuestre que siguen.
Dado: $\angle TSW$ con $\overrightarrow{SU}$ y $\overrightarrow{SV}$
Demuestre: $m\angle TSW = m\angle TSU + m\angle USV + m\angle VSW$



26. El postulado ángulo-adición se puede generalizar como sigue: "La medida de un ángulo es igual a la suma de las medidas de sus partes." Enuncie una conclusión general acerca de $m\angle GHK$ con base en la figura que se muestra.



27. Si no hubiese una restricción comprensible en el teorema 1.6.4, el teorema sería falso. Explique por qué el enunciado siguiente es falso: "En el espacio el bisector perpendicular de un segmento de recta es único."

***28.** En la demostración a la derecha proporcione las razones faltantes.

Dado: $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios
$\angle 1$ es agudo

Demuestre: $\angle 2$ también es agudo

DEMOSTRACIÓN

	Enunciados	Razones
	1. $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios	1. ?
(1)	2. $m\angle 1 + m\angle 2 = 90$	2. ?
	3. $\angle 1$ es agudo	3. ?
(3)	4. Donde $m\angle 1 = x$, $0 < x < 90$	4. ?
(2)	5. $x + m\angle 2 = 90$	5. ?
(5)	6. $m\angle 2 = 90 - x$	6. ?
(4)	7. $-x < 0 < 90 - x$	7. ?
(7)	8. $90 - x < 90 < 180 - x$	8. ?
(7), (8)	9. $0 < 90 - x < 90$	9. ?
(6), (9)	10. $0 < m\angle 2 < 90$	10. ?
(10)	11. $\angle 2$ es agudo	11. ?

1.7 La demostración formal de un teorema

CONCEPTOS CLAVE

Demostración formal de un teorema | Recíproco de un teorema | Demostración gráfica (informal) de un teorema

Recuerde de la sección 1.3 que los enunciados que se deducen de manera lógica a partir de términos conocidos indefinidos, definiciones y postulados se denominan *teoremas*. La demostración formal de un teorema tiene varias partes; para comprender cómo están relacionadas estas partes considere cuidadosamente los términos *hipótesis* y *conclusión*. La hipótesis de un enunciado describe la situación dada (Dado), en tanto que la conclusión describe qué se necesita establecer (Demuestre). Cuando un enunciado tiene la forma "Si H, entonces C", la hipótesis es H y la conclusión es C. Algunos teoremas se deben replantear para ajustarse a la forma "Si… , entonces…" de manera que la hipótesis y la conclusión se reconozcan con facilidad.

EJEMPLO 1

Proporcione la hipótesis H y la conclusión C para cada uno de estos enunciados.

a) Si dos rectas se intersecan, entonces los ángulos verticales formados son congruentes.
b) Todos los ángulos son congruentes.
c) Las rectas paralelas no se intersecan.
d) Las rectas son perpendiculares cuando convergen para formar ángulos adyacentes congruentes.

Solución

a) Como está H: Dos rectas se intersecan.
C: Los ángulos verticales formados son congruentes.

b) Replanteado Si dos ángulos son rectos, entonces estos ángulos son congruentes.
H: Dos ángulos son rectos.
C: Los ángulos son cogruentes.

c) Replanteado Si dos rectas son paralelas, entonces estas rectas no se intersecan.
H: Dos rectas son paralelas.
C: Las rectas no se intersecan.

d) Reordenado Cuando (si) dos rectas convergen para formar ángulos adyacentes congruentes, estas rectas son perpendiculares.
H: Dos rectas convergen para formar ángulos adyacentes congruentes.
C: Las rectas son perpendiculares. ■

GEE
Ejercicios 1-3

¿Por qué se necesita distinguir entre la hipótesis y la conclusión? Para un teorema la hipótesis determina el Esquema y lo Dado, proporcionando una descripción de las características conocidas del esquema. La conclusión determina la relación (Demuestre) que se quiere establecer en el esquema.

LAS PARTES ESCRITAS DE UNA DEMOSTRACIÓN FORMAL

En el recuadro siguiente se indican las cinco partes necesarias de una demostración formal en el orden en que se deben desarrollar.

PARTES ESENCIALES DE LA DEMOSTRACIÓN FORMAL DE UN TEOREMA

1. *Enunciado:* Establece el teorema que se quiere comprobar.
2. *Esquema:* Representa la hipótesis del teorema.
3. *Dado:* Describe el esquema de acuerdo con la información encontrada en la hipótesis del teorema.
4. *Demuestre:* Describe el esquema de acuerdo con la afirmación hecha en la conclusión del teorema.
5. *Demostración:* Ordena una lista de afirmaciones (enunciados) y justificaciones (razones), iniciando con lo Dado y terminando con Demuestre; debe haber un flujo lógico en esta demostración.

El aspecto más difícil de una demostración formal es el proceso de pensamiento que se debe colocar entre las partes 4 y 5. Este plan de juego o análisis comprende deducir y ordenar conclusiones basadas en la situación dada. Se debe actuar de cierta forma como un abogado, seleccionando las afirmaciones que ayuden a probar su caso mientras desecha las superfluas. En el proceso de ordenar los enunciados puede ser benéfico pensar en orden inverso, algo así como:

El enunciado Demuestre ¿sería verdadero si qué otra cosa fuera verdadera?

La demostración final se debe configurar en un orden tal que permita razonar desde un enunciado anterior hasta una afirmación posterior utilizando la deducción (quizás varias veces).

$$\begin{array}{rll}
\text{H:} & \text{hipótesis} & \longleftarrow \ \textbf{enunciado de demostración} \\
\underline{\text{P:}} & \text{principio} & \longleftarrow \ \textbf{razón de demostración} \\
\therefore \text{C:} & \text{conclusión} & \longleftarrow \ \textbf{siguiente enunciado en la demostración}
\end{array}$$

Considere el teorema siguiente, que se comprobó en el ejemplo 1 de la sección 1.6.

TEOREMA 1.6.1

Si dos rectas son perpendiculares, entonces convergen para formar ángulos rectos.

EJEMPLO 2

Escriba las partes de la demostración formal del teorema 1.6.1.

Solución

1. Establezca el teorema.
   Si dos rectas son perpendiculares, entonces convergen para formar ángulos rectos.
2. La hipótesis es H: dos rectas son perpendiculares.
   Haga un esquema que se ajuste a esta descripción.
   (Vea la figura 1.65.)
3. Escriba el enunciado Dado, empleando el esquema y con base en la hipótesis H:
   Dos rectas son $\perp$.
   Dado: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ se intersecan en E
4. Escriba el enunciado Demuestre, utilizando el esquema y con base en la conclusión C:
   Convergen para formar ángulos rectos.
   Demuestre: $\angle AEC$ es un ángulo recto.
5. Construya la demostración. Esta demostración formal se encuentra en el ejemplo 1, sección 1.6.

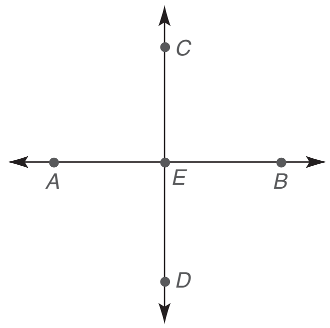


Figura 1.65

GEE
Ejercicios 4, 5

RECÍPROCO DE UN ENUNCIADO

El recíproco del enunciado "Si *P*, entonces *Q*" es "Si *Q*, entonces *P*". Es decir, el recíproco de un enunciado dado intercambia su hipótesis y su conclusión. Considere lo siguiente:

Enunciado: Si una persona vive en Londres, entonces vive en Inglaterra.

Recíproco: Si una persona vive en Inglaterra, entonces vive en Londres.

En este caso, el enunciado dado es verdadero, en tanto que su recíproco es falso. En ocasiones el recíproco de un enunciado verdadero también es verdadero. De hecho, en el ejemplo 3 se presenta la demostración formal de un teorema que es el recíproco del teorema 1.6.1.

Una vez que se ha comprobado un teorema se puede citar después, en comprobaciones posteriores, como una razón. Así pues, cualquier teorema encontrado en esta sección se puede utilizar como justificación en problemas de demostración encontrados en secciones posteriores.

¡La demostración que sigue está casi completa! Es difícil proporcionar una demostración formal completa que explique el "cómo" y que simultáneamente presente la forma final depurada. El ejemplo 2 sólo busca el "cómo", en tanto que el ejemplo 3 ilustra la forma pulida. Lo que no se observa en el ejemplo 3 son el proceso de pensamiento y el borrador necesarios para completar el rompecabezas.

¡La demostración de un teorema no es única! Por ejemplo, los esquemas de los estudiantes no necesitan concordar, aunque se debe indicar la misma relación. Ciertamente, es probable que se elijan letras diferentes para el esquema que ilustra la hipótesis.

Advertencia

No debe trazar esquemas que comprendan cualidades aparte de las descritas en la hipótesis; ¡ni su esquema debe indicar menos cualidades de las que establece la hipótesis!

TEOREMA 1.7.1

Si dos rectas convergen para formar un ángulo recto, entonces estas rectas son perpendiculares.

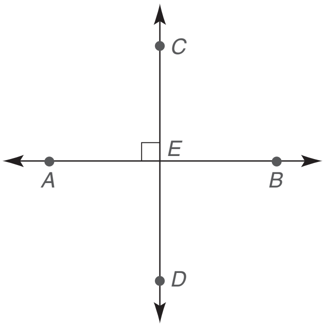


Figura 1.66

EJEMPLO 3

Proporcione una demostración formal para el teorema 1.7.1.

Si dos rectas convergen para formar un ángulo recto, entonces estas rectas son perpendiculares.

Dado: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se intersecan en E de manera que $\angle AEC$ es un ángulo recto (figura 1.66)

Demuestre: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$

DEMOSTRACIÓN

	Enunciados	Razones
	1. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ se intersecan de modo que $\angle AEC$ es un ángulo recto	1. Dado
	2. $m\angle AEC = 90$	2. Si un $\angle$ es un $\angle$ recto, su medida es 90
	3. $\angle AEB$ es un $\angle$ llano, por tanto $m\angle AEB = 180$	3. Si un $\angle$ es $\angle$ llano, su medida es 180
	4. $m\angle AEC + m\angle CEB = m\angle AEB$	4. Postulado ángulo-adición
(2), (3), (4)	5. $90 + m\angle CEB = 180$	5. Sustitución
(5)	6. $m\angle CEB = 90$	6. Propiedad de sustracción de la igualdad
(2), (6)	7. $m\angle AEC = m\angle CEB$	7. Sustitución
	8. $\angle AEC \cong \angle CEB$	8. Si dos $\angle$s tienen medidas $=$, los $\angle$s son $\cong$
	9. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$	9. Si dos rectas forman $\angle$s, adyacentes $\cong$ estas rectas son $\perp$

■

GEE
Ejemplos 6-8

Ahora varios teoremas adicionales se han establecido, sus demostraciones se dejan como ejercicios. Esta lista contiene teoremas que son muy útiles cuando se citan como razones en comprobaciones posteriores. Una demostración formal se proporciona sólo para el teorema 1.7.6.

TEOREMA 1.7.2

Si dos ángulos son complementarios para el mismo ángulo (o para ángulos con gruentes), entonces los ángulos son congruentes.

Vea en el ejercicio 25 un esquema que describe el teorema 1.7.2.

TEOREMA 1.7.3

Si dos ángulos son suplementarios para el mismo ángulo (o ángulos congruentes), entonces los ángulos son congruentes.

Vea en el ejercicio 26 un esquema que describe el teorema 1.7.3.

TEOREMA 1.7.4

Cualesquiera dos ángulos rectos son congruentes.

Exploración tecnológica

Utilice software de cómputo si dispone de él.

1. Trace $\overleftrightarrow{EG}$ que contenga el punto *F*. También trace $\overrightarrow{FH}$ como en la figura 1.68.
2. Mida $\angle 3$ y $\angle 4$.
3. Demuestre que $m\angle 3 + m\angle 4 = 180°$. (Puede ser que la respuesta no sea perfecta.)

TEOREMA 1.7.5

Si los lados externos de dos ángulos agudos adyacentes forman rayos perpendiculares, entonces los ángulos son complementarios.

Para el teorema 1.7.5 se creó una demostración informal denominada demostración gráfica. Si bien esta demostración está menos detallada, ¡el impacto de la explicación es el mismo! Ésta es la primera de varias "comprobaciones gráficas" que se presentan en este libro.

DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA 1.7.5

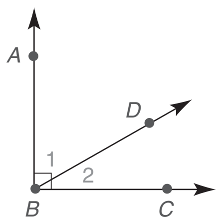


Figura 1.67

Dado: $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$

Demuestre: $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios

Demostración: Se observa que $\angle 1$ y $\angle 2$ son partes de un ángulo recto.

Entonces $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$, por tanto $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ La razón final en la demostración

Regla general: La última razón explica por qué el último *enunciado* debe ser verdadero. Nunca escriba "Demuestre" para cualquier razón.

Ilustración: La razón final en la demostración del teorema 1.7.6 es la definición de ángulos suplementarios: si la suma de medidas de dos ángulos es 180°, los ángulos son suplementarios.

EJEMPLO 4

Estudie la demostración formal del teorema 1.7.6

TEOREMA 1.7.6

Si los lados externos de dos ángulos adyacentes forman una línea recta, entonces estos ángulos son suplementarios.

Dado: $\angle 3$ y $\angle 4$ y $\overleftrightarrow{EG}$ (figura 1.68)

Demuestre: $\angle 3$ y $\angle 4$ son suplementarios

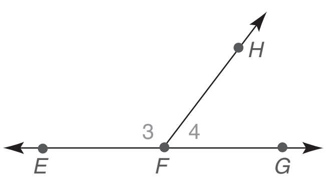


Figura 1.68

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle 3$ y $\angle 4$ y $\overleftrightarrow{EG}$	1. Dado
2. $m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle EFG$	2. Postulado ángulo-adición
3. $\angle EFG$ es un ángulo llano	3. Si los lados de un $\angle$ son rayos opuestos, es un $\angle$ llano
4. $m\angle EFG = 180$	4. La medida de un $\angle$ llano es 180
5. $m\angle 3 + m\angle 4 = 180$	5. Sustitución
6. $\angle 3$ y $\angle 4$ son suplementarios	6. Si la suma de las medidas de dos $\angle$s es 180, los $\angle$s son suplementarios

■

GÉE

Ejercicios 9, 12

Los dos teoremas finales en esta sección se establecen por conveniencia. Se sugiere que el estudiante haga esquemas para ilustrar los teoremas 1.7.7 y 1.7.8.

TEOREMA 1.7.7

Si dos segmentos de recta son congruentes, entonces sus puntos medios separan dichos segmentos en cuatro segmentos congruentes.

GEE

Ejercicios 13, 14

TEOREMA 1.7.8

Si dos ángulos son congruentes, entonces sus bisectores separan dichos ángulos en cuatro ángulos congruentes.

Ejercicios 1.7

En los ejercicios 1 al 6 establezca la hipótesis H y la conclusión C para cada enunciado.

1. Si un segmento de recta se biseca, entonces cada uno de los segmentos iguales tiene la mitad de la longitud del segmento original.

2. Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.

3. Todos los cuadrados son cuadriláteros.

4. Cada polígono regular tiene ángulos interiores congruentes.

5. Dos ángulos son congruentes si cada uno es un ángulo recto.

6. Las longitudes de lados correspondientes de polígonos similares son proporcionales.

7. Nombre, en orden, las cinco partes de la demostración formal de un teorema.

8. ¿Cuál parte (hipótesis o conclusión) de un teorema determina
a) el Esquema?
b) lo Dado?
c) Demuestre?

9. ¿Cuál parte (Dado o Demuestre) de la demostración depende de
a) la hipótesis del teorema?
b) la conclusión del teorema?

10. ¿Cuál de lo siguiente se puede citar como una razón en una demostración?
a) Dado
b) Demuestre
c) Definición
d) Postulado

Haga un esquema para cada teorema establecido en los ejercicios 11 al 16. Con base en su esquema, escriba un Dado y un Demuestre para el teorema.

11. Si dos rectas son perpendiculares, entonces estas rectas convergen para formar un ángulo recto.

12. Si dos rectas convergen para formar un ángulo recto, entonces estas rectas son perpendiculares.

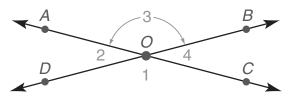
13. Si dos ángulos son complementarios para el mismo ángulo, entonces estos ángulos son congruentes.

14. Si dos ángulos son suplementarios para el mismo ángulo, entonces estos ángulos son congruentes.

15. Si dos rectas se intersecan, entonces los ángulos verticales formados son congruentes.

16. Cualesquiera dos ángulos rectos son congruentes.

En los ejercicios 17 al 24 utilice el esquema y aplique los teoremas de esta sección.



17. Si $m\angle 1 = 125°$, encuentre $m\angle 2$, $m\angle 3$ y $m\angle 4$.

18. Si $m\angle 2 = 47°$, encuentre $m\angle 1$, $m\angle 3$ y $m\angle 4$.

19. Si $m\angle 1 = 3x + 10$ y $m\angle 3 = 4x - 30$, encuentre x y $m\angle 1$.

20. Si $m\angle 2 = 6x + 8$ y $m\angle 4 = 7x$, encuentre x y $m\angle 2$.

21. Si $m\angle 1 = 2x$ y $m\angle 2 = x$, encuentre x y $m\angle 1$.

22. Si $m\angle 2 = x + 15$ y $m\angle 3 = 2x$, encuentre x y $m\angle 2$.

23. Si $m\angle 2 = \frac{x}{2} - 10$ y $m\angle 3 = \frac{x}{3} + 40$, encuentre x y $m\angle 2$.

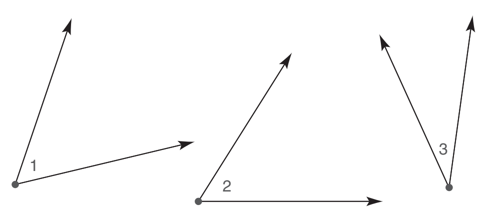
24. Si $m\angle 1 = x + 20$ y $m\angle 4 = \frac{x}{3}$, encuentre x y $m\angle 4$.

En los ejercicios 25 al 33 complete la demostración formal de cada teorema.

25. Si dos ángulos son complementarios para el mismo ángulo, entonces dichos ángulos son congruentes.

Dado: $\angle 1$ es complementario para $\angle 3$
$\angle 2$ es complementario para $\angle 3$

Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 2$



DEMOSTRACIÓN

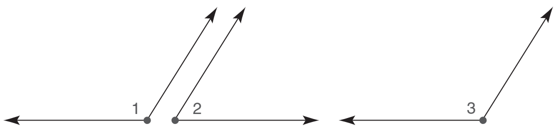
Enunciados	Razones
1. $\angle 1$ es comp. a $\angle 3$ $\angle 2$ es comp. a $\angle 3$	1. ?
2. $m\angle 1 + m\angle 3 = 90$ $m\angle 2 + m\angle 3 = 90$	2. ?
3. $m\angle 1 + m\angle 3 =$ $m\angle 2 + m\angle 3$	3. ?
4. $m\angle 1 = m\angle 2$	4. ?
5. $\angle 1 \cong \angle 2$	5. ?

26. Si dos ángulos son suplementarios para el mismo ángulo, entonces dichos ángulos son congruentes.

Dado: $\angle 1$ es suplementario para $\angle 2$
$\angle 3$ es suplementario para $\angle 2$

Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 3$

(SUGERENCIA: Consulte el ejercicio 25.)



Ejercicio 3

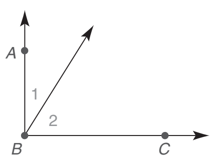
27. Si dos rectas se intersecan, los ángulos verticales son congruentes.

28. Cualesquiera dos ángulos rectos son congruentes.

29. Si los lados exteriores de dos ángulos agudos adyacentes forman rayos perpendiculares, entonces estos ángulos son complementarios.

Dado: $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$

Demuestre: $\angle 1$ es complementario a $\angle 2$



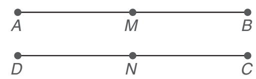
DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$	1. ?
2. ?	2. Si dos rayos son $\perp$, entonces convergen para formar un $\angle$ rt.
3. $m\angle ABC = 90$	3. ?
4. $m\angle ABC = m\angle 1 + m\angle 2$	4. ?
5. $m\angle 1 + m\angle 2 = 90$	5. Sustitución
6. ?	6. Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90, entonces los ángulos son complementarios

30. Si dos segmentos de recta son congruentes, entonces sus puntos medios separan dichos segmentos en cuatro segmentos congruentes.

Dado: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
M es el punto medio de $\overline{AB}$
N es el punto medio de $\overline{DC}$

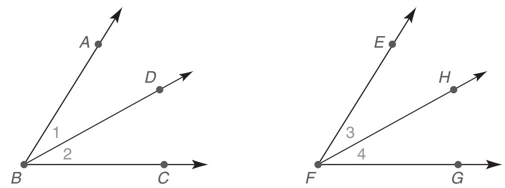
Demuestre: $\overline{AM} \cong \overline{MB} \cong \overline{DN} \cong \overline{NC}$



31. Si dos ángulos son congruentes, entonces sus bisectores separan dichos ángulos en cuatro ángulos congruentes.

Dado: $\angle ABC \cong \angle EFG$
$\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$
$\overrightarrow{FH}$ biseca $\angle EFG$

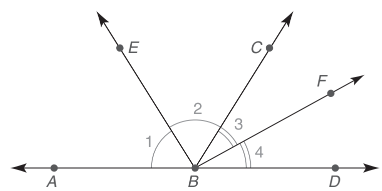
Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$



32. Los bisectores de dos ángulos supl. adyacentes forman un ángulo recto.

Dado: $\angle ABC$ es suplementario para $\angle CBD$
$\overrightarrow{BE}$ biseca $\angle ABC$
$\overrightarrow{BF}$ biseca $\angle CBD$

Demuestre: $\angle EBF$ es un ángulo recto



33. El suplemento de un ángulo agudo es un ángulo obtuso.

(SUGERENCIA: Utilice el ejercicio 28 de la sección 1.6 como guía.)

PERSPECTIVA HISTÓRICA

El desarrollo de la geometría

Uno de los primeros escritos sobre conocimiento geométrico aparece en el papiro de Rhind, una colección de documentos que data de hace más de 1 000 años antes de Cristo. En este documento, Ahmes (un escriba egipcio) describe cómo se redibujaron las rectas Norte-Sur y Este-Oeste del Río Nilo. Se utilizó la astronomía para trazar la recta Norte-Sur. El resto lo realizaron personas conocidas como "sujetadores de cuerdas". Al atar nudos en una cuerda fue posible separar la cuerda en segmentos con longitudes que tenían una razón 3 a 4 a 5. Los nudos se sujetaron en estacas de tal manera que se formaba un triángulo recto. En la figura 1.69 el ángulo recto se forma de tal modo que un lado (de longitud 4, como se muestra) se encuentra en la recta Norte-Sur y el otro lado (de longitud 3, como se muestra) se encuentra en la recta Este-Oeste.

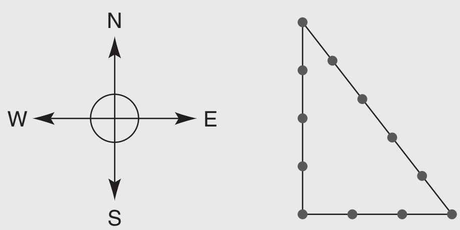


Figura 1.69

El principio que utilizaron los sujetadores de cuerda se conoce como teorema de Pitágoras. Sin embargo, también se sabe que los antiguos chinos conocían esta relación. Es decir, el teorema de Pitágoras era conocido y aplicado muchos siglos antes de la época de Pitágoras (el matemático griego por quien se nombra el teorema).

Ahmes describe otras características de la geometría que conocían los egipcios. Tal vez la más impresionante fue que su aproximación de π fue 3.1604. Hasta cuatro lugares decimales de precisión, ahora sabemos que el valor correcto de π es 3.1416.

Al igual que los egipcios, los chinos trataron la geometría de una manera práctica. En sus construcciones y diseños, los chinos utilizaron la regla, la escuadra, el compás y el nivel. A diferencia de los egipcios y los chinos, los griegos formalizaron y ampliaron la base del conocimiento de la geometría como un propósito intelectual.

De acuerdo con el escriba griego Proclo (alrededor de 50 a.C.), Tales (625-547 a.C.) fue el primero que estableció comprobaciones deductivas para varios de los teoremas de geometría conocidos. Proclo también hizo notar que fue Euclides (330-275 a.C.) quien colectó, resumió, ordenó y verificó la gran cantidad de conocimiento de geometría en su época. La obra de Euclides, *Elementos,* fue el primer libro de geometría. La mayor parte de lo que se encontraba en *Elementos* es el núcleo del conocimiento de la geometría y por tanto también se puede encontrar en el presente libro.

PERSPECTIVA DE APLICACIÓN

Patrones

En gran parte del estudio de las matemáticas se buscan patrones relacionados con el conjunto de los números cardinales $N = \{1,2,3,4,5\ldots\}$. Algunos de estos patrones son geométricos y se les dan nombres especiales que reflejan la configuración de conjuntos de puntos. Por ejemplo, el conjunto de los *números cuadrados* se muestra de forma geométrica en la figura 1.70 y, por supuesto, corresponde a los números 1, 4, 9, 16,….

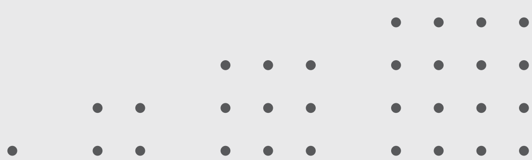


Figura 1.70

EJEMPLO 1

Encuentre el cuarto número en el patrón de números triangulares que se muestra en la figura 1.71(a).

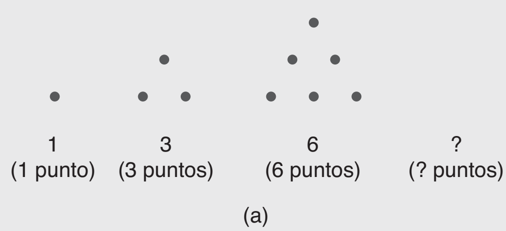


Figura 1.71(a)

Solución Agregando una fila de 4 puntos en la parte inferior, se tiene el diagrama que se muestra en la figura 1.71(b), que contiene 10 puntos. El cuarto número triangular es 10.

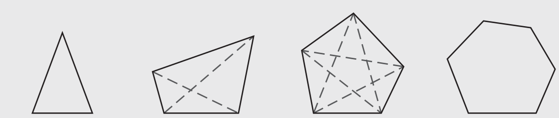
(b)

Figura 1.71(b)

Algunos patrones de la geometría conducen a principios conocidos como postulados y teoremas. Uno de los principios que exploraremos en el ejemplo siguiente se basa en el número total de *diagonales* encontradas en un polígono con un número de lados específico. Una diagonal de un polígono (figura con muchos lados) une entre sí dos vértices no consecutivos del polígono. Por supuesto, al unir cualesquiera dos vértices de un triángulo, determinará un lado; por tanto, un triángulo no tiene diagonales. En el ejemplo 2 se muestran tanto el número de lados del polígono como el número de diagonales.

EJEMPLO 2

Encuentre el número total de diagonales para un polígono de 6 lados.



3 lados	4 lados	5 lados	6 lados
0 diagonales	2 diagonales	5 diagonales	? diagonales

Figura 1.72(a)

Solución Al trazar todas las diagonales posibles, como se muestra en la figura 1.72(b), y contarlas ¡se determina que hay un total de 9 diagonales!

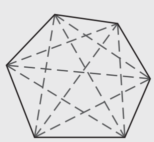


Figura 1.72(b)

Ciertos patrones geométricos se utilizan para evaluar a los estudiantes, como en las pruebas de inteligencia (CI) o en exámenes de admisión universitarios. Un ejemplo simple sería predecir la siguiente (cuarta) figura en el patrón de cuadrados que se muestra en la figura 1.73(a).

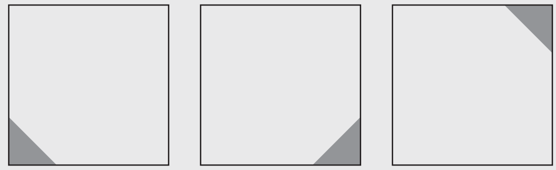


Figura 1.73(a)

Se gira el cuadrado una vez más para obtener la cuarta figura como se muestra en la figura 1.73(b).

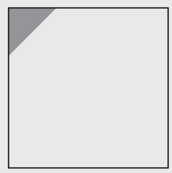


Figura 1.73(b)

EJEMPLO 3

Los puntos medios de los lados de un *cuadrado* se utilizan para generar figuras nuevas en la secuencia que se muestra en la figura 1.74(a). Trace la cuarta figura.

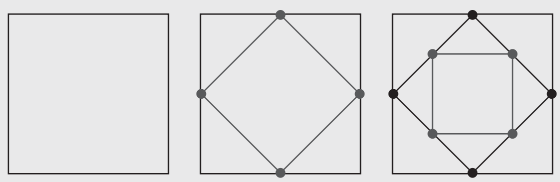


Figura 1.74(a)

Solución Al continuar agregando y uniendo puntos medios en la tercera figura, se forma una figura como la que se muestra en la figura 1.74(b).

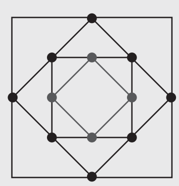


Figura 1.74(b)

Observe que cada nueva figura dentro de la anterior ¡también es un cuadrado!

Resumen

UNA VISTA RETROSPECTIVA AL CAPÍTULO 1

Nuestro objetivo en este capítulo ha sido introducir la geometría. Se analizaron los tipos de razonamiento que se emplean para desarrollar relaciones geométricas. Se describió el uso de las herramientas de medición (regla y transportador). Se encontraron los cuatro elementos de un sistema matemático: términos indefinidos, definiciones, postulados y teoremas. Los términos indefinidos fueron necesarios para establecer la base para definir términos nuevos. Los postulados fueron necesarios para establecer la base para los teoremas que aquí se demostraron y para los teoremas que se encuentran más adelante. Las construcciones que se presentaron en este capítulo incluyeron el bisector de un ángulo y la perpendicular a una recta en un punto de la misma.

UNA VISTA PRELIMINAR DEL CAPÍTULO 2

Los teoremas que se comprobarán en el capítulo siguiente se basan en un postulado conocido como postulado paralelo. Se introducirá un método de demostración nuevo, denominado demostración indirecta; se empleará en capítulos posteriores. Aunque muchos de los teoremas en el capítulo 2 abordan las rectas paralelas, varios teoremas en el capítulo tratan sobre los ángulos de un polígono. Se estudiarán la simetría y las transformaciones.

CONCEPTOS CLAVE

1.1

Enunciado • Variable • Conjunción • Disyunción • Negación • Implicación (condicional) • Hipótesis • Conclusión • Intuición • Inducción • Deducción • Argumento (válido y no válido) • Ley de separación • Conjunto • Subconjuntos • Diagrama de Venn • Intersección • Unión

1.2

Punto • Recta • Plano • Puntos colineales • Vértice • Segmento de recta • Puntos intermedios • Punto medio • Congruente • Transportador • Rectas paralelas • Bisecar • Ángulo llano • Ángulo recto • Intersecar • Perpendicular • Compás • Construcciones • Círculo • Arco • Radio

1.3

Sistema matemático • Axioma o postulado • Suposición • Teorema • Postulado de la regla • Distancia • Postulado segmento-adición • Segmentos congruentes • Punto medio de un segmento de recta • Bisector de un segmento de recta • Unión • Rayo • Rayos opuestos • Intersección de dos figuras geométricas • Rectas paralelas • Plano • Puntos coplanares • Espacio • Planos paralelo, vertical y horizontal

1.4

Ángulo • Lados de un ángulo • Vértice de un ángulo • Postulado del transportador • Ángulos agudo, recto, obtuso, llano y reflejo • Postulado ángulo-adición • Ángulos adyacentes • Ángulos congruentes • Bisector de un ángulo • Ángulos complementarios • Ángulos suplementarios • Ángulos verticales

1.5

Propiedades algebraicas • Demostración

1.6

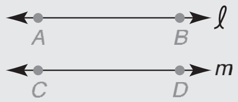
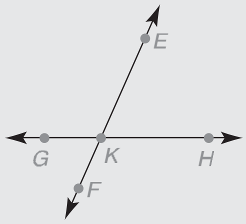
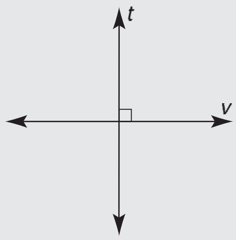
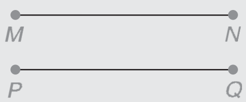
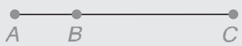
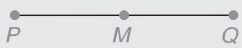
Rectas verticales y rectas horizontales • Rectas perpendiculares • Relaciones • Propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la congruencia • Relación de equivalencia • Bisector perpendicular de un segmento de recta

1.7

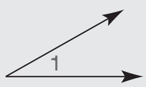
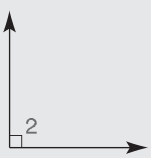
Demostración formal de un teorema • Recíproco de un teorema

TABLA 1.9 Una vista general del capítulo 1

▶ Relaciones de rectas y segmentos de recta

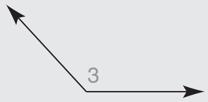
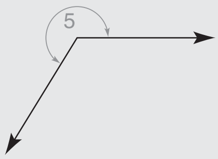
FIGURA	RELACIÓN	SÍMBOLOS
	Rectas paralelas (y segmentos)	$\ell \parallel m$ o $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$; $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
	Rectas intersecadas	$\overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{GH} = K$
	Rectas perpendiculares (*t* se muestra vertical, *v* se muestra horizontal)	$t \perp v$
	Segmentos de recta congruentes	$\overline{MN} \cong \overline{PQ}$; $MN = PQ$
	Punto *B* entre *A* y *C* en $\overline{AC}$	*A-B-C*; $AB + BC = AC$
	Punto *M* el punto medio de $\overline{PQ}$	$\overline{PM} \cong \overline{MQ}$; $PM = MQ$; $PM = \frac{1}{2}(PQ)$

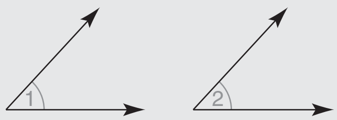
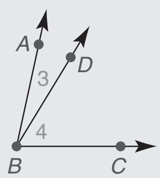
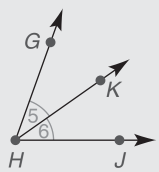
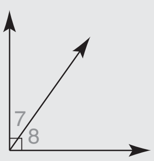
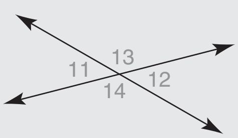
▶ Clasificación de ángulos (un ángulo)

FIGURA	TIPO	MEDIDA DEL ÁNGULO
	Ángulo agudo	$0° < m\angle 1 < 90°$
	Ángulo recto	$m\angle 2 = 90°$

continúa

TABLA 1.9 *(continuación)*

▶ Clasificación de ángulos (un ángulo)		
FIGURA	TIPO	MEDIDA DEL ÁNGULO
	Ángulo obtuso	$90° < m\angle 3 < 180°$
	Ángulo llano	$m\angle 4 = 180°$
	Ángulo reflejo	$180° < m\angle 5 < 360°$

▶ Relaciones angulares (dos ángulos)		
FIGURA	RELACIÓN	SÍMBOLOS
	Ángulos congruentes	$\angle 1 \cong \angle 2$; $m\angle 1 = m\angle 2$
	Ángulos adyacentes	$m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle ABC$
	Bisector de un ángulo ($\overrightarrow{HK}$ biseca $\angle GHJ$)	$\angle 5 \cong \angle 6$; $m\angle 5 = m\angle 6$; $m\angle 5 = \frac{1}{2}(m\angle GHJ)$
	Ángulos complementarios	$m\angle 7 + m\angle 8 = 90°$
	Ángulos suplementarios	$m\angle 9 + m\angle 10 = 180°$
	Ángulos verticales ($\angle 11$ y $\angle 12$; $\angle 13$ y $\angle 14$)	$\angle 11 \cong \angle 12$; $\angle 13 \cong \angle 14$

▶▶▶ Capítulo 1 EJERCICIOS DE REPASO

1. Mencione los cuatro componentes de un sistema matemático.
2. Mencione tres tipos de razonamiento.
3. Mencione las cuatro características de una buena definición.

En los ejercicios de repaso 4 al 6 nombre el tipo de razonamiento ilustrado.

4. Mientras observa al lanzador calentar, Phillip piensa: "Podré batear un *hit* contra él."
5. Laura está de campamento. El primer día su madre le lleva ropa adicional. El segundo día su madre le lleva otro par de zapatos. El tercer día su madre le lleva galletas. Laura concluye que su madre le llevará algo el cuarto día.
6. Sarah conoce la regla "un número (no 0) dividido entre sí mismo es igual a 1". El maestro le pregunta a Sarah "¿Cuánto es cinco dividido entre cinco?" Sarah dice: "La respuesta es uno."

En los ejercicios de repaso 7 y 8 establezca la hipótesis y la conclusión para cada enunciado.

7. Si las diagonales de un trapezoide son de la misma longitud, entonces el trapezoide es isósceles.
8. Las diagonales de un paralelogramo son congruentes si el paralelogramo es un rectángulo.

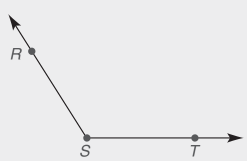
En los ejercicios de repaso 9 al 11 obtenga una conclusión válida donde sea posible.

9. 1. Si una persona tiene un buen trabajo, entonces esa persona tiene un grado académico.
   2. Billy Fuller tiene un grado académico.

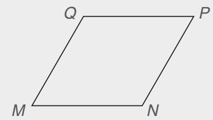
   C. $\therefore$?
10. 1. Si una persona tiene un buen trabajo, entonces esa persona tiene un grado académico.
    2. Jody Smithers tiene un buen trabajo.

    C. $\therefore$?
11. 1. Si la medida de un ángulo es 90°, entonces ese ángulo es un ángulo recto.
    2. El ángulo A tiene una medida de 90°.

    C. $\therefore$?
12. A, B y C son tres puntos en una recta, $AC = 8$, $BC = 4$ y $AB = 12$. ¿Qué punto debe estar entre los otros dos?
13. Utilice tres letras para nombrar el ángulo que se ilustra. Emplee además una letra para nombrar el mismo ángulo. Decida si la medida del ángulo es menor que 90°, igual a 90° o mayor que 90°.



14. La figura $MNPQ$ es un rombo. Trace las diagonales $\overline{MP}$ y $\overline{QN}$ del rombo. ¿Cómo parecen estar relacionadas $\overline{MP}$ y $\overline{QN}$?

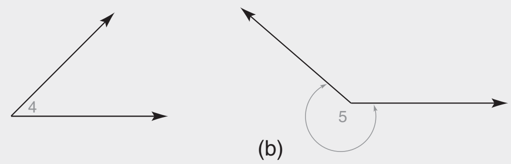


En los ejercicios de repaso 15 al 17 bosqueje y etiquete las figuras descritas.

15. Los puntos A, B, C y D son coplanares. A, B y C son los únicos tres de estos puntos que son colineales.
16. La recta ℓ interseca el plano X en el punto P.
17. El plano M contiene rectas intersecantes j y k.
18. Con base en su apariencia, ¿qué *tipo de ángulo* se muestra?

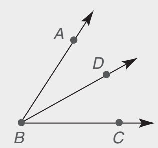
(a) (b)

19. Con base en su apariencia, ¿qué *tipo de ángulo* se muestra?



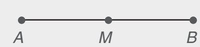
(a) (b)

20. *Dado:* $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$
    $m\angle ABD = 2x + 15$
    $m\angle DBC = 3x - 2$
    Encuentre: $m\angle ABC$
21. *Dado:* $m\angle ABD = 2x + 5$
    $m\angle DBC = 3x - 4$
    $m\angle ABC = 86°$
    Encuentre: $m\angle DBC$



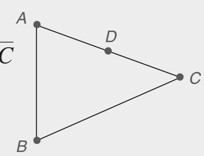
Ejercicios 20, 21

22. *Dado:* $AM = 3x - 1$
    $MB = 4x - 5$
    M es el punto medio de $\overline{AB}$
    Encuentre: AB
23. *Dado:* $AM = 4x - 4$
    $MB = 5x + 2$
    $AB = 25$
    Encuentre: MB



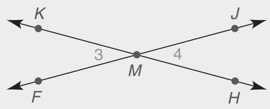
Ejercicios 22, 23

24. *Dado:* D es el punto medio de $\overline{AC}$
    $\overline{AC} \cong \overline{BC}$
    $CD = 2x + 5$
    $BC = x + 28$
    Encuentre: AC



25. *Dado:* $m\angle 3 = 7x - 21$
$m\angle 4 = 3x + 7$
Encuentre: $m\angle FMH$

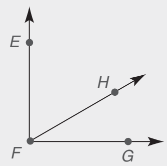
26. *Dado:* $m\angle FMH = 4x + 1$
$m\angle 4 = x + 4$
Encuentre: $m\angle 4$



Ejercicios 25-27

27. En la figura encuentre:
a) $\overleftrightarrow{KH} \cap \overleftrightarrow{FJ}$
b) $\overrightarrow{MJ} \cup \overrightarrow{MH}$
c) $\angle KMJ \cap \angle JMH$
d) $\overrightarrow{MK} \cup \overrightarrow{MH}$

28. *Dado:* $\angle EFG$ es un ángulo recto
$m\angle HFG = 2x - 6$
$m\angle EFH = 3 \cdot m\angle HFG$
Encuentre: $m\angle EFH$



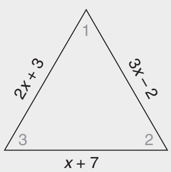
29. Dos ángulos son suplementarios. Un ángulo es 40° mayor que cuatro veces el otro ángulo. Encuentre las medidas de ambos ángulos.

30. a) Escriba una expresión para el perímetro del triángulo que se ilustra.

(SUGERENCIA: Sume las longitudes de los lados.)

b) Si el perímetro es de 32 centímetros, encuentre el valor de x.

c) Encuentre la longitud de cada lado del triángulo.



31. La suma de las medidas de los tres ángulos del triángulo en el ejercicio de repaso 30 es 180°. Si la suma de las medidas de los ángulos 1 y 2 es mayor que 130°, ¿qué concluye acerca de la medida del ángulo 3?

32. Susan quiere tener una tabla de 4 pies con algunas perchas en la misma. Quiere dejar 6 pulgadas en cada extremo y 4 pulgadas entre las perchas. ¿Cuántas perchas caben en la tabla?
(SUGERENCIA: Si n *representa el número de perchas, entonces (*n *− 1) representa el número de espacios iguales.)*

Establezca si los enunciados en los ejercicios de repaso 33 al 37 siempre son verdaderos (A), algunas veces verdaderos (S) o nunca verdaderos (N).

33. Si $AM = MB$, entonces A, M y B son colineales.

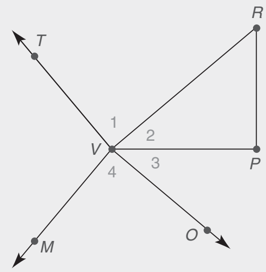
34. Si dos ángulos son congruentes, entonces son ángulos rectos.

35. Los bisectores de ángulos verticales son rayos opuestos.

36. Los ángulos complementarios son congruentes.

37. El suplemento de un ángulo obtuso es otro ángulo obtuso.

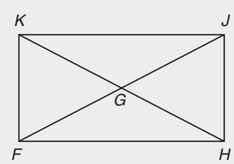
38. Complete los enunciados o las razones faltantes.
Dado: $\angle 1 \cong \angle P$
$\angle 4 \cong \angle P$
$\overrightarrow{VP}$ biseca $\angle RVO$
Demuestre: $\angle TVP \cong \angle MVP$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle 1 \cong \angle P$	1. Dado
2. ?	2. Dado
(1), (2) 3. ?	3. Propiedad transitiva de $\cong$
(3) 4. $m\angle 1 = m\angle 4$	4. ?
5. $\overrightarrow{VP}$ biseca $\angle RVO$	5. ?
6. ?	6. Si un rayo biseca un $\angle$, forma dos $\angle$s de medida igual
(4), (6) 7. ?	7. Propiedad de adición de la igualdad
8. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle TVP$; $m\angle 4 + m\angle 3 = m\angle MVP$	8. ?
(7), (8) 9. $m\angle TVP = m\angle MVP$	9. ?
10. ?	10. Si dos $\angle$s son $=$ en medida, entonces son $\cong$

Escriba demostraciones de dos columnas para los ejercicios de repaso 39 al 46.



Ejercicios 39-41

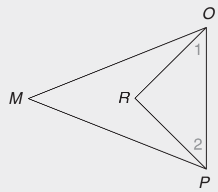
39. *Dado:* $\overline{KF} \perp \overline{FH}$
$\angle JHF$ es un $\angle$ recto
Demuestre: $\angle KFH \cong \angle JHF$

Para los ejercicios de repaso 40 y 41 consulte la figura en la página 66.

40. *Dado:* $\overline{KH} \cong \overline{FJ}$
G es el punto medio de $\overline{KH}$ y $\overline{FJ}$
Demuestre: $\overline{KG} \cong \overline{GJ}$

41. *Dado:* $\overline{KF} \perp \overline{FH}$
Demuestre: $\angle KFJ$ es complementario para $\angle JFH$

42. *Dado:* $\angle 1$ es complementario para $\angle M$
$\angle 2$ es complementario para $\angle M$
Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 2$



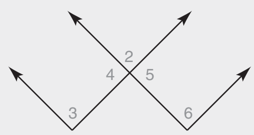
Ejercicios 42, 43

43. *Dado:* $\angle MOP \cong \angle MPO$
$\overrightarrow{OR}$ biseca $\angle MOP$
$\overrightarrow{PR}$ biseca $\angle MPO$
Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 2$

Para el ejercicio de repaso 44 consulte la figura que sigue al ejercicio de repaso 45.

44. *Dado:* $\angle 4 \cong \angle 6$
Demuestre: $\angle 5 \cong \angle 6$

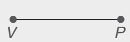
45. *Dado:* la figura que se muestra
Demuestre: $\angle 4$ es suplementario para $\angle 2$



Ejercicios 44–46

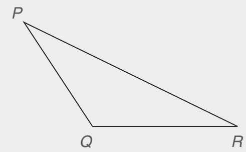
46. *Dado:* $\angle 3$ es suplementario para $\angle 5$
$\angle 4$ es suplementario para $\angle 6$
Demuestre: $\angle 3 \cong \angle 6$

47. *Dado:* $\overline{VP}$
Demuestre: $\overline{VW}$ de modo que
$VW = 4 \cdot VP$

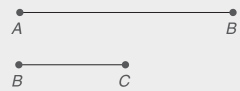


48. Construya un ángulo de 135°.

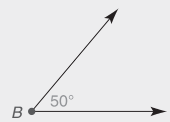
49. *Dado:* El triángulo PQR
Construya: Los tres bisectores de ángulo
¿Qué descubrió acerca de los tres bisectores de ángulo de este triángulo?



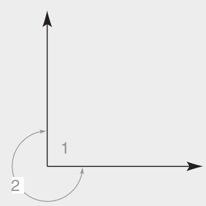
50. *Dado:* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y el $\angle B$ como se muestra en el ejercicio de repaso 51.
Construya: El triángulo ABC



51. *Dado:* $m\angle B = 50°$
Construya: Un ángulo cuya medida sea 20°



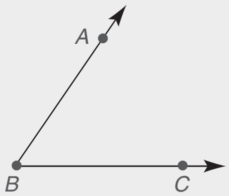
52. Si $m\angle 1 = 90°$, encuentre la medida del ángulo reflejo 2.



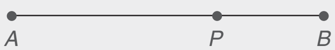
Capítulo 1 EXAMEN

1. ¿Qué tipo de razonamiento se ilustra abajo? _________
Puesto que llovió los cuatro días anteriores, Annie concluye que hoy lloverá de nuevo.

2. Dado el $\angle ABC$ (como se muestra), proporcione un segundo método correcto para nombrar este ángulo. _________



3. Utilizando el postulado segmento-adición, establezca una conclusión respecto a la figura siguiente. _________

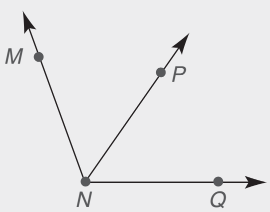


4. Complete cada postulado:
a) Si dos rectas se intersecan, lo hacen en un _________
b) Si dos planos se intersecan, lo hacen en una _________

5. Dado que x es la medida de un ángulo, nombre el tipo de ángulo cuando:
a) $x = 90°$ _________ b) $90° < x < 180°$ _________

6. ¿Qué palabra describiría dos ángulos
a) cuya suma de medidas es igual a 180°? _________
b) que tienen medidas iguales? _________

7. Dado que $\overrightarrow{NP}$ biseca $\angle MNQ$, establezca una conclusión que comprenda $m\angle MNP$ y $m\angle PNQ$. _________________
____



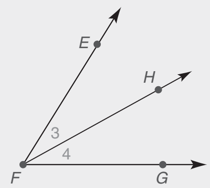
8. Complete cada teorema:
a) Si dos rectas son perpendiculares, ambas convergen para formar ángulos _________.
b) Si los lados exteriores de dos ángulos adyacentes forman una línea recta, estos ángulos son _________

9. Establezca la conclusión para el argumento deductivo siguiente.
(1) Si estudia geometría, entonces desarrolla habilidades de razonamiento.
(2) Kianna está estudiando geometría este semestre.
(C) ____

Preguntas 10, 11

10. En la figura, A-B-C-D y M es el punto medio de $\overline{AB}$.
Si $AB = 6.4$ pulgadas y $BD = 7.2$ pulgadas, encuentre MD.
____

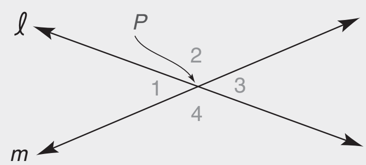
11. En la figura, $AB = x$, $BD = x + 5$ y $AD = 27$.
Encuentre: a) x _________ b) BD _________



Preguntas 12, 13

12. En la figura, $m\angle EFG = 68°$ y $m\angle 3 = 33°$.
Encuentre $m\angle 4$. _________

13. En la figura $m\angle 3 = x$ y $m\angle 4 = 2x - 3$.
Si $m\angle EFG = 69°$, encuentre:
a) x _________ b) $m\angle 4$ _________



Preguntas 14–16

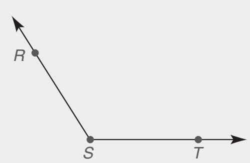
14. Las rectas ℓ y m se intersecan en el punto P.
Si $m\angle 1 = 43°$, encuentre:
a) $m\angle 2$ __________ b) $m\angle 3$ __________

15. Si $m\angle 1 = 2x - 3$ y $m\angle 3 = 3x - 28$, encuentre:
a) x __________ b) $m\angle 1$ __________

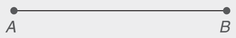
16. Si $m\angle 1 = 2x - 3$ y $m\angle 2 = 6x - 1$, encuentre:
a) x __________ b) $m\angle 2$ __________

17. Los $\angle$s 3 y 4 (no se muestran) son complementarios. Donde $m\angle 3 = x$ y $m\angle 4 = y$, escriba una ecuación empleando las variables x y y. __________

18. Construya el bisector de ángulo del ángulo obtuso RST.



19. Construya el bisector perpendicular de $\overline{AB}$.



En los ejercicios 20 al 22, complete los enunciados o las razones faltantes para cada demostración.

20. *Dado:* M-N-P-Q en $\overline{MQ}$

Demuestre: $MN + NP + PQ = MQ$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. M-N-P-Q en $\overline{MQ}$	1. ________________
2. $MN + NQ = MQ$	2. ________________
3. $NP + PQ = NQ$	3. ________________
4. $MN + NP + PQ = MQ$	4. ________________

21. *Dado:* $2x - 3 = 17$

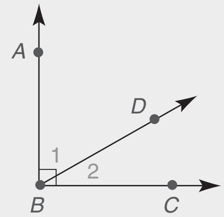
Demuestre: $x = 10$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ________________	1. Dado
2. ________________	2. Propiedad de adición de la igualdad
3. ________________	3. Propiedad de división de la igualdad

22. *Dado:* $\angle ABC$ es un ángulo recto; $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$

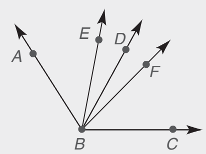
Demuestre: $m\angle 1 = 45°$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle ABC$ es un ángulo recto	1. ________________
2. $m\angle ABC =$ ______	2. Definición de un ángulo recto
3. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle ABC$	3. ________________
4. $m\angle 1 + m\angle 2 =$ ______	4. Propiedad de sustitución de la igualdad
5. $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$	5. ________________
6. $m\angle 1 = m\angle 2$	6. ________________
7. $m\angle 1 + m\angle 1 = 90°$ o $2 \cdot m\angle 1 = 90°$	7. ________________
8. ________________	8. Propiedad de división de la igualdad

23. Al ángulo obtuso ABC lo biseca $\overrightarrow{BD}$ y lo trisecan $\overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{BF}$. Si $m\angle EBD = 18°$, encuentre $m\angle ABC$.



Rectas paralelas

© Jiawangkun/Shutterstock

Capítulo 2

CONTENIDO

Hay un DVD disponible que cuenta con un video con explicación de conceptos, problemas de ejemplo y aplicaciones. Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

¡Impresionante! El puente sustentado por cables más largo del mundo, el Leonard P. Zakim Bridge (también conocido como el Bunker Hill Bridge) se encuentra al norte de Boston, Massachusetts. Ubicado sobre el Charles River, este puente de diseño moderno se inauguró en 2002. Los cables del puente son paralelos o casi paralelos entre sí. Las torres verticales encima del puente son perpendiculares a su calzada. En este capítulo se consideran las relaciones entre rectas paralelas y perpendiculares. Gracias a las relaciones de rectas se puede establecer un hecho muy importante respecto a las medidas angulares para el triángulo en la sección 2.4. Otra vista al Bunker Hill Bridge sugiere la utilización de la simetría, un tema al que se le pone considerable atención en la sección 2.6.

2.1 Postulado paralelo y ángulos especiales

CONCEPTOS CLAVE

Rectas perpendiculares	Postulado paralelo	Ángulos correspondientes
Planos perpendiculares	Transversal	Ángulos alternos internos
Rectas paralelas	Ángulos internos	Ángulos alternos externos
Planos paralelos	Ángulos externos	

RECTAS PERPENDICULARES

Por definición dos rectas (o segmentos, o rayos) son perpendiculares si convergen para formar ángulos adyacentes congruentes. Utilizando esta definición se demostró el teorema que establece que las "rectas perpendiculares se encuentran formando ángulos rectos". También se puede decir que dos rayos o segmentos de recta son perpendiculares si son partes de rectas perpendiculares. Consideremos ahora un método para construir una recta perpendicular a una recta dada.

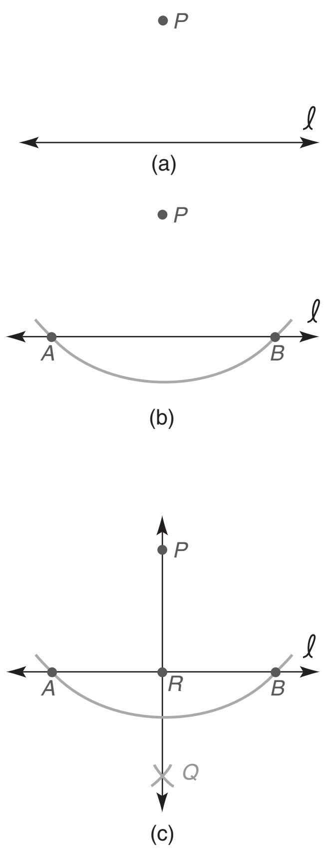


Figura 2.1

Construcción 6 *Para construir la recta perpendicular a una recta dada desde un punto fuera de ésta.*

DADO: En la figura 2.1(a), la recta ℓ y el punto P fuera de ℓ

CONSTRUYA: $\overleftrightarrow{PQ} \perp \ell$

CONSTRUCCIÓN: Figura 2.1(b): con P como el centro abra el compás una longitud suficiente para intersecar ℓ en dos puntos A y B.

Figura 2.1(c): con A y B como centros, marque arcos de radios iguales (utilizando la misma abertura del compás) hasta intersecar un punto Q, como se muestra.

Trace $\overleftrightarrow{PQ}$ para completar la recta deseada.

En esta construcción, $\angle PRA$ y $\angle PRB$ son ángulos rectos. Se logra más precisión si los arcos que se trazan desde A y B se intersecan en el lado opuesto de la recta ℓ desde el punto P.

La construcción 6 sugiere una relación de unicidad que se puede demostrar.

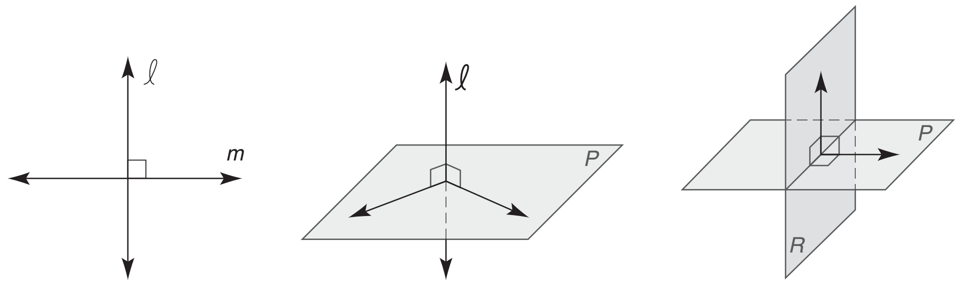
TEOREMA 2.1.1

A partir de un punto fuera de una recta hay exactamente una recta perpendicular a la recta dada.

El término *perpendicular* incluye relaciones recta-rayo, recta-plano y plano-plano. Los esquemas en la figura 2.2, en la página 73, indican dos rectas perpendiculares, una recta perpendicular a un plano y dos planos perpendiculares. En la figura 2.1(c), $\overrightarrow{RP} \perp \ell$.

RECTAS PARALELAS

Así como la palabra *perpendicular* puede relacionar rectas y planos, la palabra *paralelo* también se puede utilizar para describir relaciones entre rectas y planos. Sin embargo, las rectas paralelas se deben encontrar en el mismo plano, como se enfatiza en la definición siguiente.

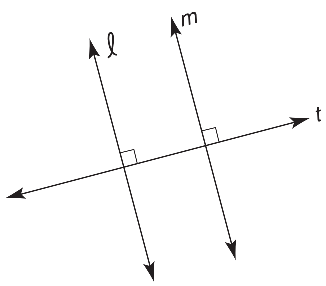


(a) $\ell \perp m$ (b) $\ell \perp P$ (c) $R \perp P$

Figura 2.2

Descubra

En el siguiente bosquejo las rectas ℓ y m se encuentran en el mismo plano con la recta t y son perpendiculares a la recta t. ¿Cómo se relacionan entre sí las rectas ℓ y m?



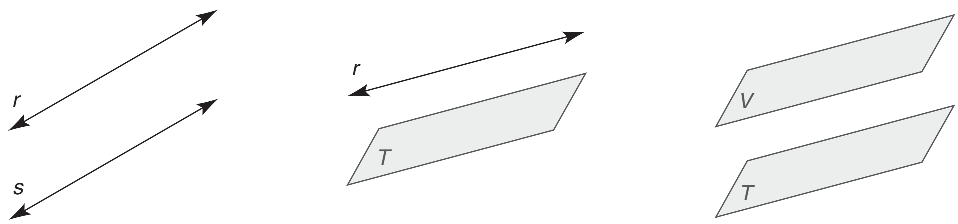
RESPUESTA

Se dice que estas rectas son *paralelas*, no se intersecarán.

DEFINICIÓN

Las **rectas paralelas** son rectas en el mismo plano y no se intersecan.

De manera más general dos rectas en un plano, una recta y un plano o dos planos son paralelos si no se intersecan (vea la figura 2.3). En la figura 2.3 se ilustran posibles aplicaciones de la palabra *paralelo*. En la figura 2.4 dos planos paralelos M y N se intersecan por un tercer plano G. ¿Cómo se deben relacionar las rectas de intersección, a y b?



(a) $r \parallel s$ (b) $r \parallel T$ (c) $T \parallel V$

$r \cap s = \emptyset$ $r \cap T = \emptyset$ $T \cap V = \emptyset$

Figura 2.3

Geometría en el mundo real

Los peldaños de una escalera son segmentos de recta paralelos.

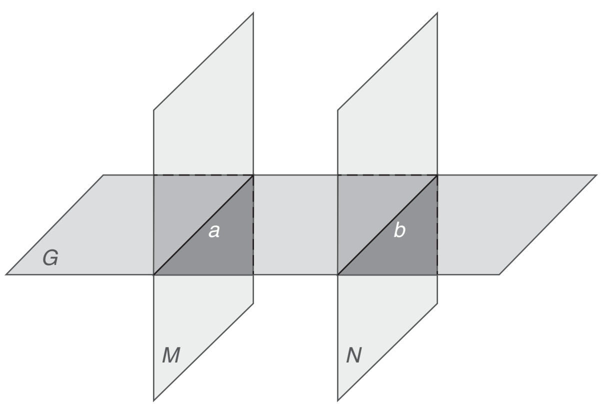


Figura 2.4

Ejercicios 1-3

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

El tipo de geometría que abordamos en este libro se conoce como *geometría euclidiana*. En esta geometría un plano es una superficie bidimensional plana en la cual el segmento de recta que une cualesquiera dos puntos del plano se encuentra por completo dentro del plano. Mientras que el postulado que sigue caracteriza la geometría euclidiana, la sección de Perspectiva de aplicación, casi al final de este capítulo, presenta geometrías alternas. El postulado 10, el postulado paralelo euclidiano, es fácil de aceptar debido a la manera en que percibimos un plano.

POSTULADO 10: (POSTULADO PARALELO)

A través de un punto fuera de una recta, exactamente una recta es paralela a la recta dada.

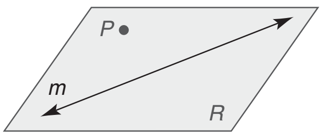


Figura 2.5

Considere la figura 2.5, en donde la recta m y el punto P (con P fuera de m) se encuentran en el plano R. Parece razonable que exactamente una recta se pueda trazar a través de P paralela a la recta m. El método de construcción para la recta única a través de P paralela a m se proporciona en la sección 2.3.

Una **transversal** es una recta que interseca dos (o más) rectas en puntos distintos; todas las rectas se encuentran en el mismo plano. En la figura 2.6, t es una transversal para las rectas r y s. Los ángulos que se forman entre r y s son **ángulos internos**; aquellos fuera de r y s son **ángulos externos**. En relación con la figura 2.6, se tiene

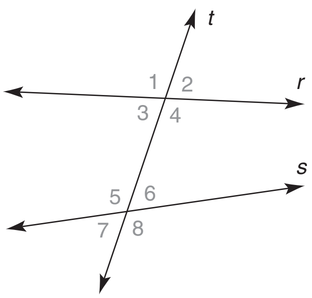


Figura 2.6

Ángulos internos: $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$

Ángulos externos: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$, $\angle 8$

En la figura 2.6 considere los ángulos que se forman cuando las rectas se cortan por una transversal. Dos ángulos que se encuentran en las mismas posiciones relativas (como *arriba* y *abajo*) se denominan **ángulos correspondientes** para estas rectas. En la figura 2.6, $\angle 1$ y $\angle 5$ son ángulos correspondientes; cada uno está *arriba* de la recta y a la *izquierda* de la transversal que ayuda a formar el ángulo. Como se muestra en la figura 2.6, se tiene

Ángulos correspondientes:	$\angle 1$ y $\angle 5$	arriba a la izquierda
(deben estar en pares)	$\angle 3$ y $\angle 7$	abajo a la izquierda
	$\angle 2$ y $\angle 6$	arriba a la derecha
	$\angle 4$ y $\angle 8$	abajo a la derecha

Dos ángulos internos que tienen vértices diferentes y se encuentran en lados opuestos de la transversal son **ángulos alternos internos**. Dos ángulos externos que tienen vértices diferentes y se encuentran en lados opuestos de la transversal son **ángulos alternos externos**. Ambos tipos de ángulos alternos deben ocurrir en pares; en la figura 2.6, se tiene:

Ángulos alternos internos: $\angle 3$ y $\angle 6$
$\angle 4$ y $\angle 5$

Ángulos alternos externos: $\angle 1$ y $\angle 8$
$\angle 2$ y $\angle 7$

GEE
Ejercicios 4-6

RECTAS PARALELAS Y ÁNGULOS CONGRUENTES

En la figura 2.7 las rectas *paralelas* ℓ y m están cortadas por la transversal v. Si se empleara un transportador para medir $\angle 1$ y $\angle 5$ se determinaría que estos ángulos correspondientes tienen medidas iguales; es decir, son congruentes. De manera similar, cualquier otro par de ángulos correspondientes será congruente siempre que $\ell \parallel m$.

POSTULADO 11

Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

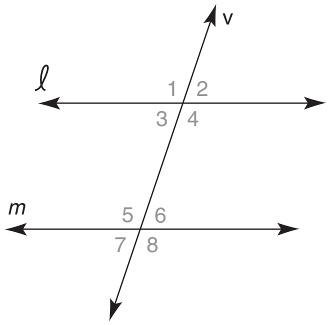


Figura 2.7

EJEMPLO 1

En la figura 2.7, $\ell \parallel m$ y m$\angle 1 = 117°$. Encuentre:

a) m$\angle 2$ c) m$\angle 4$
b) m$\angle 5$ d) m$\angle 8$

Solución

a) m$\angle 2 = 63°$ suplementario a $\angle 1$
b) m$\angle 5 = 117°$ correspondiente a $\angle 1$
c) m$\angle 4 = 117°$ vertical a $\angle 1$
d) m$\angle 8 = 117°$ correspondiente a $\angle 4$ [se encuentra en el inciso (c)] ■

Del postulado 11 se deducen varios teoremas, para algunos de los cuales se proporcionan demostraciones formales. Estudie las demostraciones y podrá establecer todos los teoremas. Puede citar los teoremas que se han comprobado como razones en demostraciones subsecuentes.

TEOREMA 2.1.2

Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

Exploración tecnológica

Utilice software de cómputo si dispone de él.
1. Trace $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.
2. Trace la transversal $\overleftrightarrow{EF}$.
3. Numere los ángulos como en la figura 2.8 y encuentre las medidas de los ocho ángulos.
4. Demuestre que los pares de ángulos correspondientes son congruentes.

DADO: $a \parallel b$ en la figura 2.8
Transversal k
DEMUESTRE: $\angle 3 \cong \angle 6$

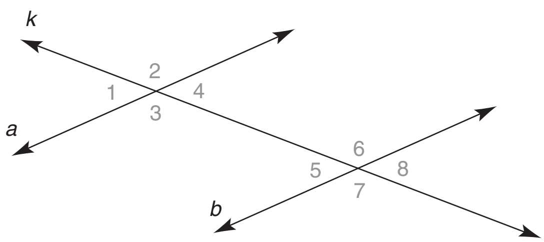


Figura 2.8

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $a \parallel b$; transversal k	1. Dado
2. $\angle 2 \cong \angle 6$	2. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, los $\angle$s correspondientes son $\cong$
3. $\angle 3 \cong \angle 2$	3. Si dos rectas se intersecan, los $\angle$s formados son $\cong$
4. $\angle 3 \cong \angle 6$	4. Transitiva (de $\cong$)

Aunque no se estableció que los ángulos alternos internos 4 y 5 son congruentes, es fácil demostrar que son congruentes ya que son suplementos para $\angle 3$ y $\angle 6$. El teorema siguiente es similar al 2.1.2, pero la demostración se deja como ejercicio 28.

TEOREMA 2.1.3

Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos externos son congruentes.

RECTAS PARALELAS Y ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Cuando dos rectas paralelas se cortan por una transversal se puede demostrar que los dos ángulos internos en el mismo lado de la transversal son suplementarios. Se puede hacer una afirmación similar para el par de ángulos externos en el mismo lado de la transversal.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Uso de la sustitución en un enunciado de demostración

Regla general: En una ecuación una expresión puede reemplazar a su igual.
Ilustración: Consulte los enunciados 3, 6 y 7 en la demostración del teorema 2.1.4. Observe que m$\angle 1$ (se encuentra en el enunciado 1) se sustituyó por m$\angle 2$ en el enunciado 6 para obtener el enunciado 7.

TEOREMA 2.1.4

Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos internos en el mismo lado de la transversal son suplementarios.

DADO: En la figura 2.9, $\overleftrightarrow{TV} \parallel \overleftrightarrow{WY}$ con transversal $\overleftrightarrow{RS}$

DEMUESTRE: $\angle 1$ y $\angle 3$ son suplementarios

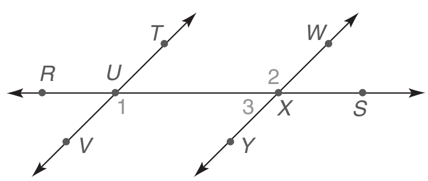


Figura 2.9

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overleftrightarrow{TV} \parallel \overleftrightarrow{WY}$; transversal $\overleftrightarrow{RS}$	1. Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, los $\angle$ alternos internos son $\cong$
3. $m\angle 1 = m\angle 2$	3. Si dos $\angle$s son $\cong$, sus medidas son $=$
4. $\angle WXY$ es un $\angle$ llano, por tanto $m\angle WXY = 180°$	4. Si un $\angle$ es un $\angle$ llano, su medida es 180°
5. $m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle WXY$	5. Postulado ángulo-adición
6. $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	6. Sustitución
7. $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$	7. Sustitución
8. $\angle 1$ y $\angle 3$ son suplementarios	8. Si la suma de medidas de dos $\angle$s es 180°, los $\angle$s son suplementarios

La demostración del teorema siguiente se deja como ejercicio.

TEOREMA 2.1.5

Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos externos en el mismo lado de la transversal son suplementarios.

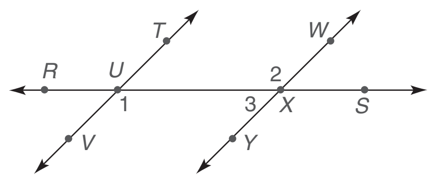
GEE
Ejercicios 7-11

En los ejemplos restantes de esta sección se ilustran métodos del álgebra y se refieren ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas se cortan por una transversal.

EJEMPLO 2

DADO: $\overleftrightarrow{TV} \parallel \overleftrightarrow{WY}$ con transversal $\overleftrightarrow{RS}$
$m\angle RUV = (x + 4)(x - 3)$
$m\angle WXS = x^2 - 3$

ENCUENTRE: x



Solución $\angle RUV$ y $\angle WXS$ son ángulos alternos externos, por tanto son congruentes. Entonces $m\angle RUV = m\angle WXS$. Por tanto,

$$\begin{aligned}(x + 4)(x - 3) &= x^2 - 3\\ x^2 + x - 12 &= x^2 - 3\\ x - 12 &= -3\\ x &= 9\end{aligned}$$

NOTA: Los dos ángulos miden 78° cuando $x = 9$. ■

En la figura 2.10 se sabe que las rectas r y s son paralelas; por tanto, $\angle 1 \cong \angle 5$, ya que éstos son ángulos correspondientes.

Para que ℓ y m de la figura 2.10 sean paralelas también, nombre dos ángulos que tendrían que ser congruentes. Si se considera la recta s como una transversal, $\angle 5$ tendría que ser congruente a $\angle 9$, puesto que éstos son ángulos correspondientes para ℓ y m cortadas por la transversal s.

GEE
Ejercicios 12, 13

Para el ejemplo 3 recuerde que se necesitan dos ecuaciones para resolver un problema con dos variables.

EJEMPLO 3

DADO: En la figura 2.10, $r \parallel s$ y transversal a ℓ

$$\begin{aligned}m\angle 3 &= 4x + y\\ m\angle 5 &= 6x + 5y\\ m\angle 6 &= 5x - 2y\end{aligned}$$

ENCUENTRE: x y y

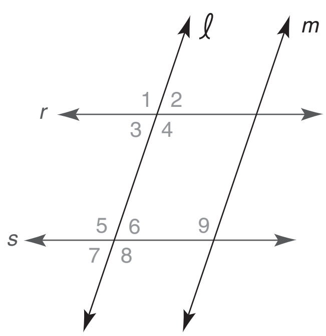


Figura 2.10

Solución $\angle 3$ y $\angle 6$ son ángulos alternos internos congruentes; además, $\angle 3$ y $\angle 5$ son ángulos suplementarios de acuerdo con el teorema 2.1.4. Estos hechos conducen al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}4x + y &= 5x - 2y\\ (4x + y) + (6x + 5y) &= 180\end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden simplificar a

$$\begin{aligned}x - 3y &= 0\\ 10x + 6y &= 180\end{aligned}$$

Después de dividir entre 2 cada término de la segunda ecuación, el sistema queda

$$\begin{aligned} x - 3y &= 0 \\ 5x + 3y &= 90 \end{aligned}$$

Al realizar la adición se obtiene la ecuación $6x = 90$, por tanto $x = 15$. Sustituyendo 15 por x en la ecuación $x - 3y = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 15 - 3y &= 0 \\ -3y &= -15 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Nuestra solución, $x = 15$ y $y = 5$, produce las medidas angulares siguientes:

$$\begin{aligned} m\angle 3 &= 65° \\ m\angle 5 &= 115° \\ m\angle 6 &= 65° \end{aligned}$$

NOTA: Para obtener una solución alterna, la ecuación $x - 3y = 0$ se podría multiplicar por 2 para obtener $2x - 6y = 0$. Luego se podrían sumar las ecuaciones $2x - 6y = 0$ y $10x + 6y = 180$. ■

Observe que las medidas angulares determinadas en el ejemplo 3 son consistentes con la figura 2.10 y las relaciones requeridas para los ángulos nombrados. Por ejemplo, $m\angle 3 + m\angle 5 = 180°$ y se observa que los ángulos internos en el mismo lado de la transversal son suplementarios.

▶▶▶ Ejercicios 2.1

Para los ejercicios 1 al 4, $\ell \parallel m$ con la transversal v.

1. Si $m\angle 1 = 108°$, encuentre:

a) $m\angle 5$ b) $m\angle 7$

2. Si $m\angle 3 = 71°$, encuentre:

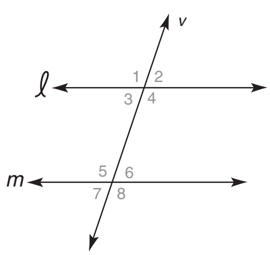
a) $m\angle 5$ b) $m\angle 6$

3. Si $m\angle 2 = 68.3°$, encuentre:

a) $m\angle 3$ b) $m\angle 6$

4. Si $m\angle 4 = 110.8°$, encuentre:

a) $m\angle 5$ b) $m\angle 8$



Utilice los dibujos, según se necesite, para responder cada pregunta.

5. ¿Tiene la relación "es paralela a" una

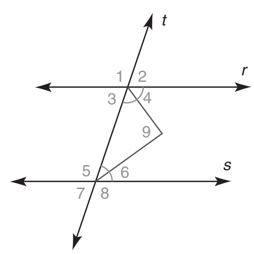
a) propiedad reflexiva? (considere una recta m)

b) propiedad simétrica? (considere las rectas m y n en un plano)

c) propiedad transitiva? (considere las rectas coplanares m, n y q)

6. En un plano $\ell \perp m$ y $t \perp m$. Por apariencia, ¿cómo están relacionadas ℓ y t?

7. Suponga que $r \parallel s$. Cada ángulo interno en el lado derecho de la transversal t se bisecó. Utilizando su intuición, ¿qué parece ser verdadero del $\angle 9$ formado por los bisectores?



8. Haga un bosquejo para representar dos planos que sean

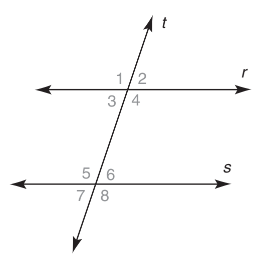
a) paralelos.

b) perpendiculares.

9. Suponga que r es paralela a s y $m\angle 2 = 87°$. Encuentre:

a) $m\angle 3$ c) $m\angle 1$

b) $m\angle 6$ d) $m\angle 7$



10. En geometría euclidiana, ¿cuántas rectas se pueden trazar a través de un punto P fuera de la recta ℓ que sean

a) paralelas a la recta ℓ?

b) perpendiculares a la recta ℓ?

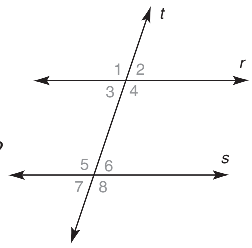
11. Las rectas r y s se cortan por una transversal t. ¿Cuál ángulo

a) corresponde a $\angle 1$?

b) es el $\angle$ interno alterno para $\angle 4$?

c) es el $\angle$ externo alterno para $\angle 1$?

d) es el otro ángulo interno en el mismo lado de la transversal t como $\angle 3$?

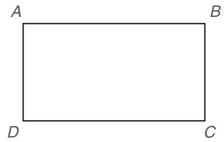


12. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y m$\angle A = 92°$. Encuentre:

a) m$\angle B$

b) m$\angle C$

c) m$\angle D$



13. $\ell \parallel m$, con transversal t y $\overrightarrow{OQ}$ biseca $\angle MON$.

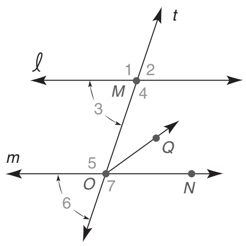
Si m$\angle 1 = 112°$, encuentre lo siguiente:

a) m$\angle 2$

b) m$\angle 4$

c) m$\angle 5$

d) m$\angle MOQ$



Ejercicios 13, 14

14. *Dado:* $\ell \parallel m$

Transversal t

m$\angle 1 = 4x + 2$

m$\angle 6 = 4x - 2$

Encuentre: x y m$\angle 5$

15. *Dado:* $m \parallel n$

Transversal k

m$\angle 3 = x^2 - 3x$

m$\angle 6 = (x + 4)(x - 5)$

Encuentre: x y m$\angle 4$

16. *Dado:* $m \parallel n$

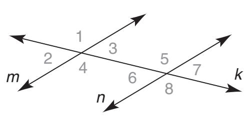
Transversal k

m$\angle 1 = 5x + y$

m$\angle 2 = 3x + y$

m$\angle 8 = 3x + 5y$

Encuentre: x, y y m$\angle 8$



Ejercicios 15-17

17. *Dado:* $m \parallel n$

Transversal k

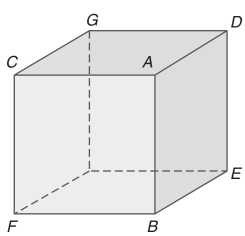
m$\angle 3 = 6x + y$

m$\angle 5 = 8x + 2y$

m$\angle 6 = 4x + 7y$

Encuentre: x, y y m$\angle 7$

18. En la figura tridimensional, $\overline{CA} \perp \overline{AB}$ y $\overline{BE} \perp \overline{AB}$. ¿Son $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{BE}$ paralelas entre sí? (Compare con el ejercicio 6.)



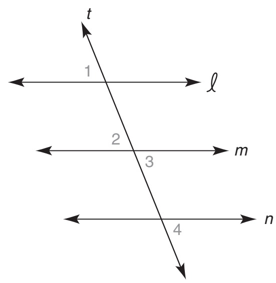
19. *Dado:* $\ell \parallel m$ y $\angle 3 \cong \angle 4$

Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 4$

(Vea la figura en la segunda columna.)

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\ell \parallel m$	1. ?
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. ?
3. $\angle 2 \cong \angle 3$	3. ?
4. ?	4. Dado
5. ?	5. Transitiva de $\cong$



Ejercicios 19, 20

20. *Dado:* $\ell \parallel m$ y $m \parallel n$

Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 4$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\ell \parallel m$	1. ?
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. ?
3. $\angle 2 \cong \angle 3$	3. ?
4. ?	4. Dado
5. $\angle 3 \cong \angle 4$	5. ?
6. ?	6. ?

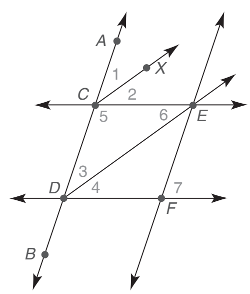
21. *Dado:* $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{DF}$

Transversal $\overleftrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CX}$ biseca $\angle ACE$

$\overrightarrow{DE}$ biseca $\angle CDF$

Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 3$



Ejercicios 21, 22

22. *Dado:* $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{DF}$

Transversal $\overleftrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DE}$ biseca $\angle CDF$

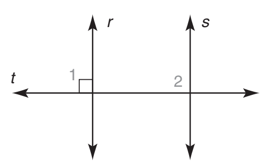
Demuestre: $\angle 3 \cong \angle 6$

23. *Dado:* $r \parallel s$

Transversal t

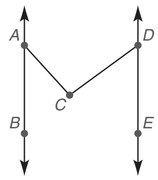
$\angle 1$ es un $\angle$ recto

Demuestre: $\angle 2$ es un $\angle$ recto



Ejercicios 23, 26

24. *Dado:* $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$,
$m\angle BAC = 42°$ y
$m\angle EDC = 54°$
Encuentre: $m\angle ACD$
(SUGERENCIA: Hay una recta a través de C paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DE}$.)

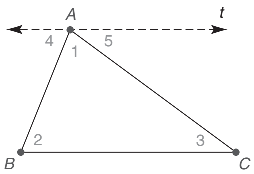


Ejercicios 24, 25

25. *Dado:* $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$ y
$m\angle BAC + m\angle CDE = 93°$
Encuentre: $m\angle ACD$
(Consulte la "sugerencia" en el ejercicio 24.)

26. *Dado:* $r \parallel s$, $r \perp t$ (Vea la figura en la página 79.)
Demuestre: $s \perp t$

27. En el triángulo ABC, la recta t está trazada a través del vértice A de manera que $t \parallel \overline{BC}$.



a) ¿Cuáles pares de $\angle$s son $\cong$?
b) ¿Cuál es la suma de $m\angle 1$, $m\angle 4$ y $m\angle 5$?
c) ¿Cuál es la suma de medidas de los $\angle$s del $\triangle ABC$?

En los ejercicios 28 al 30, escriba una demostración formal de cada teorema.

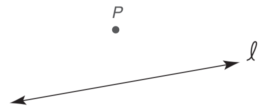
28. Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos externos son congruentes.

29. Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos externos en el mismo lado de la transversal son suplementarios.

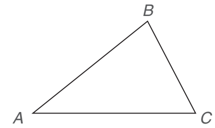
30. Si una transversal es perpendicular a una de dos rectas paralelas, entonces también es perpendicular a la otra recta.

31. Suponga que dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos correspondientes no son congruentes. ¿Pueden ser paralelas estas rectas?

32. *Dado:* Recta ℓ y punto P no en ℓ
Construya: $\overrightarrow{PQ} \perp \ell$

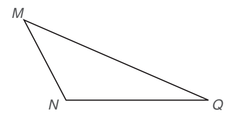


33. *Dado:* Triángulo ABC con tres ángulos agudos
Construya: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$



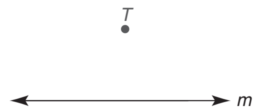
34. *Dado:* Triángulo MNQ con $\angle MNQ$ obtuso
Construya: $\overline{NE} \perp \overline{MQ}$

35. *Dado:* Triángulo MNQ con $\angle MNQ$ obtuso
Construya: $\overline{MR} \perp \overline{NQ}$
(SUGERENCIA: Extienda $\overline{NQ}$).



Ejercicios 34, 35

36. *Dado:* Una recta m y un punto T no en m



Suponga que hace lo siguiente:
i) Construya una recta perpendicular r desde T hasta la recta m.
ii) Construya una recta s perpendicular a la recta r en el punto T.

¿Cuál es la relación entre las rectas s y m?

2.2 Demostración indirecta

CONCEPTOS CLAVE

Condicional	Inverso	Ley de inferencia negativa
Recíproco	Contraposición	Demostración indirecta

Sea $P \rightarrow Q$ que representa el enunciado "Si P, entonces Q". Los enunciados siguientes están relacionados con este enunciado condicional.

NOTA: Recuerde que $\sim P$ representa la negación de P.

Condicional (o implicación)	$P \rightarrow Q$	Si P, entonces Q.
Recíproco de condicional	$Q \rightarrow P$	Si Q, entonces P.
Inverso de condicional	$\sim P \rightarrow \sim Q$	Si no P, entonces no Q.
Contraposición de condicional	$\sim Q \rightarrow \sim P$	Si no Q, entonces no P.

Por ejemplo, considere el enunciado condicional siguiente.

Si Tom vive en San Diego, entonces vive en California.

Este enunciado verdadero tiene estos enunciados relacionados:

Recíproco: Si Tom vive en California, entonces vive en San Diego. (falso)

Inverso: Si Tom no vive en San Diego, entonces tampoco vive en California. (falso)

Contraposición: Si Tom no vive en California, entonces tampoco vive en San Diego. (verdadero)

En general, ¡el enunciado condicional y su contraposición, o ambos son verdaderos o ambos son falsos! De manera similar el recíproco y el inverso también son o ambos verdaderos o ambos falsos. Consulte nuestro sitio web del libro para obtener más información acerca de los enunciados condicionales y relacionados.

EJEMPLO 1

Para el enunciado condicional que sigue proporcione el recíproco, el inverso y la contraposición. Luego clasifique cada uno como verdadero o falso.

Si dos ángulos son ángulos verticales, entonces son ángulos congruentes.

Solución

RECÍPROCO:	Si dos ángulos son congruentes, entonces son ángulos verticales. (falso)
INVERSO:	Si dos ángulos no son verticales, entonces tampoco son congruentes. (falso)
CONTRAPOSICIÓN:	Si dos ángulos no son ángulos congruentes, entonces tampoco son verticales. (verdadero) ■

“Si P, entonces Q” y “Si no Q, entonces no P” son equivalentes.

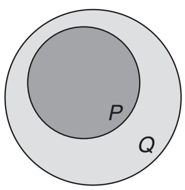


Figura 2.11

Los diagramas de Venn se pueden emplear para explicar por qué el enunciado condicional $P \rightarrow Q$ y su contraposición $\sim Q \rightarrow \sim P$ son equivalentes. La relación “Si P, entonces Q” se representa en la figura 2.11. Observe que si se selecciona cualquier punto fuera de Q (es decir, $\sim Q$), entonces no es posible que se encuentre en el conjunto P.

LEY DE INFERENCIA NEGATIVA (CONTRAPOSICIÓN)

Ejercicios 1, 2

Considere las circunstancias siguientes y acepte cada premisa como verdadera:

1. Si Matt limpia su cuarto, entonces irá al cine. ($P \rightarrow Q$)
2. Matt no va a ir al cine. ($\sim Q$)

¿Qué puede concluir? Usted debió deducir que Matt no limpió su cuarto; si lo hubiera hecho, habría ido al cine. Este razonamiento “furtivo” se basa en el hecho de que la verdad de $P \rightarrow Q$ implica la verdad de $\sim Q \rightarrow \sim P$.

LEY DE INFERENCIA NEGATIVA

$$\begin{array}{r} P \rightarrow Q \\ \sim Q \\ \hline \therefore \sim P \end{array}$$

Al igual que la ley de separación de la sección 1.1, la ley de inferencia negativa (ley de contraposición) es una forma de deducción. Mientras que la ley de separación caracteriza el método de “demostración indirecta” que se encuentra en secciones anteriores, la ley de inferencia negativa caracteriza el método de demostración conocido como **demostración indirecta**.

DEMOSTRACIÓN INDIRECTA

GÉE
Ejercicios 3, 4

Es necesario saber cuándo utilizar el método de demostración indirecta. A menudo el teorema que se quiere comprobar tiene la forma $P \to Q$, en donde Q es una negación y niega alguna aseveración. Por ejemplo, una demostración indirecta podría ser mejor si Q se lee en alguna de estas formas:

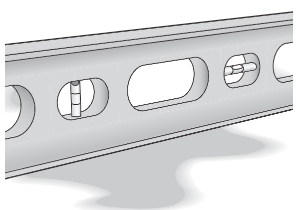
c no es igual a *d*
ℓ *no* es perpendicular a *m*

Sin embargo, en el ejemplo 4 de esta sección se verá que el método indirecto se puede utilizar para comprobar que la recta ℓ es paralela a la recta *m*. La demostración indirecta también se emplea para comprobar teoremas de existencia y unicidad; consulte el ejemplo 5.

El método de demostración indirecta se ilustra en el ejemplo 2. Todas las demostraciones indirectas en este libro se dan en forma de párrafo (al igual que varias de las demostraciones directas).

En cualquier demostración de párrafo cada enunciado aún necesita justificarse. Debido a la necesidad de ordenar sus enunciados de manera adecuada, ¡escribir este tipo de demostración puede tener un impacto positivo en los ensayos que escriba para sus demás materias!

Geometría en el mundo real



Cuando la burbuja del nivel no está centrada, la tabla que se está utilizando en la construcción no está vertical ni horizontal.

EJEMPLO 2

DADO: En la figura 2.12, $\overrightarrow{BA}$ *no* es perpendicular a $\overrightarrow{BD}$

DEMUESTRE: $\angle 1$ y $\angle 2$ *no* son complementarios

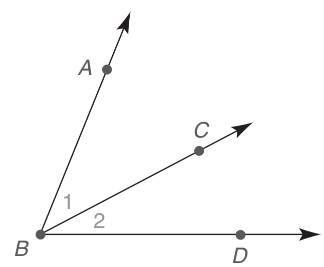


Figura 2.12

DEMOSTRACIÓN: Suponga que $\angle 1$ y $\angle 2$ *son* complementarios. Entonces $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$ ya que la suma de las medidas de dos $\angle$s complementarios es 90. También se sabe que $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle ABD$, por el postulado ángulo-adición. A su vez, $m\angle ABD = 90°$ por sustitución. Entonces $\angle ABD$ es un ángulo recto. A su vez, $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BD}$. Pero esto contradice la hipótesis dada; por tanto, la suposición debe ser falsa y se deduce que $\angle 1$ y $\angle 2$ no son complementarios. ■

En el ejemplo 2 y en todas las demostraciones, el primer enunciado adopta la forma

“Suponga que…” o *“Presuma que…”*

Por su propia naturaleza este enunciado no se puede sustentar aun cuando todos los demás enunciados en la demostración se puedan justificar; por tanto, cuando se llega a una contradicción, no queda más que suponer. Se puede decir que la aseveración que involucra ~Q ha fallado y es falsa; por tanto, el único recurso es concluir que Q es verdadero. La siguiente es la descripción de esta técnica.

Ejercicios 5-7

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Método de demostración indirecta

Para comprobar el enunciado $P \to Q$ o para completar el problema de demostración de la forma

Dado: P

Demuestre: Q

mediante el método indirecto, siga los pasos siguientes:

1. Suponga que $\sim Q$ es verdadero.
2. Razone a partir de la suposición hasta llegar a una contradicción.
3. Observe que la suposición de que $\sim Q$ es verdadero debe ser falsa y que por tanto Q debe ser verdadero.

El paso 3 completa la demostración.

La contradicción que se descubre en una demostración indirecta con frecuencia tiene la forma $\sim P$. Por tanto, el enunciado supuesto $\sim Q$ tiene la conclusión forzada $\sim P$, afirmando que $\sim Q \to \sim P$ es verdadero. Entonces el teorema deseado $P \to Q$ (la contraposición de $\sim Q \to \sim P$) también es verdadero.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ El primer renglón de una demostración indirecta

Regla general: El primer *enunciado* de una demostración indirecta por lo general es "Suponga/presuma lo *opuesto* del enunciado Demuestre".

Ilustración: Consulte el ejemplo 3, que inicia con "Suponga que $\ell \parallel m$".

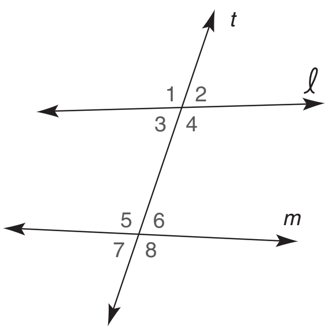


Figura 2.13

EJEMPLO 3

Complete una demostración formal del teorema siguiente:

Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos correspondientes no son congruentes, entonces dichas rectas no son paralelas.

DADO: En la figura 2.13, ℓ y m están cortadas por la transversal t

$\angle 1 \not\cong \angle 5$

DEMUESTRE: $\ell \nparallel m$

Ejercicios 8, 9

DEMOSTRACIÓN: Suponga que $\ell \parallel m$. Cuando estas rectas se cortan por una transversal t, los ángulos correspondientes (incluyendo $\angle 1$ y $\angle 5$) son congruentes. Pero $\angle 1 \not\cong \angle 5$ por hipótesis. Por tanto, el enunciado supuesto en el que se afirma que $\ell \parallel m$ debe ser falso. Se deduce que $\ell \nparallel m$. ■

La versatilidad de la demostración indirecta se muestra en los ejemplos finales de esta sección. Las demostraciones indirectas anteriores al ejemplo 4 contienen una negación en la conclusión (Demuestre); en las demostraciones en las ilustraciones finales se utiliza el método indirecto para llegar a una conclusión positiva.

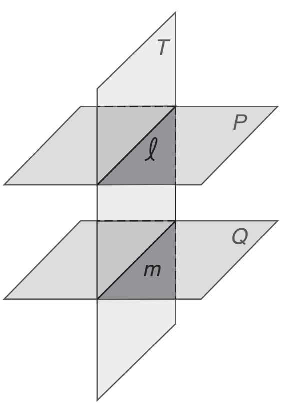


Figura 2.14

EJEMPLO 4

DADO: En la figura 2.14 el plano T interseca los planos paralelos P y Q en las rectas ℓ y m, respectivamente

DEMUESTRE: $\ell \parallel m$

DEMOSTRACIÓN: Suponga que ℓ no es paralela a m. Entonces ℓ y m se intersecan en algún punto A. Pero de ser así el punto A debe estar en los dos planos P y Q, lo cual significa que los planos P y Q se intersecan; pero P y Q son paralelos por hipótesis. Por tanto, la suposición de que ℓ y m no son paralelos debe ser falsa y se deduce que $\ell \parallel m$. ■

Las demostraciones indirectas también se utilizan para establecer teoremas de unicidad, como se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5

Demuestre que el enunciado "El ángulo bisector de un ángulo es único".

DADO: En la figura 2.15(a), $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$

DEMUESTRE: $\overrightarrow{BD}$ es el único bisector de ángulo para $\angle ABC$

DEMOSTRACIÓN: $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$, por tanto $m\angle ABD = \frac{1}{2}m\angle ABC$. Suponga que $\overrightarrow{BE}$ [como se muestra en la figura 2.15(b)] también es un bisector del $\angle ABC$ y que $m\angle ABE = \frac{1}{2}m\angle ABC$.

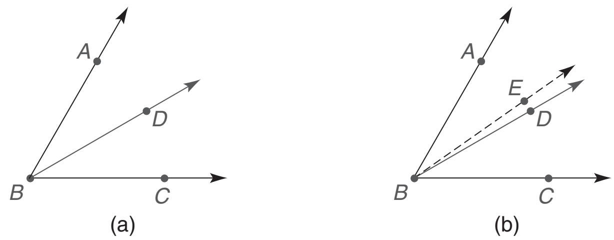


Figura 2.15

Por el postulado ángulo-adición, $m\angle ABD = m\angle ABE + m\angle EBD$. Por sustitución, $\frac{1}{2}m\angle ABC = \frac{1}{2}m\angle ABC + m\angle EBD$; pero entonces $m\angle EBD = 0$ por sustracción. Un ángulo con una medida de 0 contradice el postulado del transportador, que establece que la medida de un ángulo es un número positivo único. Por tanto, el enunciado supuesto debe ser falso y se deduce que el bisector de ángulo de un ángulo es único. ■

GEE *Ejercicio 10*

Ejercicios 2.2

En los ejercicios 1 al 4 escriba el recíproco, el inverso y la contraposición de cada enunciado. Cuando sea posible, clasifique los enunciados como verdadero o falso.

1. Si Juan gana la lotería, entonces será rico.
2. Si $x > 2$, entonces $x \neq 0$.
3. Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°.
4. En un plano, si dos rectas no son perpendiculares a la misma recta, entonces dichas rectas no son paralelas.

En los ejercicios 5 al 8 obtenga conclusiones donde sea posible.

5. 1. Si dos triángulos son congruentes, entonces los triángulos son similares.
   2. Los triángulos ABC y DEF no son congruentes.

   C. ∴ ?
6. 1. Si dos triángulos son congruentes, entonces los triángulos son similares
   2. Los triángulos ABC y DEF no son similares.

   C. ∴ ?
7. 1. Si $x > 3$, entonces $x = 5$.
   2. $x > 3$

   C. ∴ ?
8. 1. Si $x > 3$, entonces $x = 5$.
   2. $x \neq 5$

   C. ∴ ?
9. ¿Cuál de los enunciados siguientes demostraría con el método indirecto?
   a) En el triángulo ABC, si $m\angle A > m\angle B$, entonces $AC \neq BC$.
   b) Si el $\angle 1$ alterno externo $\not\cong \angle 8$ alterno externo, entonces ℓ no es paralela a m.
   c) Si $(x + 2) \cdot (x - 3) = 0$, entonces $x = -2$ o $x = 3$.
   d) Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los dos ángulos opuestos a ellos también son congruentes.
   e) El bisector perpendicular de un segmento de recta es único.
10. Para cada enunciado en el ejercicio 9 que se pueda comprobar con el método indirecto proporcione el primer enunciado en cada demostración.

Para los ejercicios 11 al 14, el enunciado dado es verdadero. Escriba un enunciado equivalente (pero más conciso) que deba de ser verdadero.

11. Si $\angle A$ y $\angle B$ no son congruentes, entonces $\angle A$ y $\angle B$ no son ángulos verticales.

12. Si las rectas ℓ y m no son perpendiculares, entonces los ángulos formados por ℓ y m no son ángulos rectos.

13. Si todos los lados de un triángulo no son congruentes, entonces el triángulo no es un triángulo equilátero.

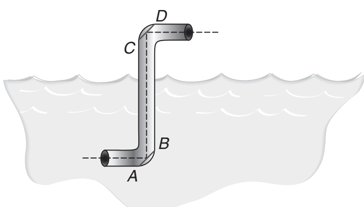
14. Si dos lados de un cuadrilátero (figura con cuatro lados) no son paralelos, entonces el cuadrilátero no es un trapezoide.

En los ejercicios 15 y 16 establezca una conclusión para el argumento. Los enunciados 1 y 2 son verdaderos.

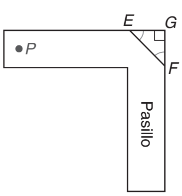
15. 1. Si las áreas de dos triángulos no son iguales, entonces dichos triángulos no son congruentes.
2. El triángulo ABC es congruente con el triángulo DEF.
C. $\therefore$?

16. 1. Si dos triángulos no tienen la misma forma, entonces dichos triángulos no son similares.
2. El triángulo RST es similar al triángulo XYZ.
C. $\therefore$?

17. En un periscopio se utiliza un método de observación indirecta. Este instrumento permite observar lo que de otra forma estaría obstruido. Dos espejos son ubicados (vea $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en el dibujo) de manera que una imagen se refleje dos veces. ¿Cómo se relacionan entre sí $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$?

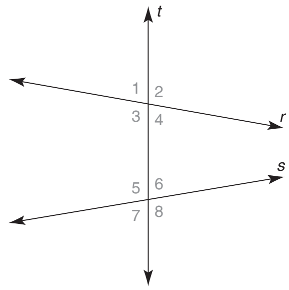


18. En algunas tiendas se emplea un método de observación indirecta. La finalidad puede ser de seguridad (para evitar colisiones) o para frustrar los intentos de posibles ladrones. En esta situación se coloca un espejo (vea $\overline{EF}$ en el dibujo) en la intersección de dos pasillos, como se muestra. Así, un observador en el punto P puede ver cualquier movimiento a lo largo del pasillo. En el bosquejo, ¿cuál es la medida de $\angle GEF$?

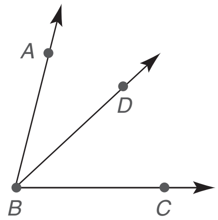


En los ejercicios 19 al 30 proporcione la demostración indirecta para cada problema o enunciado.

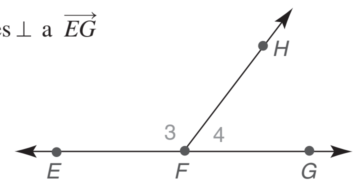
19. *Dado:* $\angle 1 \not\cong \angle 5$
Demuestre: $r \nparallel s$



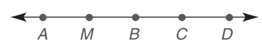
20. *Dado:* $\angle ABD \not\cong \angle DBC$
Demuestre: $\overrightarrow{BD}$ no biseca $\angle ABC$



21. *Dado:* $m\angle 3 > m\angle 4$
Demuestre: $\overrightarrow{FH}$ no es $\perp$ a $\overleftrightarrow{EG}$



22. *Dado:* $MB > BC$
$AM = CD$
Demuestre: B no es el punto medio de $\overline{AD}$



23. Si dos ángulos no son congruentes, entonces dichos ángulos no son verticales.

24. Si $x^2 \neq 25$, entonces $x \neq 5$.

25. Si los ángulos alternos internos no son congruentes cuando dos rectas se cortan por una transversal, entonces dichas rectas no son paralelas.

26. Si a y b son números positivos, entonces $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

27. El punto medio de un segmento de recta es único.

28. Hay exactamente una recta perpendicular a una recta dada en un punto en la recta.

***29.** En un plano, si dos rectas son paralelas a una tercera recta, entonces las dos rectas son paralelas entre sí.

***30.** En un plano, si dos rectas se intersecan por una transversal de manera que los ángulos correspondientes sean congruentes, entonces las rectas son paralelas.

2.3 Demostración del paralelismo de rectas

CONCEPTOS CLAVE

Demostración del paralelismo de rectas

El siguiente es un repaso de los postulados y teoremas relevantes de la sección 2.1. Cada uno tiene la hipótesis "Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal".

POSTULADO 11

Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

TEOREMA 2.1.2

Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

TEOREMA 2.1.3

Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos externos son congruentes.

TEOREMA 2.1.4

Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos internos en el mismo lado de la transversal son suplementarios.

TEOREMA 2.1.5

Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos externos en el mismo lado de la transversal son suplementarios.

Suponga que se quiere comprobar que dos rectas son paralelas en vez de establecer una relación angular (como lo hacen los enunciados anteriores). Tal teorema tomaría la forma "Si…, entonces dichas rectas son paralelas". Por ahora, el único método que se tiene para comprobar rectas paralelas se basa en la definición de rectas paralelas. ¡Establecer las condiciones de la definición (que rectas coplanares *no* se intersecan) es prácticamente imposible! Por tanto, comenzamos a desarrollar métodos para demostrar que las rectas en un plano son paralelas comprobando el teorema 2.3.1 mediante el método indirecto. Las contrapartes de los teoremas 2.1.2-2.1.5, que son los teoremas 2.3.2-2.3.5, se comprobaron de manera directa pero dependen del teorema 2.3.1. Excepto por el teorema 2.3.6, los teoremas en esta sección requieren rectas coplanares.

GEE *Ejercicios 1, 2*

TEOREMA 2.3.1

Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos correspondientes sean congruentes, entonces dichas rectas son paralelas.

DADO: ℓ y m cortadas por la transversal t

$\angle 1 \cong \angle 2$ (vea la figura 2.16)

DEMUESTRE: $\ell \parallel m$

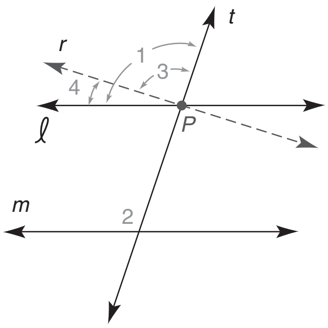


Figura 2.16

DEMOSTRACIÓN: Suponga que $\ell \nparallel m$. Entonces se puede trazar una recta r a través del punto P que sea paralela a m; esto se deduce del postulado paralelo. Si $r \parallel m$, entonces $\angle 3 \cong \angle 2$ debido a que estos ángulos corresponden. Pero $\angle 1 \cong \angle 2$ por hipótesis. Ahora $\angle 3 \cong \angle 1$ por la propiedad transitiva de la congruencia; por tanto, $m\angle 3 = m\angle 1$. Pero $m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle 1$. (Vea la figura 2.16.) La sustitución de $m\angle 1$ por $m\angle 3$ conduce a $m\angle 1 + m\angle 4 = m\angle 1$, y, por sustracción, $m\angle 4 = 0$. Esto contradice el postulado del transportador, que establece que la medida de cualquier ángulo debe ser un número positivo. Entonces r y ℓ deben coincidir y se deduce que $\ell \parallel m$. ■

Una vez comprobado, el teorema 2.3.1 abre las puertas a gran cantidad de otros métodos para comprobar que las rectas son paralelas. Cada aseveración en los teoremas 2.3.2-2.3.5 es el recíproco de su contraparte en la sección 2.1.

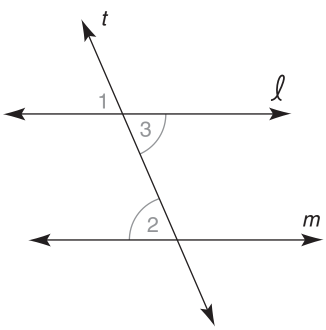


Figura 2.17

TEOREMA 2.3.2

Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos alternos internos sean congruentes, entonces dichas rectas son paralelas.

DADO: Rectas ℓ y m y transversal t

$\angle 2 \cong \angle 3$ (Vea la figura 2.17)

DEMUESTRE: $\ell \parallel m$

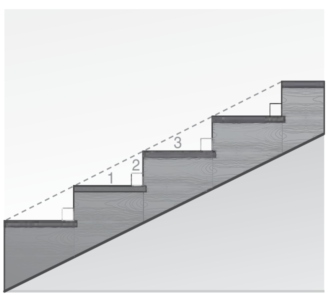
PLAN PARA LA DEMOSTRACIÓN: Demuestre que $\angle 1 \cong \angle 2$ (ángulos correspondientes). Luego aplique el teorema 2.3.1, en el cual los $\angle$s correspondientes $\cong$ implican rectas paralelas.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ℓ y m; transversal t; $\angle 2 \cong \angle 3$	1. Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 3$	2. Si dos rectas se intersecan, los $\angle$s verticales son $\cong$
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Propiedad transitiva de la congruencia
4. $\ell \parallel m$	4. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los $\angle$s correspondientes sean $\cong$, entonces estas rectas son paralelas

Descubra

Cuando se diseña una escalera se cortan "tiras" para cada lado de las escaleras como se muestra. ¿Cómo se relacionan los ángulos 1 y 3? ¿Cómo se relacionan los ángulos 1 y 2?



RESPUESTAS

Congruentes, complementarios

El teorema siguiente se comprueba de manera muy similar a la demostración del teorema 2.3.2. La demostración se deja como ejercicio.

TEOREMA 2.3.3

Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos alternos externos sean congruentes, entonces dichas rectas son paralelas.

En un dibujo más complicado podría ser difícil decidir cuáles rectas son paralelas debido a los ángulos congruentes. Considere la figura 2.18 en la página 88. Suponga que $\angle 1 \cong \angle 3$. ¿Cuáles rectas deben ser paralelas? La confusión resultante (al parecer a puede ser paralela a b; y c puede ser paralela a d) se puede superar preguntando, "¿Cuáles rectas ayudan a formar $\angle 1$ y $\angle 3$?" En este caso, $\angle 1$ y $\angle 3$ se forman por las rectas a y b con c como la transversal. Por tanto, $a \parallel b$.

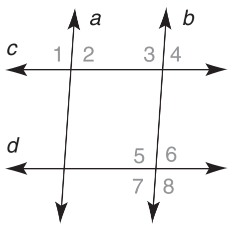


Figura 2.18

EJEMPLO 1

En la figura 2.18, ¿cuáles rectas deben ser paralelas si $\angle 3 \cong \angle 8$?

Solución $\angle 3$ y $\angle 8$ son los ángulos alternos externos que se forman cuando las rectas c y d se cortan por una transversal b. Por tanto, $c \parallel d$. ■

EJEMPLO 2

En la figura 2.18, $m\angle 3 = 94°$. Encuentre $m\angle 5$ tal que $c \parallel d$.

Solución Con b como una transversal para las rectas c y d, $\angle 3$ y $\angle 5$ son ángulos correspondientes. Entonces c sería paralela a d si $\angle 3$ y $\angle 5$ fueran congruentes. Así pues, $m\angle 5 = 94°$. ■

Los teoremas 2.3.4 y 2.3.5 permiten comprobar que las rectas son paralelas cuando ciertos pares de ángulos son suplementarios.

TEOREMA 2.3.4

Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos internos en el mismo lado de la transversal sean suplementarios, entonces dichas rectas son paralelas.

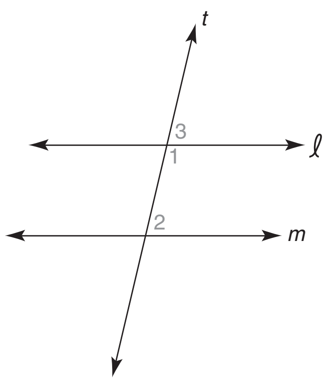


Figura 2.19

EJEMPLO 3

Demuestre el teorema 2.3.4. (Vea la figura 2.19.)

DADO: Rectas ℓ y m; transversal t

$\angle 1$ es suplementario a $\angle 2$

DEMUESTRE: $\ell \parallel m$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ℓ y m; transversal t; $\angle 1$ es supl. a $\angle 2$	1. Dado
2. $\angle 1$ es supl. a $\angle 3$	2. Si los lados exteriores de dos $\angle$s adyacentes forman una línea recta, estos $\angle$s son suplementarios
3. $\angle 2 \cong \angle 3$	3. Si dos $\angle$s son suplementarios para el mismo $\angle$, entonces son $\cong$
4. $\ell \parallel m$	4. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los $\angle$s correspondientes sean $\cong$, entonces estas rectas son paralelas

■

La demostración del teorema 2.3.5 es similar a la del teorema 2.3.4. La demostración se deja como ejercicio.

TEOREMA 2.3.5

Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos externos en el mismo lado de la transversal sean suplementarios, entonces dichas rectas son paralelas.

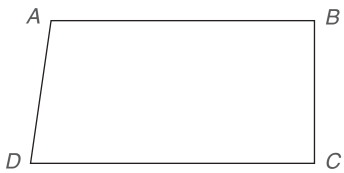


Figura 2.20

EJEMPLO 4

En la figura 2.20, ¿cuáles segmentos de recta deben ser paralelos si $\angle B$ y $\angle C$ son suplementarios?

Solución De nuevo la solución se encuentra en la pregunta "Cuáles segmentos de recta forman $\angle B$ y $\angle C$?" Con $\overline{BC}$ como transversal, $\angle B$ y $\angle C$ se forman por $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$. Como los $\angle$s B y C son suplementarios, se deduce que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. ■

Se incluyen dos teoremas finales que proporcionan formas adicionales para comprobar que las rectas son paralelas. La demostración del teorema 2.3.6 (consulte el ejercicio 33) requiere de una recta auxiliar (una transversal). La demostración del teorema 2.3.7 se encuentra en el ejemplo 5.

TEOREMA 2.3.6

Si dos rectas son paralelas a una tercera recta, entonces dichas rectas son paralelas entre sí.

El teorema 2.3.6 es verdadero aun si las tres rectas descritas no son coplanares. En el teorema 2.3.7, las rectas deben ser coplanares.

TEOREMA 2.3.7

Si dos rectas coplanares son cada una perpendicular a una tercera recta, entonces dichas rectas son paralelas entre sí.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Demostración del paralelismo de rectas

Regla general: La demostración del teorema 2.3.7 depende de establecer la condición encontrada en uno de los teoremas 2.3.1-2.3.6.

Ilustración: En el ejemplo 5, se establecieron ángulos correspondientes congruentes en el enunciado 3 de manera que las rectas son paralelas de acuerdo con el teorema 2.3.1.

GEE
Ejercicios 3-8

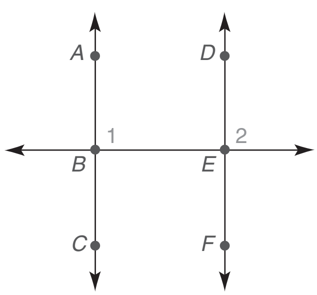


Figura 2.21

EJEMPLO 5

DADO: $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{DF} \perp \overleftrightarrow{BE}$ (Vea la figura 2.21)

DEMUESTRE: $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DF}$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{DF} \perp \overleftrightarrow{BE}$	1. Dado
2. $\angle$s 1 y 2 son $\angle$s rectos	2. Si dos rectas son perpendiculares, convergen para formar $\angle$s rectos
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Todos los ángulos rectos son $\cong$
4. $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DF}$	4. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los $\angle$s son $\cong$, entonces dichas rectas son paralelas

■

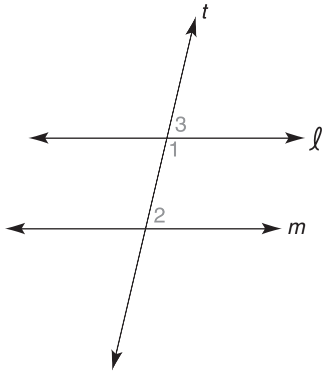


Figura 2.22

EJEMPLO 6

DADO: m∠1 = 7x y m∠2 = 5x (vea la figura 2.22)

ENCUENTRE: x, tal que ℓ sea paralela a m

Solución Para que ℓ sea paralela a m, los ∠s 1 y 2 tendrían que ser suplementarios. Esto se deduce del teorema 2.3.4 ya que los ∠s 1 y 2 son ángulos interiores en el mismo lado de la transversal t. Entonces

$$\begin{aligned} 7x + 5x &= 180 \\ 12x &= 180 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

NOTA: Con m∠1 = 105° y m∠2 = 75°, se observa que ∠1 y ∠2 son suplementarios. Entonces $\ell \parallel m$. ■

La construcción 7 depende del teorema 2.3.1, que se vuelve a enunciar a continuación.

TEOREMA 2.3.1

Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos correspondientes sean congruentes, entonces dichas rectas son paralelas.

GEE

Ejercicios 9-16

Construcción 7 *Para construir la recta paralela a una recta dada a partir de un punto fuera de dicha recta.*

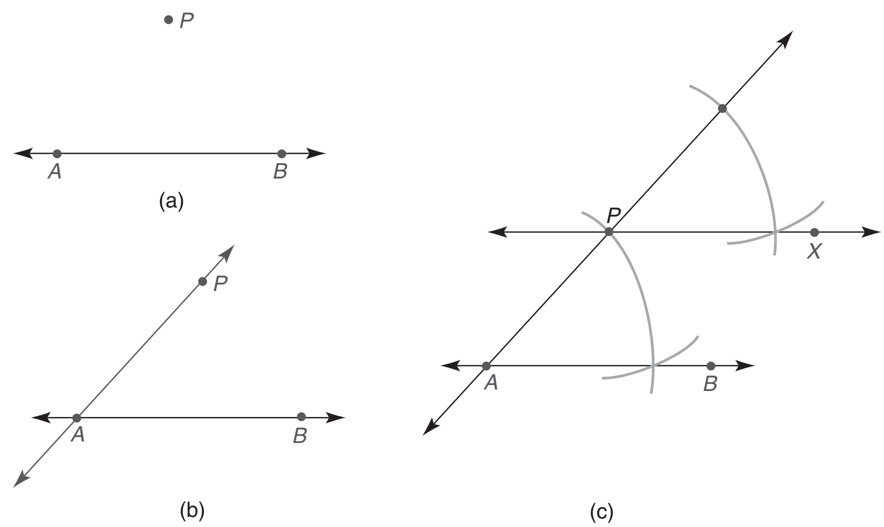


Figura 2.23

DADO: $\overleftrightarrow{AB}$ y el punto P no en $\overleftrightarrow{AB}$, como en la figura 2.23(a)

CONSTRUYA: La recta a través del punto P paralela a $\overleftrightarrow{AB}$

CONSTRUCCIÓN: En la figura 2.23(b): trace una recta (que se convertirá en una transversal) a través del punto P y de algún punto en $\overleftrightarrow{AB}$. Por conveniencia se elije el punto A y se traza $\overleftrightarrow{AP}$ como en la figura 2.23(c). Utilizando P como el vértice construya el ángulo que corresponde al ∠PAB de manera que este ángulo sea congruente con el ∠PAB. Puede ser necesario extender $\overleftrightarrow{AP}$ hacia arriba para lograr esto. $\overleftrightarrow{PX}$ es la recta deseada paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

Ejercicios 2.3

En los ejercicios 1 al 6, ℓ y m se cortan por una transversal v. Con base en la información dada, determine si ℓ debe ser paralela a m.

1. $m\angle 1 = 107°$ y $m\angle 5 = 107°$

2. $m\angle 2 = 65°$ y $m\angle 7 = 65°$

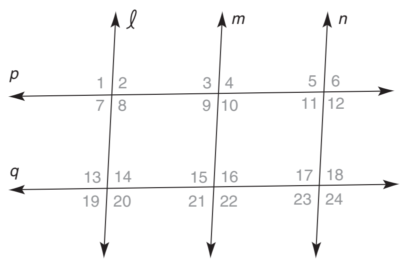
3. $m\angle 1 = 106°$ y $m\angle 7 = 76°$

4. $m\angle 1 = 106°$ y $m\angle 4 = 106°$

5. $m\angle 3 = 113.5°$ y $m\angle 5 = 67.5°$

6. $m\angle 6 = 71.4°$ y $m\angle 7 = 71.4°$

En los ejercicios 7 al 16 mencione las rectas (si las hay) que deben ser paralelas ante las condiciones dadas.



Ejercicios 7-16

7. $\angle 1 \cong \angle 20$

8. $\angle 3 \cong \angle 10$

9. $\angle 9 \cong \angle 14$

10. $\angle 7 \cong \angle 11$

11. $\ell \perp p$ y $n \perp p$

12. $\ell \parallel m$ y $m \parallel n$

13. $\ell \perp p$ y $m \perp q$

14. El $\angle 8$ y el $\angle 9$ son suplementarios.

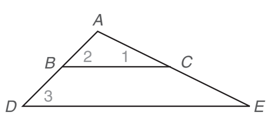
15. $m\angle 8 = 110°$, $p \parallel q$ y $m\angle 18 = 70°$.

16. Los bisectores de $\angle 9$ y $\angle 21$ son paralelos.

En los ejercicios 17 y 18 complete cada demostración con los enunciados y las razones faltantes.

17. *Dado:* $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios
$\angle 3$ y $\angle 1$ son complementarios

Demuestre: $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$

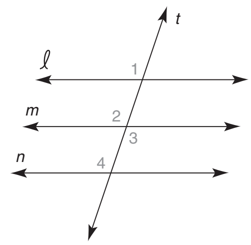


DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle$s 1 y 2 son comp.; $\angle$s 3 y 1 son comp.	1. ?
2. $\angle 2 \cong \angle 3$	2. ?
3. ?	3. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que $\angle$s corr. sean $\cong$, las rectas son $\parallel$

18. *Dado:* $\ell \parallel m$
$\angle 3 \cong \angle 4$

Demuestre: $\ell \parallel n$



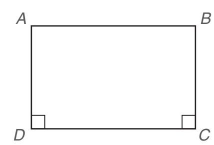
DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\ell \parallel m$	1. ?
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. ?
3. $\angle 2 \cong \angle 3$	3. Si dos rectas se intersecan, los $\angle$s verticales que se forman son $\cong$
4. ?	4. Dado
5. $\angle 1 \cong \angle 4$	5. Propiedad transitiva de $\cong$
6. ?	6. ?

En los ejercicios 19 al 22 complete la demostración.

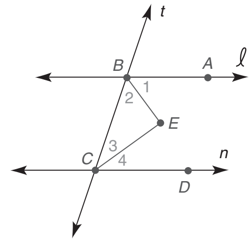
19. *Dado:* $\overline{AD} \perp \overline{DC}$
$\overline{BC} \perp \overline{DC}$

Demuestre: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

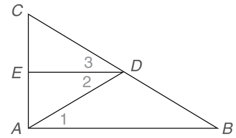


20. *Dado:* $m\angle 2 + m\angle 3 = 90°$
$\overrightarrow{BE}$ biseca $\angle ABC$
$\overrightarrow{CE}$ biseca $\angle BCD$

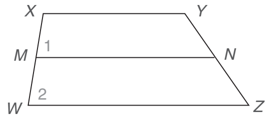
Demuestre: $\ell \parallel n$



21. *Dado:* $\overrightarrow{DE}$ biseca $\angle CDA$
$\angle 3 \cong \angle 1$
Demuestre: $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$



22. *Dado:* $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
Demuestre: $\overline{MN} \parallel \overline{XY}$



En los ejercicios 23 al 30 determine el valor de x tal que la recta ℓ sea paralela a la recta m.

23. $m\angle 4 = 5x$
$m\angle 5 = 4(x + 5)$

24. $m\angle 2 = 4x + 3$
$m\angle 7 = 5(x - 3)$

25. $m\angle 3 = \frac{x}{2}$
$m\angle 5 = x$

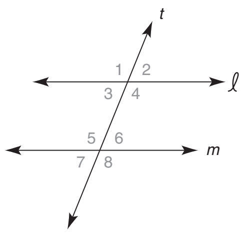
26. $m\angle 1 = \frac{x}{2} + 35$
$m\angle 5 = \frac{3x}{4}$

27. $m\angle 6 = x^2 - 9$
$m\angle 2 = x(x - 1)$

28. $m\angle 4 = 2x^2 - 3x + 6$
$m\angle 5 = 2x(x - 1) - 2$

29. $m\angle 3 = (x + 1)(x + 4)$
$m\angle 5 = 16(x + 3) - (x^2 - 2)$

30. $m\angle 2 = (x^2 - 1)(x + 1)$
$m\angle 8 = 185 - x^2(x + 1)$



Ejercicios 28-30

En los ejercicios 31 al 33 obtenga una demostración formal para cada teorema.

31. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos alternos externos sean congruentes, entonces dichas rectas son paralelas.

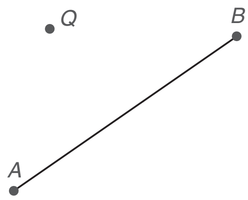
32. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos externos en el mismo lado de la transversal sean suplementarios, entonces dichas rectas son paralelas.

33. Si dos rectas son paralelas a una misma recta, entonces dichas rectas son paralelas entre sí. (Suponga tres rectas coplanares.)

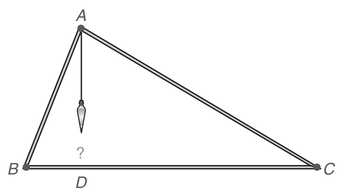
34. Explique por qué el enunciado en el ejercicio 33 permanece verdadero aun si las tres rectas no son coplanares.

35. Dado que el punto P *no* se encuentra en la recta ℓ, construya la recta a través del punto P que sea paralela a la recta ℓ.

36. Dado que el punto Q *no* se encuentra en $\overline{AB}$, construya la recta a través del punto Q que sea paralela a $\overline{AB}$.



37. Un carpintero coloca una cuerda de una plomada desde el punto A hasta $\overline{BC}$.
Suponiendo que $\overline{BC}$ es horizontal, el punto D que interseca la cuerda de la plomada en $\overline{BC}$ determinará el segmento de recta vertical $\overline{AD}$. Mediante un trazo localice el punto D.



2.4 Los ángulos de un triángulo

CONCEPTOS CLAVE

- Triángulos
- Vértices
- Lados de un triángulo
- Interior y exterior de un triángulo
- Triángulo escaleno
- Triángulo isósceles
- Triángulo equilátero
- Triángulo agudo
- Triángulo obtuso
- Triángulo rectángulo
- Triángulo equiángulo
- Recta auxiliar
- Determinada
- Indeterminada
- Sobredeterminada
- Corolario
- Ángulo externo de un triángulo

En geometría la palabra *unión* significa que las figuras están unidas o combinadas.

DEFINICIÓN

Un **triángulo** (símbolo △) es la unión de tres segmentos de recta que están determinados por tres puntos no colineales.

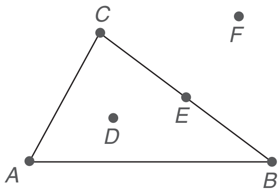
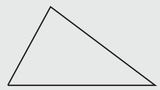
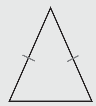
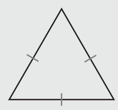


Figura 2.24

El triángulo en la figura 2.24 se conoce como $\triangle ABC$, o $\triangle BCA$, etcétera (sin que importe el orden de las letras A, B y C). Cada punto A, B y C es un **vértice** del triángulo; en conjunto, estos tres puntos son los **vértices** del triángulo. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son los **lados** del triángulo. El punto D está en el **interior** del triángulo, el punto E está en el triángulo y el punto F está en el **exterior** del triángulo.

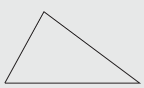
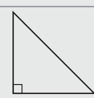
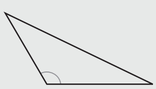
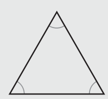
Los triángulos se pueden categorizar por las longitudes de sus lados. En la tabla 2.1 se presenta cada tipo de triángulo, la relación entre sus lados y un dibujo en el que se marcan los lados congruentes.

TABLA 2.1
Triángulos clasificados por lados congruentes

Tipo		Número de lados congruentes
Escaleno		Ninguno
Isósceles		Dos
Equilátero		Tres

Los triángulos también se pueden clasificar de acuerdo con sus ángulos (consulte la tabla 2.2).

TABLA 2.2
Triángulos clasificados por ángulos

Tipo		Ángulo(s)	Tipo		Ángulo(s)
Agudo		Todos los ángulos son agudos	Rectángulo		Un ángulo recto
Obtuso		Un ángulo obtuso	Equiángulo		Todos los ángulos congruentes

EJEMPLO 1

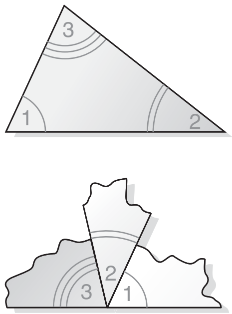
GEE
Ejercicios 1-7

En el $\triangle HJK$ (que no se muestra), $HJ = 4$, $JK = 4$ y $m\angle J = 90°$. Describa por completo el tipo de triángulo representado.

Solución El $\triangle HJK$ es un triángulo isósceles rectángulo, o el $\triangle HJK$ es un triángulo rectángulo isósceles. ■

Descubra

A partir de un triángulo de papel corte los ángulos por las "esquinas". Ahora mantenga los ángulos juntos en el mismo vértice como se muestra. ¿Cuál es la suma de las medidas de los tres ángulos?



RESPUESTA

180°

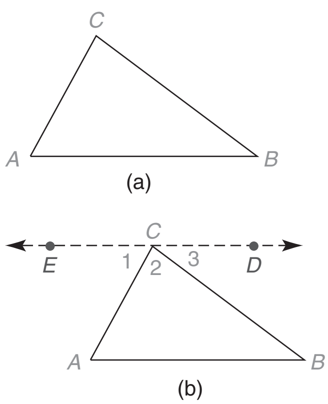


Figura 2.25

Exploración tecnológica

Utilice software de cómputo si dispone de él.

1. Trace el $\triangle ABC$.
2. Mida $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.
3. Demuestre que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

(La respuesta puede no ser "perfecta").

En un ejercicio anterior se sugirió que la suma de las medidas de los tres ángulos internos de un triángulo es 180°. Ahora esto se enuncia como un teorema y se comprueba mediante el uso de una **recta auxiliar** (o de ayuda). Cuando se agrega una recta auxiliar a un esquema para una demostración se debe dar una justificación de la existencia de dicha recta. Las justificaciones incluyen enunciados como los siguientes

A través de dos puntos distintos existe exactamente una recta.
Un ángulo tiene exactamente un bisector.
Existe sólo una recta perpendicular a otra recta en un punto en dicha recta.

Cuando en una demostración se introduce una recta auxiliar, el esquema original en ocasiones se vuelve a trazar para fines de claridad. Cada figura auxiliar se debe **determinar**, pero no se debe **subdeterminar** o **sobredeterminar**. Una figura está subdeterminada cuando se describe más de una figura posible. En el otro extremo, una figura está sobredeterminada cuando es imposible para *todas* las condiciones descritas o satisfechas.

TEOREMA 2.4.1

En un triángulo la suma de las medidas de los ángulos internos es 180°.

El primer enunciado en la siguiente "demostración gráfica" establece la recta auxiliar que se utiliza. La recta auxiliar se justifica de acuerdo con el postulado paralelo.

DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA 2.4.1

DADO: $\triangle ABC$ en la figura 2.25(a)

DEMUESTRE: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

DEMOSTRACIÓN: A través de C, trace $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overline{AB}$

Se observa que $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$. (Vea la figura 2.25(b).)

Pero $m\angle 1 = m\angle A$ y $m\angle 3 = m\angle B$ (los ángulos alternos internos son congruentes).

Entonces $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ en la figura 2.25(a). ■

En ocasiones se utilizan los conceptos de igualdad y congruencia de ángulos de manera indistinta dentro de una demostración. Consulte la "demostración gráfica" anterior.

EJEMPLO 2

En el $\triangle RST$ (no se muestra), $m\angle R = 45°$ y $m\angle S = 64°$. Encuentre $m\angle T$.

Solución En el $\triangle RST$, $m\angle R + m\angle S + m\angle T = 180°$, por tanto $45° + 64° + m\angle T = 180°$. Así, $109° + m\angle T = 180°$ y $m\angle T = 71°$. ■

Un teorema que se deduce de manera directa de un teorema anterior se conoce como **corolario** de dicho teorema. Los corolarios, al igual que los teoremas, se deben comprobar antes de que puedan ser utilizados. A menudo estas demostraciones son breves, pero dependen del teorema relacionado. Algunos corolarios del teorema 2.4.1 se muestran en la página 95. Se sugiere que los estudiantes hagan un esquema para ilustrar cada corolario.

COROLARIO 2.4.2

Cada ángulo de un triángulo equiángulo mide 60°.

GEE
Ejercicios 8-12

COROLARIO 2.4.3

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Demostración de un corolario

Regla general: La demostración de un corolario se completa empleando el teorema sobre el cual el corolario depende.

Ilustración: Utilizando el $\triangle NMQ$ del ejemplo 3, la demostración del corolario 2.4.3 depende del hecho de que $m\angle M + m\angle N + m\angle Q = 180°$. Con $m\angle M = 90°$, se deduce que $m\angle N + m\angle Q = 90°$.

EJEMPLO 3

DADO: El $\angle M$ es un ángulo recto en el $\triangle NMQ$ (no se muestra); $m\angle N = 57°$

ENCUENTRE: $m\angle Q$

Solución

Como los $\angle$s agudos de un triángulo rectángulo son complementarios,

$$\begin{aligned} m\angle N + m\angle Q &= 90° \\ \therefore\ 57° + m\angle Q &= 90° \\ m\angle Q &= 33° \end{aligned}$$

■

COROLARIO 2.4.4

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los ángulos terceros son congruentes.

El siguiente ejemplo ilustra el corolario 2.4.4.

EJEMPLO 4

En $\triangle RST$ y $\triangle XYZ$ (no se muestran los triángulos), $m\angle R = m\angle X = 52°$. Además, $m\angle S = m\angle Y = 59°$.

a) Encuentre $m\angle T$. b) Encuentre $m\angle Z$. c) ¿Es $\angle T \cong \angle Z$?

Solución

a) $$\begin{aligned} m\angle R + m\angle S + m\angle T &= 180° \\ 52° + 59° + m\angle T &= 180° \\ 111° + m\angle T &= 180° \\ m\angle T &= 69° \end{aligned}$$

b) Utilizando $m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180°$, se repite el inciso (a) para encontrar $m\angle Z = 69°$.

c) Sí, $\angle T \cong \angle Z$ (ambos miden 69°). ■

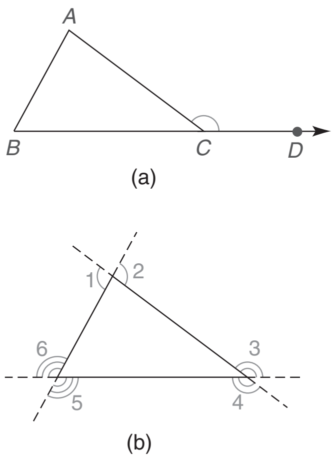


Figura 2.26

Cuando se extienden los lados de un triángulo, cada ángulo que se forma con un lado y una extensión del lado adyacente es un **ángulo externo** del triángulo. Con *B-C-D* en la figura 2.26(a), el $\angle ACD$ es un ángulo externo del $\triangle ABC$; para un triángulo hay en total seis ángulos externos: dos en cada vértice. [Vea la figura 2.26(b).]

En la figura 2.26(a), el $\angle A$ y el $\angle B$ son los dos ángulos internos *no adyacentes* para el $\angle ACD$ externo. Estos ángulos (A y B) en ocasiones se denominan ángulos internos *remotos* para el $\angle ACD$ externo.

COROLARIO 2.4.5

La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.

EJEMPLO 5

DADO: En la figura 2.27

$$m\angle 1 = x^2 + 2x$$
$$m\angle S = x^2 - 2x$$
$$m\angle T = 3x + 10$$

ENCUENTRE: x

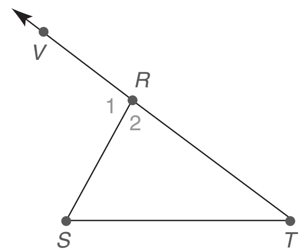


Figura 2.27

Solución De acuerdo con el corolario 2.4.5,

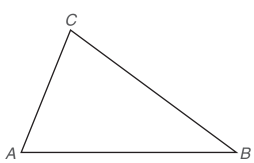
$$\begin{aligned} m\angle 1 &= m\angle S + m\angle T \\ x^2 + 2x &= (x^2 - 2x) + (3x + 10) \\ 2x &= x + 10 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

GEE
Ejercicios 13-19

Comprobación: $m\angle 1 = 120°$, $m\angle S = 80°$ y $m\angle T = 40°$; por tanto, $120 = 80 + 40$, lo que satisface las condiciones del corolario 2.4.5. ■

▶▶▶ Ejercicios 2.4

En los ejercicios 1 al 4 refiérase al $\triangle ABC$. Con base en la información dada, determine la medida del o de los ángulos del triángulo.



Ejercicios 1-6

1. $m\angle A = 63°$ y $m\angle B = 42°$
2. $m\angle B = 39°$ y $m\angle C = 82°$
3. $m\angle A = m\angle C = 67°$
4. $m\angle B = 42°$ y $m\angle A = m\angle C$
5. Describa la recta (segmento) auxiliar como determinada, sobredeterminada o subdeterminada.
   a) Trace la recta a través del vértice C del $\triangle ABC$.
   b) A través del vértice C, trace la recta paralela a $\overline{AB}$.
   c) Con M el punto medio de $\overline{AB}$, trace $\overline{CM}$ perpendicular a $\overline{AB}$.
6. Describa la recta (segmento) auxiliar como determinada, sobredeterminada o subdeterminada.
   a) A través del vértice B del $\triangle ABC$, trace $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{AC}$.
   b) Trace la recta que contiene A, B y C.
   c) Trace la recta que contiene M, el punto medio de $\overline{AB}$.

En los ejercicios 7 y 8 clasifique el triángulo (no se muestra) considerando las longitudes de sus lados.

7. a) Todos los lados del $\triangle ABC$ son de la misma longitud.
   b) En el $\triangle DEF$, $DE = 6$, $EF = 6$ y $DF = 8$.

8. a) En el $\triangle XYZ$, $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$.
b) En el $\triangle RST$, $RS = 6$, $ST = 7$ y $RT = 8$.

En los ejercicios 9 y 10 clasifique el triángulo (no se muestra) considerando las medidas de sus ángulos.

9. a) Todos los ángulos del $\triangle ABC$ miden 60°.
b) En el $\triangle DEF$, $m\angle D = 40°$, $m\angle E = 50°$ y $m\angle F = 90°$.

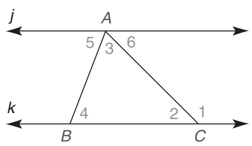
10. a) En el $\triangle XYZ$, $m\angle X = 123°$.
b) En el $\triangle RST$, $m\angle R = 45°$, $m\angle S = 65°$ y $m\angle T = 70°$.

En los ejercicios 11 y 12 trace esquemas según se requiera.

11. Suponga que para el $\triangle ABC$ y el $\triangle MNQ$, sabe que $\angle A \cong \angle M$ y $\angle B \cong \angle N$. Explique por qué $\angle C \cong \angle Q$.

12. Suponga que T es un punto en el lado $\overline{PQ}$ del $\triangle PQR$. Además, $\overrightarrow{RT}$ biseca $\angle PRQ$ y $\angle P \cong \angle Q$. Si $\angle 1$ y $\angle 2$ son los ángulos formados cuando $\overrightarrow{RT}$ interseca $\overline{PQ}$, explique por qué $\angle 1 \cong \angle 2$.

En los ejercicios 13 a 15, $j \parallel k$ y $\triangle ABC$.



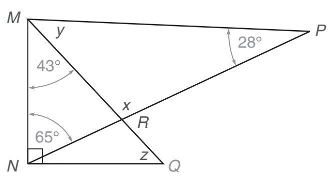
Ejercicios 13-15

13. *Dado:* $m\angle 3 = 50°$
$m\angle 4 = 72°$
Encuentre: $m\angle 1$, $m\angle 2$ y $m\angle 5$

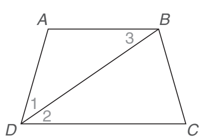
14. *Dado:* $m\angle 3 = 55°$
$m\angle 2 = 74°$
Encuentre: $m\angle 1$, $m\angle 4$ y $m\angle 5$

15. *Dado:* $m\angle 1 = 122.3°$, $m\angle 5 = 41.5°$
Encuentre: $m\angle 2$, $m\angle 3$ y $m\angle 4$

16. *Dado:* $\overline{MN} \perp \overline{NQ}$ y $\angle$s como se muestran
Encuentre: x, y, y z

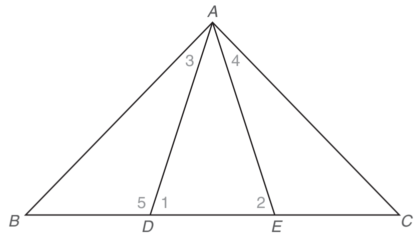


17. *Dado:* $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
$\overrightarrow{DB}$ biseca $\angle ADC$
$m\angle A = 110°$
Encuentre: $m\angle 3$



18. *Dado:* $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
$\overrightarrow{DB}$ biseca $\angle ADC$
$m\angle 1 = 36°$
Encuentre: $m\angle A$

19. *Dado:* $\triangle ABC$ con B-D-E-C
$m\angle 3 = m\angle 4 = 30°$
$m\angle 1 = m\angle 2 = 70°$
Encuentre: $m\angle B$



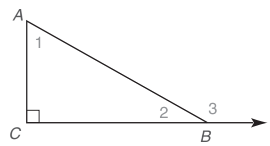
Ejercicios 19, 22

20. *Dado:* $\triangle ABC$ con B-D-E-C
$m\angle 1 = 2x$
$m\angle 3 = x$
Encuentre: $m\angle B$ en términos de x

21. *Dado:* $\triangle ADE$ con $m\angle 1 = m\angle 2 = x$ y $m\angle DAE = \frac{x}{2}$
Encuentre: x, $m\angle 1$ y $m\angle DAE$

22. *Dado:* $\triangle ABC$ con $m\angle B = m\angle C = \frac{x}{2}$ y $m\angle BAC = x$
Encuentre: x, $m\angle BAC$ y $m\angle B$

23. Considere cualquier triángulo y un ángulo externo en cada vértice. ¿Cuál es la suma de las medidas de los tres ángulos externos del triángulo?



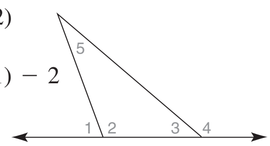
Ejercicios 24-27

24. *Dado:* $\triangle ABC$ con $\angle C$ rectángulo
$m\angle 1 = 7x + 4$
$m\angle 2 = 5x + 2$
Encuentre: x

25. *Dado:* $m\angle 1 = x$
$m\angle 2 = y$
$m\angle 3 = 3x$
Encuentre: x y y

26. *Dado:* $m\angle 1 = x$, $m\angle 2 = \frac{x}{2}$
Encuentre: x

27. *Dado:* $m\angle 1 = \frac{x}{2}$ $m\angle 2 = \frac{x}{3}$
Encuentre: x

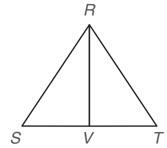


Ejercicios 28, 29

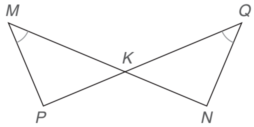
28. *Dado:* $m\angle 1 = 8(x + 2)$
$m\angle 3 = 5x - 3$
$m\angle 5 = 5(x + 1) - 2$
Encuentre: x

29. *Dado:* $m\angle 1 = x$
$m\angle 2 = 4y$
$m\angle 3 = 2y$
$m\angle 4 = 2x - y - 40$
Encuentre: x, y y $m\angle 5$

30. *Dado:* $\triangle RST$ equiángulo
$\overrightarrow{RV}$ biseca $\angle SRT$
Demuestre: que el $\triangle RVS$ es un rectángulo



31. *Dado:* $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ se intersecan en K; $\angle M \cong \angle Q$
Demuestre: $\angle P \cong \angle N$

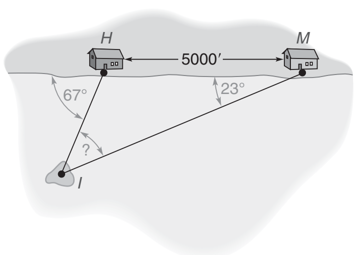


32. La suma de las medidas de dos ángulos de un triángulo es igual a la medida del tercer (mayor) ángulo. ¿Qué tipo de triángulo se describe?

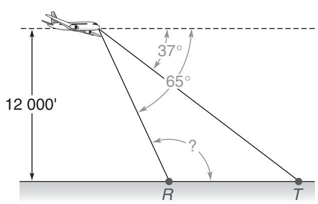
33. Trace, si es posible, un
a) triángulo isósceles obtuso.
b) triángulo rectángulo equilátero.

34. Trace, si es posible, un
a) triángulo rectángulo escaleno.
b) triángulo que tenga tanto un ángulo recto como un ángulo obtuso.

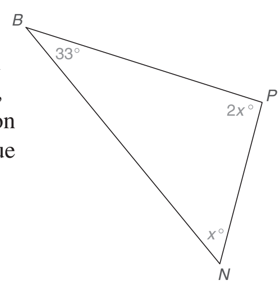
35. A lo largo de una línea costera recta dos casas se ubican en los puntos H y M. Las casas están separadas 5000 pies. Una isla pequeña se encuentra a la vista de ambas casas con ángulos como los que se indican. Encuentre m$\angle I$.



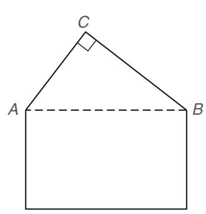
36. Un avión se ha nivelado (vuela horizontal) a una altitud de 12 000 pies. Su piloto puede ver cada uno de dos pueblos en los puntos R y T frente al aeronave. Con medidas angulares como las que se indican, encuentre m$\angle R$.



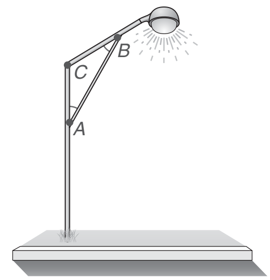
37. En un mapa tres suburbios de Los Ángeles están ubicados en los puntos N (Newport Beach), P (Pomona) y B (Burbank). Con medidas angulares como las que se indican, determine m$\angle N$ y m$\angle P$.



38. El perfil del techo de una casa tiene la forma del triángulo rectángulo ABC con m$\angle C =$ 90°. Si la medida de $\angle CAB$ es 24° mayor que la medida de $\angle CBA$, entonces ¿cuánto mide cada ángulo?

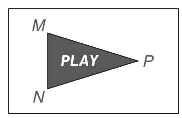


39. Un poste de alumbrado tiene un diseño tal que m$\angle C =$ 110° y $\angle A \cong \angle B$. Encuentre m$\angle A$ y m$\angle B$.

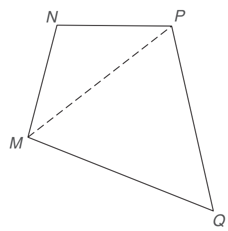


40. Para el poste de alumbrado del ejercicio 39, suponga que m$\angle A =$ m$\angle B$ y que m$\angle C =$ 3 (m$\angle A$). Encuentre m$\angle A$, m$\angle B$ y m$\angle C$.

41. El símbolo triangular en el botón “PLAY” de un reproductor de DVD tiene ángulos congruentes en M y N. Si m$\angle P = 30°$, ¿cuáles son las medidas del ángulo M y las del ángulo N?



42. Un polígono con cuatro lados se denomina *cuadrilátero*. Considere la figura y la recta auxiliar discontinua. ¿Cuál es la suma de las medidas de los cuatro ángulos internos de este (o de cualquier otro) cuadrilátero?



43. Explique por qué el enunciado siguiente es verdadero.
Cada ángulo interior de un triángulo equiángulo mide 60°.

44. Explique por qué el enunciado siguiente es verdadero.
Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

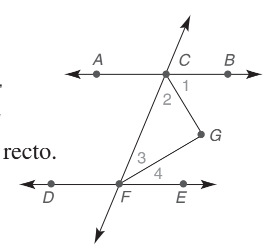
En los ejercicios 45 al 47 escriba una demostración formal para cada corolario.

45. La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.

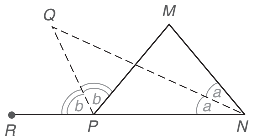
46. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los terceros ángulos también son congruentes.

47. Utilice una demostración indirecta para establecer el teorema siguiente: Un triángulo no puede tener más de un ángulo rectángulo.

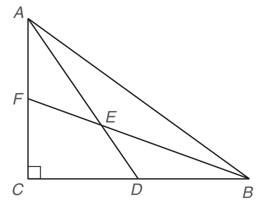
48. *Dado:* $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$
$\overrightarrow{CG}$ biseca $\angle BCF$
$\overrightarrow{FG}$ biseca $\angle CFE$
Demuestre: $\angle G$ es un ángulo recto.



***49.** *Dado:* $\overrightarrow{NQ}$ biseca $\angle MNP$
$\overrightarrow{PQ}$ biseca $\angle MPR$
$m\angle Q = 42°$
Encuentre: $m\angle M$



***50.** *Dado:* En el $\triangle ABC$ rectángulo, $\overline{AD}$ biseca $\angle CAB$ y $\overline{BF}$ biseca $\angle ABC$.
Encuentre: $m\angle FED$



2.5 Polígonos convexos

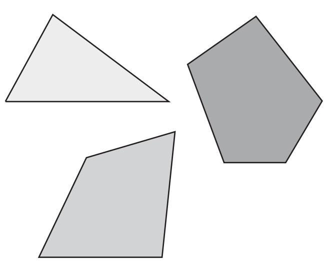
CONCEPTOS CLAVE

- Polígonos convexos (triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, nonágono, decágono)
- Polígono cóncavo
- Diagonales de un polígono
- Polígono regular
- Polígono equilátero
- Polígono equiángulo
- Poligramo

DEFINICIÓN

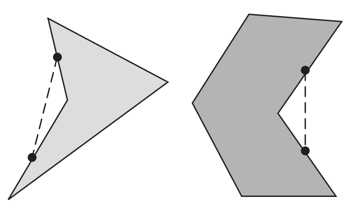
Un **polígono** es una figura plana cerrada cuyos lados son segmentos de recta que se intersecan sólo en los puntos extremos.

Los polígonos que por lo general se consideran en este libro son los **convexos**; las medidas angulares de los polígonos convexos están entre 0 y 180°. Los polígonos convexos se muestran en la figura 2.28; los que se muestran en la figura 2.29 son **cóncavos**. Un segmento de recta que une dos puntos de un polígono cóncavo puede contener puntos en el exterior del polígono. Por tanto, un polígono cóncavo siempre tiene al menos un ángulo reflejo. ¡En la figura 2.30 se muestran algunas figuras que no son polígonos en lo absoluto!



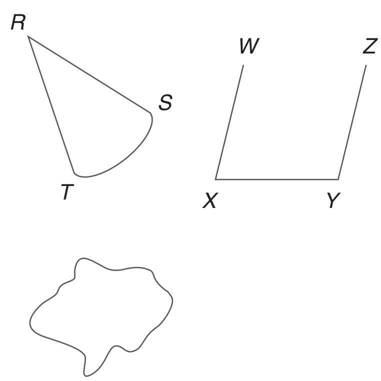
Polígonos convexos

Figura 2.28



Polígonos cóncavos

Figura 2.29



No son polígonos

Figura 2.30

Un polígono cóncavo puede tener más de un ángulo reflejo.

En la tabla 2.3 se muestran algunos nombres especiales para polígonos con números fijos de lados.

TABLA 2.3

Polígono	Número de lados	Polígono	Número de lados
Triángulo	3	Heptágono	7
Cuadrilátero	4	Octágono	8
Pentágono	5	Nonágono	9
Hexágono	6	Decágono	10

Con diagramas de Venn, el conjunto de todos los objetos en consideración se denomina **universo**. Si $P = \{$todos los polígonos$\}$ es el universo, entonces se pueden describir los conjuntos $T = \{$triángulos$\}$ y $Q = \{$cuadriláteros$\}$ como subconjuntos que se encuentran dentro del universo P. Los conjuntos T y Q se describen como una **disyunción** ya que no tienen elementos en común. Vea la figura 2.31.

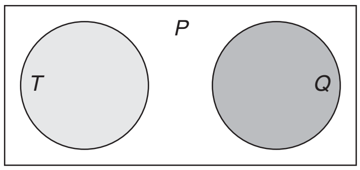


Figura 2.31

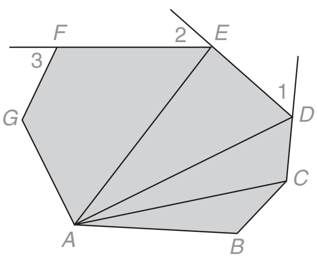


Figura 2.32

DIAGONALES DE UN POLÍGONO

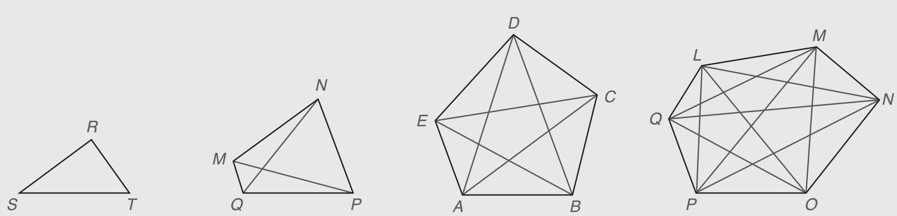
Una **diagonal** de un polígono es un segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.

En la figura 2.32 se muestra el heptágono $ABCDEFG$ para el cual $\angle GAB$, $\angle B$ y $\angle BCD$ son algunos de los ángulos internos y $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son algunos de los ángulos externos. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son algunos de los lados del heptágono debido a que éstos unen vértices consecutivos. Dado que una diagonal une vértices no consecutivos de $ABCDEFG$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ se encuentran entre las muchas diagonales del polígono.

En la tabla 2.4 se ilustran polígonos por el número de lados y el número total de diagonales correspondiente a cada tipo.

Cuando el número de lados de un polígono es pequeño se pueden enlistar por su nombre todas las diagonales. Para el pentágono $ABCDE$ de la tabla 2.4 se observan las diagonales $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CE}$; en total cinco. Conforme el número aumenta, se vuelve más difícil contar todas las diagonales. En ese caso es más conveniente emplear la

TABLA 2.4



Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono
3 lados	4 lados	5 lados	6 lados
0 diagonales	2 diagonales	5 diagonales	9 diagonales

fórmula del teorema 2.5.1. Aunque dicho teorema se presenta sin demostrar, el ejercicio 39 de esta sección proporciona cierta visión para su demostración.

TEOREMA 2.5.1

El número total de diagonales D en un polígono de n lados está dado por la fórmula $D = \frac{n(n-3)}{2}$.

El teorema 2.5.1 confirma el hecho de que un triángulo no tiene diagonales; cuando $n = 3$, $D = \frac{3(3-3)}{2} = 0$.

EJEMPLO 1

Aplique el teorema 2.5.1 para encontrar el número de diagonales para cualquier pentágono.

Ejercicios 1-5

Solución Para aplicar la fórmula del teorema 2.5.1, se observa que $n = 5$ en un pentágono.

Entonces $D = \frac{5(5-3)}{2} = \frac{5(2)}{2} = 5$. ■

SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN POLÍGONO

Recuerde

La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

El teorema siguiente proporciona la fórmula para la suma de los ángulos internos de cualquier polígono.

TEOREMA 2.5.2

La suma S de las medidas de los ángulos internos de un polígono con n lados está dada por $S = (n - 2) \cdot 180°$. Observe que $n > 2$ para cualquier polígono.

Considere una demostración informal del teorema 2.5.2 para el caso especial de un pentágono. La demostración cambiaría para un polígono de diferente número de lados, pero sólo por el número de triángulos en los que se puede separar el polígono. Aunque el teorema 2.5.2 también es válido para polígonos cóncavos, la demostración se considera sólo para el caso del polígono convexo.

Demostración

Considere el pentágono $ABCDE$ en la figura 2.33 con segmentos auxiliares (diagonales desde un vértice) como se muestra.

Con los ángulos marcados como se muestra en los triángulos ABC, ACD y ADE,

$$\begin{array}{rcl} m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 & = & 180° \\ m\angle 6 + m\angle 5 + m\angle 4 & = & 180° \\ m\angle 8 + m\angle 9 + m\angle 7 & = & 180° \\ \hline m\angle E + m\angle A + m\angle D + m\angle B + m\angle C & = & 540° \end{array} \quad \text{sumando}$$

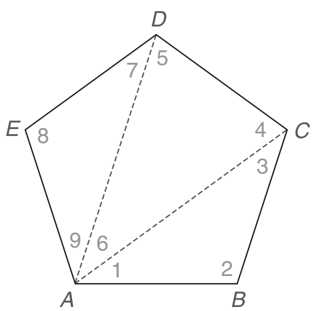


Figura 2.33

Para el pentágono $ABCDE$, en el cual $n = 5$, la suma de las medidas de los ángulos internos es $(5 - 2) \cdot 180°$, lo que es igual a 540°.

Cuando se trazan diagonales desde un vértice de un polígono de n lados, siempre se forman $(n - 2)$ triángulos. La suma de las medidas de los ángulos internos siempre es igual a $(n - 2) \cdot 180°$. ■

EJEMPLO 2

Encuentre la suma de las medidas de los ángulos internos de un hexágono. Luego determine la medida de cada ángulo interno de un hexágono equiángulo.

Solución Para el hexágono, $n = 6$, por lo que la suma de las medidas de los ángulos internos es $S = (6 - 2) \cdot 180°$ o $4(180°)$ o $720°$.

En un hexágono equiángulo cada uno de los seis ángulos internos mide $\frac{720°}{6}$, o $120°$. ■

EJEMPLO 3

Encuentre el número de lados en un polígono cuya suma de los ángulos internos sea $2160°$.

Solución Aquí $S = 2160$ en la fórmula del teorema 2.5.2. Debido a que $(n - 2) \cdot 180 = 2160$, se tiene $180n - 360 = 2160$.

Entonces $180n = 2520$

$n = 14$

GEE *Ejercicios 6-9*

El polígono tiene 14 lados. ■

POLÍGONOS REGULARES

En la figura 2.34 se muestran polígonos que son, respectivamente, (a) **equilátero**, (b) **equiángulo** y (c) **regular** (tanto lados como ángulos son congruentes). Observe las rayas que indican lados congruentes y los arcos que indican ángulos congruentes.

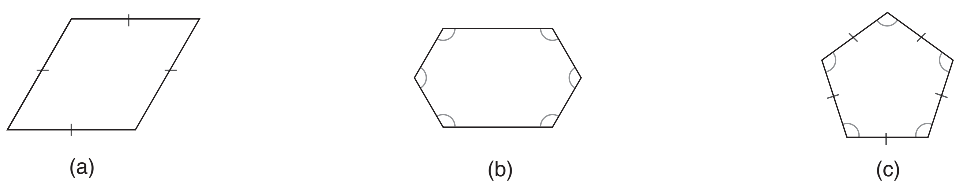


Figura 2.34

DEFINICIÓN

Un **polígono regular** es un polígono que es equilátero y equiángulo.

El polígono en la figura 2.34(c) es un *pentágono regular*. Otros ejemplos de polígonos regulares incluyen el triángulo equilátero y el cuadrado.

Con base en la fórmula $S = (n - 2) \cdot 180°$ del teorema 2.5.2, también hay una fórmula para la medida de cada ángulo interior de un polígono regular con n lados. También se aplica a polígonos equiángulos.

COROLARIO 2.5.3

La medida I de cada ángulo interno de un polígono regular o polígono equiángulo de n lados es $I = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$

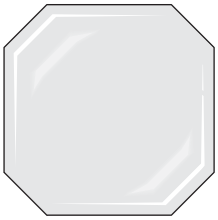


Figura 2.35

EJEMPLO 4

Encuentre la medida de cada ángulo interno de una baldosa de piso cerámico con forma de un octágono equiángulo (figura 2.35).

Solución Para un octágono $n = 8$.

Entonces
$$I = \frac{(8 - 2) \cdot 180}{8}$$
$$= \frac{6 \cdot 180}{8}$$
$$= \frac{1080}{8}, \qquad \text{por tanto} \qquad I = 135°$$

Cada ángulo interno de la baldosa mide 135°.

NOTA: Para las baldosas octagonales del ejemplo 4 se utilizan cuadrados pequeños como “rellenos” para cubrir el piso. El patrón, conocido como mosaico, se muestra en la sección 8.3. ■

EJEMPLO 5

Cada ángulo interno de un cierto polígono regular tiene una medida de 144°. Encuentre su número de lados e identifique el tipo de polígono que es.

Solución Sea n el número de lados que tiene el polígono. Todos los n ángulos internos son de la misma medida.

La medida de cada ángulo interno está dada por

$$I = \frac{(n - 2) \cdot 180}{n} \qquad \text{donde} \quad I = 144$$

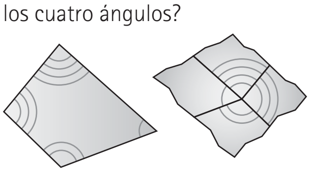
GEE
Ejercicios 10-12

Entonces
$$\frac{(n - 2) \cdot 180}{n} = 144$$
$$(n - 2) \cdot 180 = 144n \qquad \textbf{(multiplicando por } n\textbf{)}$$
$$180n - 360 = 144n$$
$$36n = 360$$
$$n = 10$$

Con 10 lados el polígono es un decágono regular. ■

Descubra

A partir de un cuadrilátero de papel corte los ángulos por las “esquinas”. Ahora coloque los ángulos de manera que compartan el mismo vértice y *no* se traslapen. ¿Cuál es la suma de las medidas de los cuatro ángulos?



RESPUESTA
360°

Un segundo corolario para el teorema 2.5.2 concierne a la suma de los ángulos internos de cualquier cuadrilátero. Para la demostración simplemente se asigna $n = 4$ en la fórmula $S = (n - 2) \cdot 180°$. Entonces $S = (4 - 2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°$. Además, consulte la sección Descubra a la izquierda.

COROLARIO 2.5.4

La suma de los cuatro ángulos internos de un cuadrilátero es 360°.

Con base en el corolario 2.5.4 está claro que es el caso en que cada ángulo interno de un cuadrado o rectángulo mide 90°.

El siguiente corolario interesante para el teorema 2.5.2 se puede establecer mediante álgebra.

COROLARIO 2.5.5

La suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono, uno en cada vértice, es 360°.

Ahora consideremos la demostración algebraica para el corolario 2.5.5.

Demostración

Un polígono de n lados tiene n ángulos internos y n ángulos externos si se considera uno en cada vértice. Como se muestra en la figura 2.36 estos ángulos internos y externos se pueden agrupar en pares de ángulos suplementarios. Debido a que hay n pares de ángulos, la suma de las medidas de todos los pares es $180 \cdot n$ grados.

Por supuesto, la suma de las medidas de los ángulos internos es $(n-2) \cdot 180°$.

En palabras, se tiene

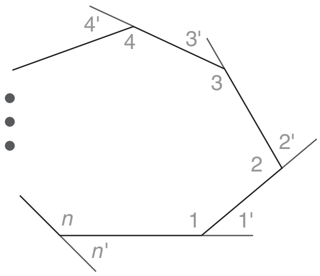


Figura 2.36

Suma de medidas de ángulos internos	+	Suma de medidas de ángulos externos	=	Suma de medidas de todos los pares suplementarios

Sea que S represente la suma de las medidas de los ángulos externos.

$$\begin{aligned}(n-2)\cdot 180 + S &= 180n\\ 180n - 360 + S &= 180n\\ -360 + S &= 0\\ \therefore S &= 360\end{aligned}$$

El corolario siguiente se deduce del corolario 2.5.5. La afirmación hecha en el corolario 2.5.6 se aplica en el ejemplo 6.

COROLARIO 2.5.6

La medida E de cada ángulo externo de un polígono regular o polígono equiángulo de n lados es $E = \frac{360°}{n}$.

EJEMPLO 6

Aplique el corolario 2.5.6 para encontrar el número de lados de un polígono regular si cada ángulo interno mide 144°. (Observe que se está repitiendo el ejemplo 5.)

Solución Si cada ángulo interno mide 144°, entonces cada ángulo externo mide 36° (son suplementarios, ya que los lados externos de estos ángulos adyacentes forman una línea recta).

Ahora cada uno de los n ángulos externos tiene la medida

$$\frac{360°}{n}$$

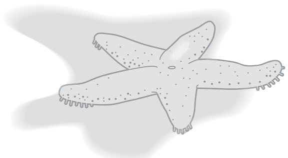
En este caso, $\frac{360}{n} = 36$ y se deduce que $36n = 360$, por tanto $n = 10$. El polígono (un decágono) tiene 10 lados. ■

POLIGRAMOS

GÉE *Ejercicios 13-14*

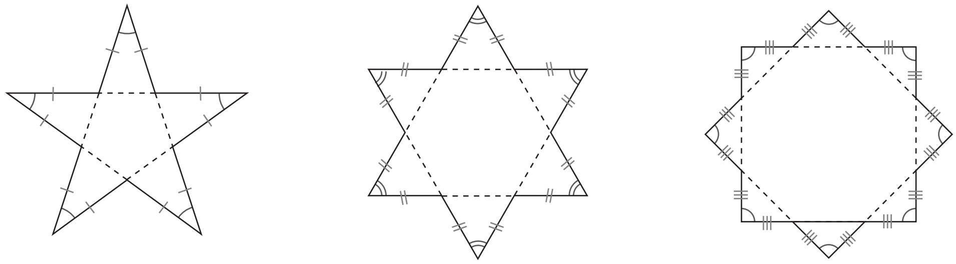
Un **poligramo** es la figura con forma de estrella que resulta cuando se extienden los lados de polígonos convexos de cinco o más lados. Cuando el polígono es regular, el poligramo resultante también es regular; es decir, los ángulos agudos internos son congruentes, los

Geometría en la naturaleza



La estrella de mar tiene la forma de un pentagrama.

ángulos reflejos internos son congruentes y todos sus lados son congruentes. Los nombres de los poligramos provienen de los nombres de los polígonos cuyos lados se extendieron. En la figura 2.37 se muestra un pentagrama, un hexagrama y un octagrama. Con los ángulos y los lados congruentes que se indican, estas figuras son **poligramos regulares**.



GEE *Ejercicios 15-16*

Figura 2.37

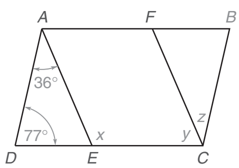
▶▶▶ Ejercicios 2.5

1. Conforme el número de lados de un polígono regular aumenta, ¿aumenta o disminuye la medida de cada ángulo interno?

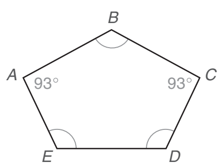
2. Conforme el número de lados de un polígono regular aumenta, ¿aumenta o disminuye la medida de cada ángulo exterior?

3. *Dado:* $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AE} \parallel \overline{FC}$ con las medidas de ángulos que se indican

Encuentre: x, y y z



4. En el pentágono $ABCDE$ con $\angle B \cong \angle D \cong \angle E$, encuentre la medida del ángulo interno D.



5. Encuentre el número de diagonales para un polígono de n lados si:
a) $n = 5$ b) $n = 10$

6. Encuentre el número total de diagonales para un polígono de n lados si:
a) $n = 6$ b) $n = 8$

7. Encuentre la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados si:
a) $n = 5$ b) $n = 10$

8. Encuentre la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados si:
a) $n = 6$ b) $n = 8$

9. Encuentre la medida de cada ángulo interno de un polígono regular de n lados si:
a) $n = 4$ b) $n = 12$

10. Encuentre la medida de cada ángulo interno de un polígono regular de n lados si:
a) $n = 6$ b) $n = 10$

11. Encuentre la medida de cada ángulo externo de un polígono regular de n lados si:
a) $n = 4$ b) $n = 12$

12. Encuentre la medida de cada ángulo externo de un polígono regular de n lados si:
a) $n = 6$ b) $n = 10$

13. Encuentre el número de lados que tiene un polígono si la suma de las medidas de sus ángulos internos es:
a) 900° b) 1260°

14. Encuentre el número de lados que tiene un polígono si la suma de las medidas de sus ángulos internos es:
a) 1980° b) 2340°

15. Encuentre el número de lados que tiene un polígono regular si la medida de cada ángulo interno es:
a) 108° b) 144°

16. Encuentre el número de lados que tiene un polígono regular si la medida de cada ángulo interno es:
a) 150° b) 168°

17. Encuentre el número de lados en un polígono regular cuyos ángulos externos miden cada uno:
a) 24° b) 18°

18. Encuentre el número de lados en un polígono regular cuyos ángulos externos miden cada uno:
a) 45° b) 9°

19. ¿Cuál es la medida de cada ángulo interno de una señal de alto?

20. Los birlos tienen la misma separación respecto a la rueda y forman los ángulos iguales que se muestran en la figura. ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos agudos?

En los ejercicios 21 al 26 con P = {todos los polígonos} como el universo, trace un diagrama de Venn para representar la relación entre estos conjuntos. Describa una relación subconjunto, si existe. ¿Los conjuntos se describen separados o equivalentes? ¿Se intersecan los conjuntos?

21. T = {triángulos}; I = {triángulos isósceles}

22. R = {triángulos rectángulos}; S = {triángulos escalenos}

23. A = {triángulos agudos}; S = {triángulos escalenos}

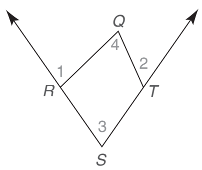
24. Q = {cuadriláteros}; L = {polígonos equiláteros}

25. H = {hexágonos}; O = {octágonos}

26. T = {triángulos}; Q = {cuadriláteros}

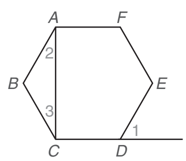
27. *Dado:* Cuadrilátero $RSTQ$ con $\angle$s externos en R y T

Demuestre: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$



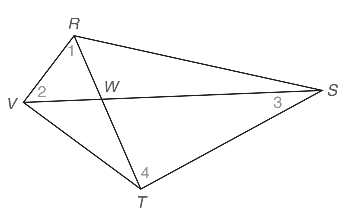
28. *Dado:* Hexágono regular $ABCDEF$ con diagonal $\overline{AC}$ y $\angle 1$ externo

Demuestre: $m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle 1$



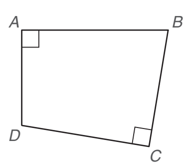
29. *Dado:* Cuadrilátero $RSTV$ con diagonales $\overline{RT}$ y $\overline{SV}$ y que se intersecan en W

Demuestre: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$

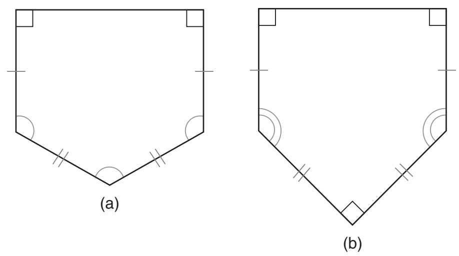


30. *Dado:* Cuadrilátero $ABCD$ con $\overline{BA} \perp \overline{AD}$ y $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

Demuestre: $\angle s$ B y D son suplementarios



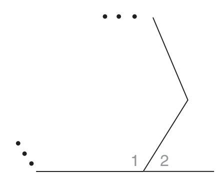
31. Un hombre desea fabricar un plato base para que su hijo practique béisbol. Encuentre el tamaño de cada uno de los ángulos iguales si el plato base se modela como el de (a) y si se modela como el de (b).



32. Los ángulos adyacentes internos y externos de un cierto polígono son suplementarios, como se indica en el dibujo. Suponga que usted sabe que la medida de cada ángulo interno de un polígono regular es $\frac{(n-2)180}{n}$.

a) Exprese la medida de cada ángulo externo como el suplemento del ángulo interno.

b) Simplifique la expresión en el inciso (a) para demostrar que cada ángulo externo tiene una medida de $\frac{360}{n}$.

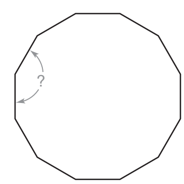


33. Encuentre la medida de cada ángulo interno agudo de un pentagrama regular.

34. Encuentre la medida de cada ángulo interno agudo de un octagrama regular.

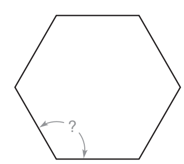
35. Considere cualquier polígono regular; encuentre y una (en orden) los puntos medios de los lados. ¿Qué le dice su intuición acerca del polígono resultante?

36. Considere un hexágono regular $RSTUVW$. ¿Qué le dice su intuición acerca del $\triangle RTV$, el resultado de trazar diagonales $\overline{RT}$, $\overline{TV}$ y $\overline{VR}$?



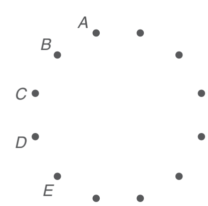
37. La carátula de un reloj tiene la forma de un polígono regular con 12 lados. ¿Cuál es la medida del ángulo formado por dos lados consecutivos?

38. La superficie superior de una mesa de campo tiene la forma de un hexágono regular. ¿Cuál es la medida del ángulo formado por dos lados consecutivos?



***39.** Considere un polígono de n lados determinado por los n vértices no colineales A, B, C, D, etcétera.

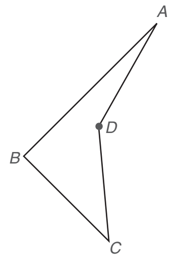
a) Elija cualquier vértice del polígono. ¿Hasta cuántos de los vértices restantes del polígono se pueden unir a los vértices seleccionados para formar una diagonal?



b) Considerando que cada uno de los n vértices en (a) se puede unir a cualquiera de los vértices restantes $(n-3)$ para formar diagonales, el producto $n(n-3)$ parece representar el número total de diagonales posibles. Sin embargo, este número incluye duplicaciones, como $\overline{AC}$ y $\overline{CA}$. ¿Cuál expresión representa en realidad D, el número total de diagonales en un polígono de n lados?

40. Para el cuadrilátero cóncavo $ABCD$, explique por qué la suma de los ángulos internos es 360°.
(SUGERENCIA: Trace $\overline{BD}$.)

41. Si $m\angle A = 20°$, $m\angle B = 88°$ y $m\angle C = 31°$, encuentre la medida del ángulo reflejo en el vértice D.
(SUGERENCIA: Consulte el ejercicio 40.)



Ejercicios 40, 41

42. ¿Es posible que un polígono tenga la suma de medidas siguiente para sus ángulos internos?
a) 600°
b) 720°

43. ¿Es posible que un polígono regular tenga las medidas siguientes para cada ángulo interno?
a) 96°
b) 140°

2.6 Simetría y transformaciones

CONCEPTOS CLAVE

Simetría	Punto de simetría	Traslaciones
Recta de simetría	Transformaciones	Reflejos
Eje de simetría	Deslizamientos	Rotaciones

RECTA DE SIMETRÍA

En la figura siguiente se dice que el rectángulo $ABCD$ tiene *simetría respecto a la recta* ℓ debido a que cada punto a la izquierda de la *recta de simetría,* o *eje de simetría,* tiene un punto correspondiente a la derecha; por ejemplo, X y Y son *puntos correspondientes*.

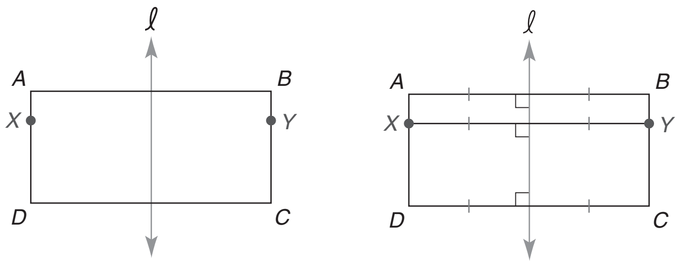


Figura 2.38

DEFINICIÓN

Una figura tiene *simetría con respecto a una recta* ℓ si para cada punto A en la figura existe un segundo punto B para el cual ℓ es el bisector de $\overline{AB}$.

En particular, $ABCD$ en la figura 2.38 tiene *simetría horizontal* respecto a la recta ℓ. Es decir, un eje de simetría vertical conduce a un apareamiento de puntos en una recta horizontal. En el ejemplo 1 de la página 108 se observa que un eje horizontal conduce a una simetría *vertical* para los puntos.

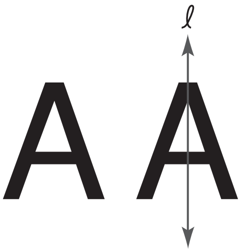
Geometría en la naturaleza

© Photo Researchers, Inc.

Al igual que muchas creaciones de la naturaleza una mariposa presenta una recta de simetría.

Descubra

La forma en bloque de la letra A mayúscula se muestra abajo. ¿Tiene simetría respecto a la recta?



RESPUESTA

Sí, la recta ℓ es una recta de simetría, como se muestra. Esta recta vertical ℓ es la única recta de simetría para la letra A mayúscula.

EJEMPLO 1

El rectángulo $ABCD$ en la figura 2.38 de la página 107 tiene una segunda recta de simetría. Trace esta recta (o eje) para la cual existe *simetría vertical*.

Solución La recta m (determinada por los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$) es la recta de simetría deseada. Tal como se muestra en la figura 2.39(b), R y S están ubicados simétricamente respecto a la recta m.

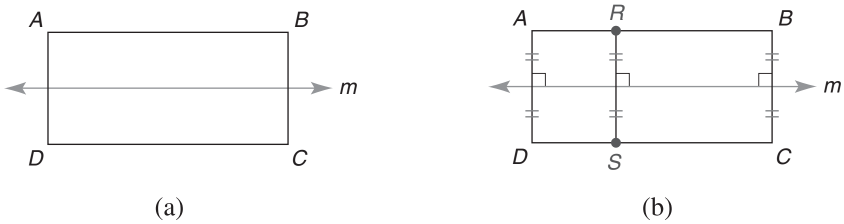


Figura 2.39

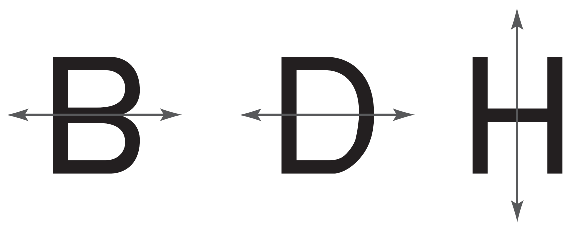
EJEMPLO 2

a) ¿Cuál(es) letra(s) de las que se muestran abajo tiene(n) una recta de simetría?
b) ¿Cuál(es) letra(s) tiene(n) más de una recta de simetría?

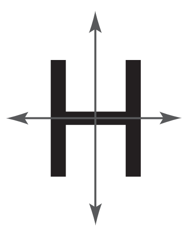
B D F G H

Solución

a) B, D y H, como se muestra



b) H, como se muestra



En el capítulo 4 se descubrirán las definiciones formales de los tipos de cuadriláteros conocidos como paralelogramo, cuadrado, rectángulo, cometa, rombo y rectángulo. Algunos de éstos se incluyen en los ejemplos 3 y 5.

EJEMPLO 3

a) ¿Cuáles figuras tienen al menos una recta de simetría?
b) ¿Cuáles figuras tienen más de una recta de simetría?

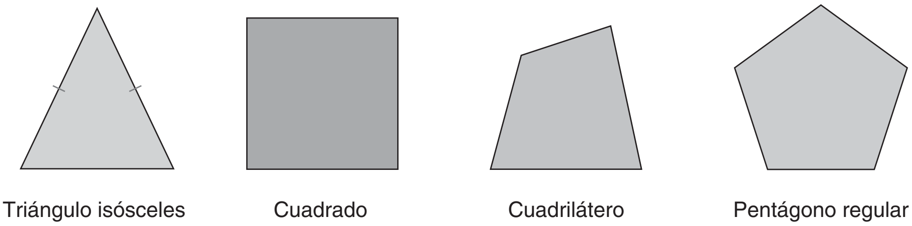
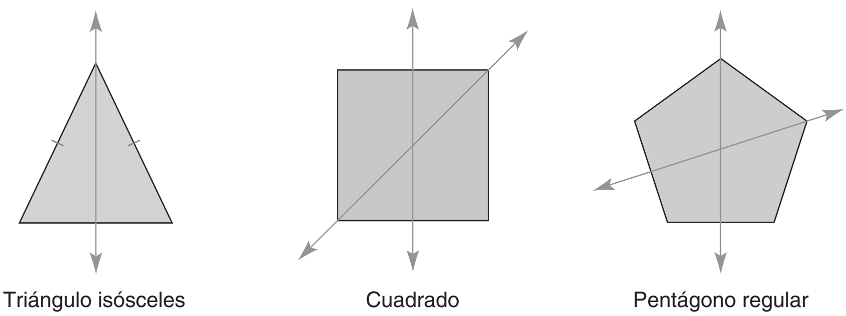


Figura 2.40(a)

Solución

a) El triángulo isósceles, el cuadrado y el pentágono regular tienen una recta de simetría.
b) El cuadrado y el pentágono regular tienen más de una recta de simetría, por lo que estas figuras se muestran con dos rectas de simetría. (En realidad hay más de dos rectas de simetría.)



GEE *Ejercicios 1-4*

Figura 2.40(b)

PUNTO DE SIMETRÍA

En la figura 2.41 también se dice que el rectángulo *ABCD* tiene *simetría respecto a un punto*. Como se muestra, el punto *P* se determina por la intersección de las diagonales del rectángulo *ABCD*.

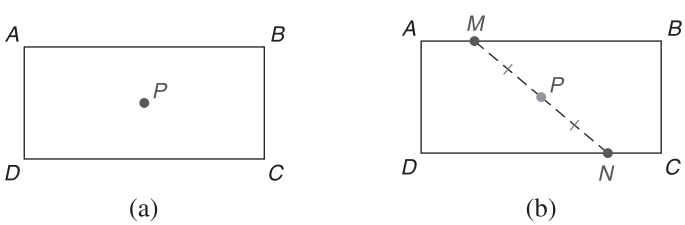


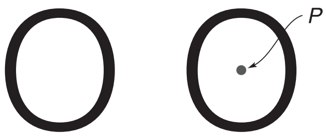
Figura 2.41

DEFINICIÓN

Una figura tiene **simetría respecto al punto *P*** si por cada punto *M* en la figura, existe un segundo punto *N* para el cual el punto *P* es el punto medio de $\overline{MN}$.

Descubra

La forma en bloque de la letra O mayúscula se muestra abajo. ¿Tiene simetría respecto a un punto?



RESPUESTA

Sí, el punto *P* (centrado) es el punto de simetría. Este punto *P* es el único punto de simetría para la letra O mayúscula.

Con base en esta definición, cada punto en el rectángulo *ABCD* en la figura 2.41(a) tiene un punto correspondiente que está a la misma distancia de *P* pero se encuentra en la dirección opuesta de *P*. En la figura 2.41(b) *M* y *N* son un par de puntos correspondientes. Si bien una figura puede tener múltiples rectas de simetría, una figura sólo puede tener un punto de simetría. Así pues, el punto de simetría (cuando existe) es único.

EJEMPLO 4

¿Cuál(es) letra(s) de las que se muestran abajo tienen un punto de simetría?

M N P S X

Solución N, S y X, como se muestra, tienen un punto de simetría. ■

EJEMPLO 5

¿Cuál(es) figura(s) en la figura 2.42(a) tiene(n) un punto de simetría?

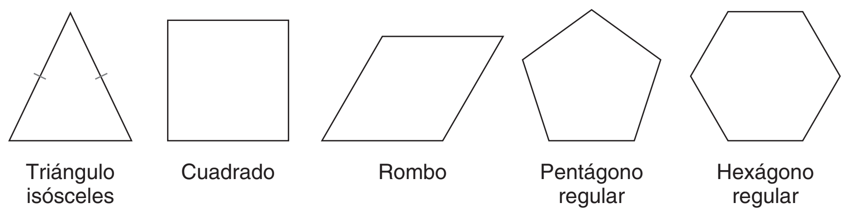


Figura 2.42(a)

Solución Sólo el cuadrado, el rombo y el hexágono regular tienen un punto de simetría. En el pentágono regular considere el punto *P* "centralmente" ubicado y observe que $AP \neq PM$.

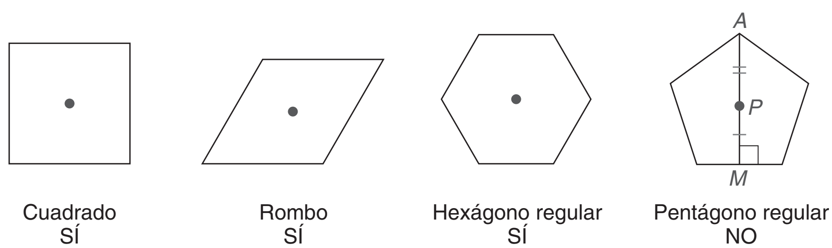


Figura 2.42(b) ■

GEE *Ejercicios 5-8*

TRANSFORMACIONES

En el material siguiente se generarán nuevas figuras a partir de figuras anteriores por asociación de puntos. En particular, las *transformaciones* incluidas en este libro conservarán la forma y el tamaño de la figura dada; en otras palabras, estas transformaciones conducirán a una segunda figura que sea *congruente* con la figura dada. Los tipos de transformaciones incluidas son (1) *deslizamiento* o *traslación*, (2) *reflejo* y (3) *rotación*.

▶ *Deslizamientos (traslaciones)*

Con este tipo de transformación cada punto de la figura original se asocia con un segundo punto ubicándolo a través de un movimiento de longitud y dirección fijas. En la figura 2.43, el $\triangle ABC$ se traslada al segundo triángulo (con imagen $\triangle DEF$) deslizando cada punto a través de la distancia y en la dirección que lleva el punto A al punto D. No es necesario el fondo cuadriculado para demostrar el deslizamiento, pero da credibilidad a nuestra afirmación de que se han utilizado las mismas longitud y dirección para ubicar cada punto.

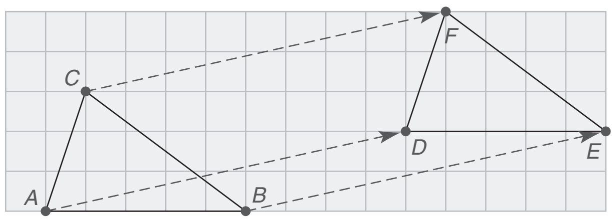
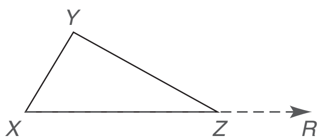


Figura 2.43

EJEMPLO 6

Deslice horizontalmente el $\triangle XYZ$ en la figura 2.44 para formar el $\triangle RST$. En este ejemplo la distancia (longitud del deslizamiento) es XR.



Solución

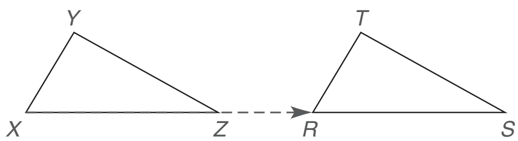


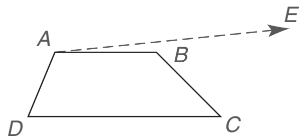
Figura 2.44

■

En el ejemplo 6, el $\triangle XYZ \cong \triangle RTS$ y también el $\triangle RTS \cong \triangle XYZ$. En cada deslizamiento la figura dada y la figura producida (su *imagen*) son necesariamente congruentes. En el ejemplo 6 la correspondencia de los vértices está dada por $X \leftrightarrow R$, $Y \leftrightarrow T$ y $Z \leftrightarrow S$.

EJEMPLO 7

Donde $A \leftrightarrow E$, complete el deslizamiento del cuadrilátero $ABCD$ para formar el cuadrilátero $EFGH$. Indique la correspondencia entre los vértices restantes.



Solución

$B \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow G$ y $D \leftrightarrow H$ en la figura 2.45.

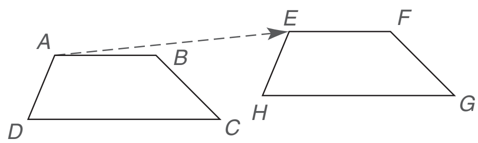


Figura 2.45

■

▶ *Reflexiones*

Con la reflexión cada punto de la figura original se refleja a través de una recta de tal manera que hace a la recta dada una recta de simetría. Cada par de puntos correspondientes se encontrará en lados opuestos de la recta de reflexión y a distancias iguales. En la figura 2.46, el triángulo obtuso MNP se refleja a través de la recta vertical $\overleftrightarrow{AB}$ para producir la imagen $\triangle GHK$. El vértice N del ángulo obtuso dado corresponde al vértice H del ángulo obtuso en el triángulo de la imagen. Es posible que la recta de reflexión sea horizontal u oblicua (inclinada). Con la recta vertical como eje de reflexión, un dibujo tal como el de la figura 2.46 en ocasiones se denomina *reflexión horizontal*, ya que la imagen se encuentra a la derecha de la figura dada.

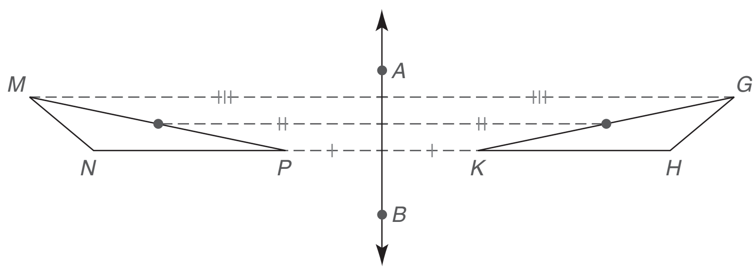
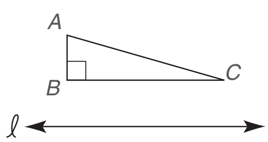


Figura 2.46

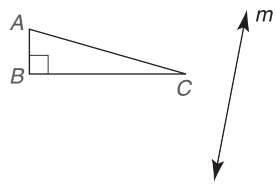
EJEMPLO 8

Trace la reflexión del $\triangle ABC$ rectángulo

a) a través de la recta ℓ para formar el $\triangle XYZ$.



b) a través de la recta m para formar el $\triangle PQR$.



Solución Tal como se muestra en la figura 2.47

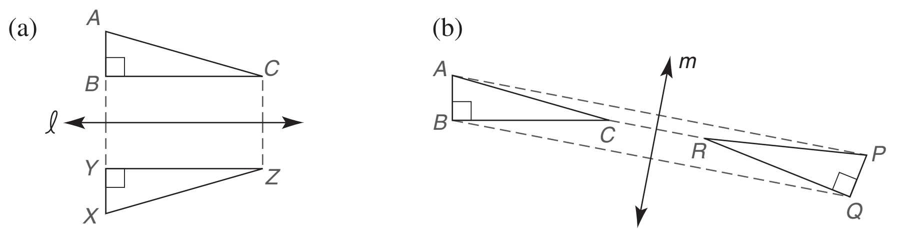
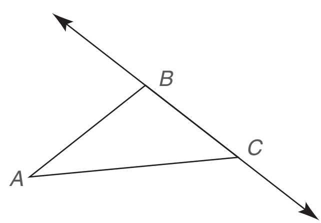


Figura 2.47

Con el eje (recta) de reflexión horizontal, la reflexión en el ejemplo 8(a) con frecuencia se denomina *reflexión vertical*. En la reflexión vertical de la figura 2.47(a) la imagen se encuentra debajo de la figura dada. En el ejemplo 9 se utiliza un lado de la figura como la recta (segmento de recta) de reflexión. Esta reflexión no es horizontal ni vertical.

EJEMPLO 9

Trace la reflexión del $\triangle ABC$ a través del lado $\overline{BC}$ para formar el $\triangle DBC$ en la figura 2.48. ¿Cómo se relacionan el $\triangle ABC$ y el $\triangle DBC$?



Solución

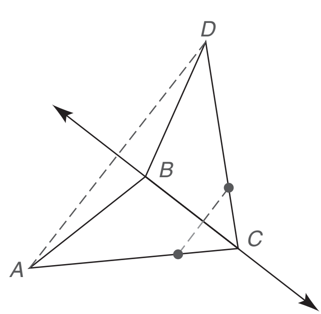


Figura 2.48

Los triángulos son congruentes; además, observe que $D \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow B$ y $C \leftrightarrow C$.

EJEMPLO 10

Complete la figura producida por una reflexión a través de la recta dada en la figura 2.49.

Solución

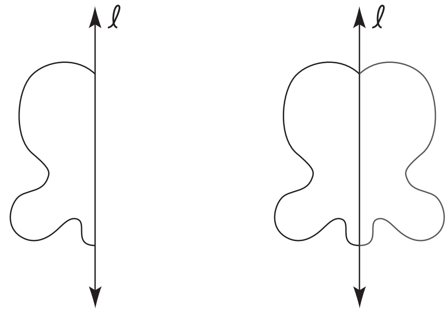


Figura 2.49

▶ *Rotaciones*

En esta transformación cada punto de la figura dada conduce a un punto (su imagen) por rotación respecto a un punto dado a través de una medida angular prescrita. En la figura 2.50 el rayo AB gira respecto al punto A en sentido de las manecillas del reloj un ángulo de 30° para producir la imagen del rayo AC. Éste tiene la misma apariencia que el minutero de un reloj en un periodo de cinco segundos. En esta figura, $A \leftrightarrow A$ y $B \leftrightarrow C$.

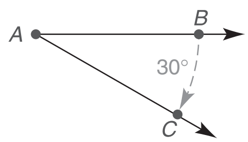


Figura 2.50

Geometría en el mundo real

El logotipo que identifica la Health Alliance Corporation inicia con una figura que consiste en un rectángulo y un cuadrado adyacente. El logotipo se completa girando esta unidad básica en ángulos de 90°.

EJEMPLO 11

En la figura 2.51 el cuadrado $WXYZ$ se ha girado en sentido contrario al de las manecillas del reloj respecto a su centro (intersección de diagonales) un ángulo de 45° para formar el cuadrado congruente $QMNP$. ¿Cuál es el nombre de la figura geométrica de ocho puntas que se forma por los dos cuadrados que se intersecan?

Solución

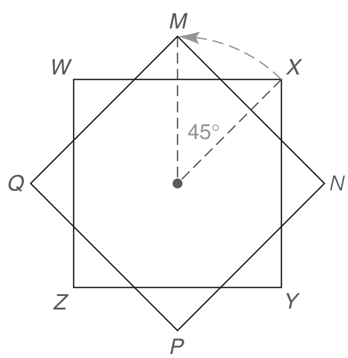


Figura 2.51

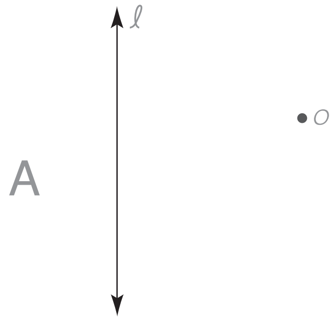
La figura de ocho puntas formada es un octagrama regular. ■

EJEMPLO 12

En la figura 2.52 se muestran la letra mayúscula A, la recta ℓ y el punto O. ¿Cuáles de los pares de transformaciones siguientes producen la figura original?

a) La letra A se refleja a través de ℓ y esa imagen se refleja a través de ℓ otra vez.
b) La letra A se refleja a través de ℓ y esa imagen se gira en el sentido de las manecillas del reloj 60° respecto al punto O.
c) La letra A se gira 180° respecto a O, seguida por otra rotación de 180° respecto a O.

Solución (a) y (c)



Ejercicios 9-14

Figura 2.52

Ejercicios 2.6

1. ¿Cuáles letras tienen simetría respecto a una recta?

M N P T X

2. ¿Cuáles letras tienen simetría respecto a una recta?

I K S V Z

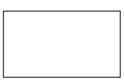
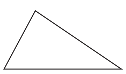
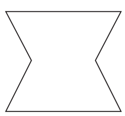
3. ¿Cuáles letras tienen simetría respecto a un punto?

M N P T X

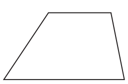
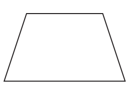
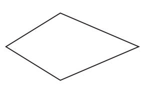
4. ¿Cuáles letras tienen simetría respecto a un punto?

I K S V Z

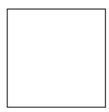
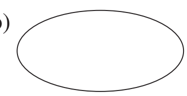
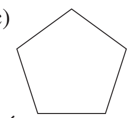
5. ¿Cuáles figuras geométricas tienen simetría al menos respecto a una recta?

a)  b)  c) 

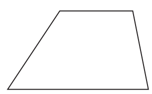
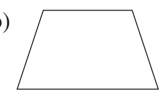
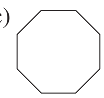
6. ¿Cuáles figuras geométricas tienen simetría al menos respecto a una recta?

a)  b)  c) 

7. ¿Cuáles figuras geométricas tienen simetría respecto a un punto?

a)  b)  c) 

8. ¿Cuáles figuras geométricas tienen simetría respecto a un punto?

a)  b)  c) 

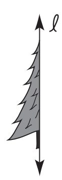
9. ¿Cuáles palabras tienen una recta de simetría vertical?

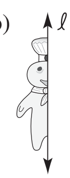
DAD MOM NUN EYE

10. ¿Cuáles palabras tienen una recta de simetría vertical?

WOW BUB MAM EVE

11. Complete cada figura de manera que tenga simetría respecto a la recta ℓ.

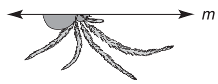
a) 

b) 

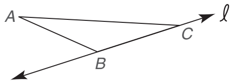
12. Complete cada figura de manera que tenga simetría respecto a la recta *m*.

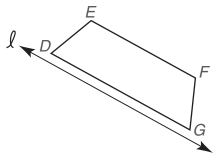
a) 

© alslutsky/Shutterstock

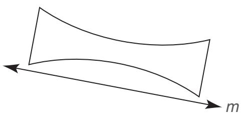
b) 

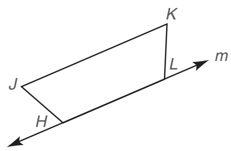
13. Complete cada figura de manera que se refleje a través de la recta ℓ.

a) 

b) 

14. Complete cada figura de manera que se refleje a través de la recta *m*.

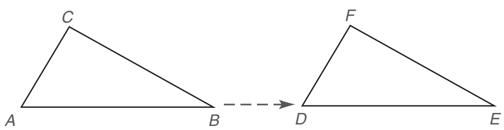
a) 

b) 

15. Suponga que el $\triangle ABC$ se desliza a la derecha hasta la posición del $\triangle DEF$.

a) Si $m\angle A = 63°$, encuentre $m\angle D$. b) ¿Es $\overline{AC} \cong \overline{DF}$?

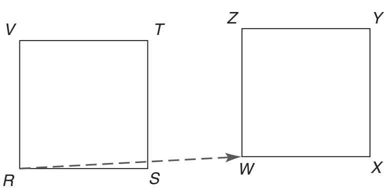
c) ¿Es el $\triangle ABC$ congruente con el $\triangle DEF$?



16. Suponga que el cuadrado *RSTV* se desliza punto por punto para formar el cuadrilátero *WXYZ*.

a) ¿Es *WXYZ* un cuadrado? b) ¿Es $RSTV \cong WXYZ$?

c) Si $RS = 1.8$ cm, encuentre *WX*.

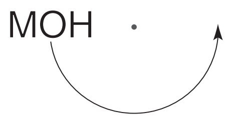


17. Dado que la recta vertical es una recta de simetría, complete cada letra para descubrir la palabra oculta.

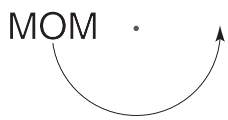
18. Dado que la recta horizontal es una recta de simetría, complete cada letra para descubrir la palabra oculta.

19. Dado que cada letra tiene simetría respecto al punto indicado, complete cada letra para descubrir la palabra oculta.

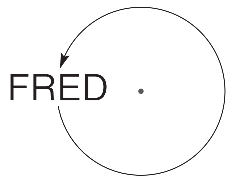
20. ¿Qué palabra se produce por una rotación de 180° respecto al punto?



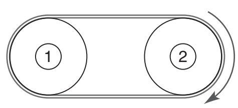
21. ¿Qué palabra se produce por una rotación de 180° respecto al punto?

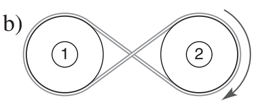


22. ¿Qué palabra se produce por una rotación de 360° respecto al punto?

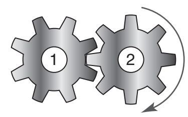


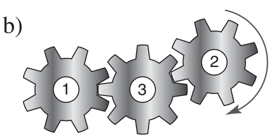
23. ¿En qué dirección (en el sentido de las manecillas del reloj, o contrario a éste) girará la polea 1 si la polea 2 gira en el sentido de las manecillas del reloj?

a) 

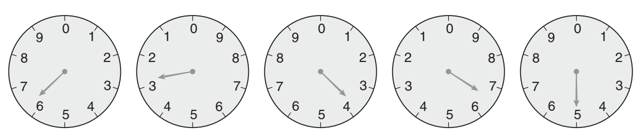
b) 

24. ¿En qué dirección (en el sentido de las manecillas del reloj, o contrario a éste) girará el engrane 1 si el engrane 2 gira en sentido de las manecillas del reloj?

a) 

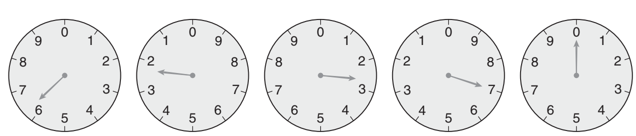
b) 

25. Considerando que los indicadores consecutivos en el medidor de electricidad giran en direcciones opuestas, ¿cuál es la lectura actual de uso en kilowatts-hora?



KWH

26. Considerando que los indicadores consecutivos en el medidor de gas natural giran en direcciones opuestas, ¿cuál es la lectura actual de uso en pies cúbicos?



Pies cúbicos

27. Dada una figura, ¿cuáles de los siguientes pares de transformaciones conducen a una imagen que repite la figura original?

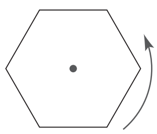
a) La figura se desliza 10 cm a la derecha *dos veces*.
b) La figura se refleja, respecto a la misma recta horizontal, *dos veces*.
c) La figura se gira en sentido de las manecillas del reloj, respecto a un punto, 180° *dos veces*.
d) La figura se gira en el sentido de las manecillas del reloj, respecto a un punto, 90° *dos veces*.

28. Dada una figura, ¿cuáles de los siguientes pares de transformaciones conducen a una imagen que repite la figura original?

a) La figura se desliza 10 cm a la derecha, seguida por un deslizamiento de 10 cm a la izquierda.
b) La figura se refleja, respecto a la misma recta horizontal, *dos veces*.
c) La figura se gira en sentido de las manecillas del reloj, respecto a un punto, 120° *dos veces*.
d) La figura se gira en el sentido de las manecillas del reloj, respecto a un punto, 360° *dos veces*.

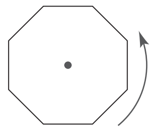
29. Un hexágono regular se gira respecto a un punto centralmente ubicado (como se muestra). ¿Cuántas rotaciones se necesitan para repetir el hexágono dado vértice por vértice si el ángulo de rotación es

a) 30°? b) 60°? c) 90° d) 240°?



30 Un octágono regular se gira respecto a un punto centralmente ubicado (como se muestra). ¿Cuántas rotaciones se necesitan para repetir el octágono dado vértice por vértice si el ángulo de rotación es

a) 10°? b) 45°? c) 90°? d) 120°?



31. El $\angle A'B'C'$ es la imagen del $\angle ABC$ siguiendo la reflexión del $\angle ABC$ a través de la recta ℓ. Si $m\angle A'B'C' = \frac{x}{5} + 20$ y $m\angle ABC = \frac{x}{2} + 5$, encuentre x.

32. El $\angle X'YZ'$ es la imagen del $\angle XYZ$ siguiendo una rotación de 100°, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, del $\angle XYZ$ respecto al punto Y. Si $m\angle XYZ = \frac{5x}{6}$ y $m\angle X'YZ' = 130°$, encuentre x.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

Bosquejo de Euclides

Entre los nombres que con frecuencia se asocian con los primeros desarrollos de los matemáticos griegos, aproximadamente en 600 a.C., se encuentran Tales, Pitágoras, Arquímedes, Apolonio, Diofanto, Eratóstenes y Herón. Sin embargo, el nombre que se asocia con más frecuencia con la geometría tradicional es el de Euclides, quien vivió alrededor de 300 a.C.

A Euclides, un griego, se le pidió dirigir el área de matemáticas en la Universidad de Alejandría (en Egipto), que era el centro del aprendizaje griego. Se cree que Euclides le dijo a Ptolomeo (el gobernante local) que "no hay un camino real hacia la geometría", en respuesta a la petición de Ptolomeo de un aprendizaje rápido y fácil.

La obra mejor conocida de Euclides es *Elementos*, un tratado sistemático de geometría con algo de álgebra y teoría de números. Esta obra, consistente en 13 volúmenes, ha dominado el estudio de la geometría durante más de 2000 años. La mayoría de los cursos de geometría de nivel secundaria, aun en la actualidad, se basan en *Elementos* de Euclides y en particular en los siguientes volúmenes:

Libro I: Triángulos y congruencia, paralelas, cuadriláteros, el teorema de Pitágoras y relaciones de área.
Libro III: Círculos, cuerdas, secantes, tangentes y medición de ángulos.
Libro IV: Construcciones y polígonos regulares.
Libro VI: Triángulos similares, proporciones y el teorema del bisector de ángulo.
Libro XI: Rectas y planos en el espacio y paralelepípedos.

Uno de los teoremas de Euclides fue el precursor del teorema de trigonometría conocido como ley de los cosenos. Aunque en la actualidad es difícil de comprender, más adelante tendrá sentido para usted. Como estableció Euclides: "En un triángulo rectángulo obtuso el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados y el producto de un lado y la proyección del otro sobre él".

Si bien se considera que Euclides fue un gran maestro, también se le reconoce como un gran matemático y como el primer autor de un libro de texto elaborado. En el capítulo 2 de *este* libro, el postulado paralelo de Euclides ha sido la base para nuestro estudio de la geometría plana.

PERSPECTIVA DE APLICACIÓN

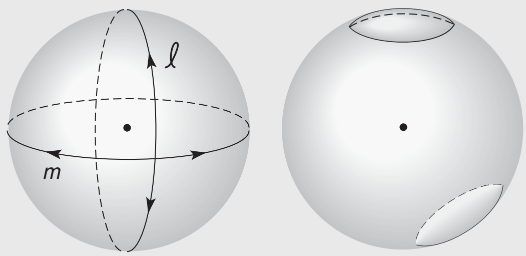
Geometrías no euclidianas

La geometría que se presenta en este libro a menudo se describe como geometría euclidiana. La geometría no euclidiana se caracteriza por la existencia de al menos una contradicción de un postulado de la geometría euclidiana. Para apreciar este tema, necesita comprender la importancia de la palabra *plano* en el postulado paralelo. Por tanto, se vuelve a enunciar este último.

> POSTULADO PARALELO
> *En un plano*, a través de un punto fuera de una recta, exactamente una recta es paralela a la recta dada.

El postulado paralelo caracteriza un curso de geometría plana; corresponde a la teoría de que la "Tierra es plana". En menor escala (la mayoría de las aplicaciones no son globales), la teoría funciona bien y sirve a las necesidades de carpinteros, diseñadores y de la mayoría de ingenieros.

Para iniciar el movimiento a una geometría diferente considere la superficie de una **esfera** (como la Tierra). Vea la



(a) ℓ y m son rectas en geometría esférica (b) Estos círculos *no* son rectas en geometría esférica

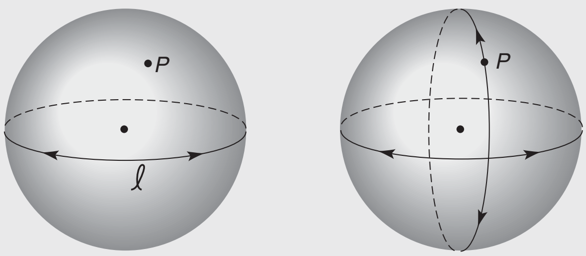
Figura 2.53

figura 2.53. Por definición, una esfera es el conjunto de todos los puntos en el espacio que están a una distancia fija desde un punto dado. Si un segmento de recta en la superficie de la esfera se extiende para formar una recta, se convierte en un gran círculo (como la línea del ecuador de la Tierra). Cada recta en esta geometría, conocida como *geometría esférica*, es la intersección de un plano que contiene el centro de la esfera con la esfera.

La geometría esférica (o geometría elíptica) en realidad es un modelo de geometría riemanniana, nombrada en honor de Georg F. B. Riemann (1826-1866), el matemático alemán responsable del postulado siguiente. El postulado riemanniano no se numera en este libro porque no caracteriza la geometría euclidiana.

> POSTULADO DE RIEMANN
> A través de un punto fuera de una recta no existen rectas paralelas a la recta dada.

Para comprender el postulado de Riemann considere una esfera (figura 2.54) que contiene la recta ℓ y el punto P fuera de ℓ. Cualquier recta trazada a través del punto P debe intersecar ℓ en dos puntos. Para ver este desarrollo siga los cuadros en la figura 2.55, los cuales representan un intento por trazar una recta paralela a ℓ a través del punto P.



(a) (b)

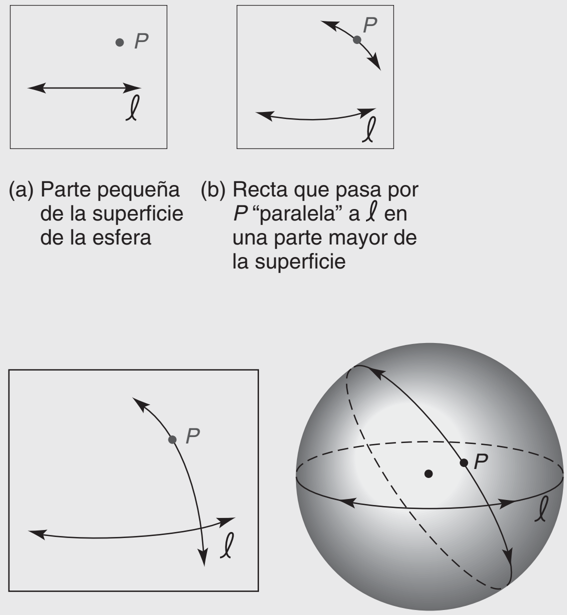
Figura 2.54

Considere la extensión natural a la geometría riemanniana de la afirmación de que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta. Por simplicidad y sentido común, una persona que viaja de Nueva York a Londres seguirá la trayectoria de una recta, como se conoce en geometría esférica. Como puede suponer, este concepto se utiliza para las cartas de los vuelos internacionales entre ciudades. En geometría euclidiana, la afirmación sugiere construir un túnel para personas debajo de la superficie de la Tierra de una ciudad a otra.

Un segundo tipo de geometría no euclidiana se atribuye a las obras del alemán Karl F. Gauss (1777-1855), del ruso Nikolai Lobachevski (1793-1856) y a las del húngaro Johann Bolyai (1802-1862). El postulado para este sistema de geometría no euclidiana es el siguiente:

> POSTULADO DE LOBACHEVSKI
> A través de un punto fuera de una recta existen infinitamente muchas rectas paralelas a la recta dada.

Esta forma de geometría no euclidiana se denomina *geometría hiperbólica*. En vez de utilizar un plano o una esfera como superficie para estudio, los matemáticos utilizan



(a) Parte pequeña de la superficie de la esfera

(b) Recta que pasa por P "paralela" a ℓ en una parte mayor de la superficie

(c) Recta que pasa por P mostrando que interseca ℓ en una parte mayor de la superficie

(d) Toda la recta ℓ y la recta a través de P que se muestra en la esfera entera

Figura 2.55

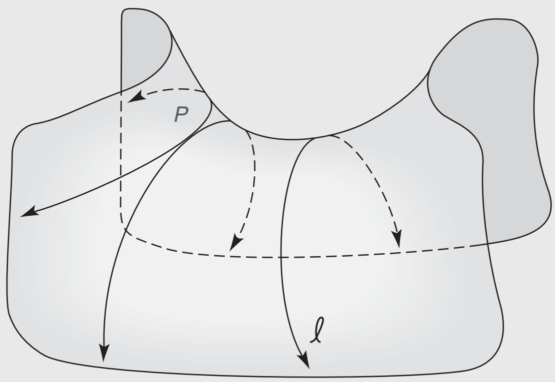


Figura 2.56

una superficie en forma de silla de montar conocida como **paraboloide hiperbólico**. (Vea la figura 2.56.) Una recta ℓ es la intersección de un plano con esta superficie. Claramente, más de un plano puede intersecar esta superficie para formar una recta que contenga a P que no interseque ℓ. De hecho, un número infinito de planos interseca la superficie en un número infinito de rectas paralelas a ℓ y que contienen a P. En la tabla 2.5 se comparan los tres tipos de geometría.

TABLA 2.5
Comparación de los tipos de geometría

Postulado	Modelo	Recta	Número de rectas a través de P paralelas a ℓ
Paralelo (euclidiano)	Geometría plana	Intersección de dos planos	Uno
Riemanniano	Geometría esférica	Intersección del plano con la esfera (el plano contiene el centro de la esfera)	Ninguno
Lobachevskiano	Geometría hiperbólica	Intersección del plano con el paraboloide hiperbólico	Infinito

Resumen

UNA VISTA RETROSPECTIVA AL CAPÍTULO 2

Un objetivo de este capítulo ha sido comprobar varios teoremas basados en el postulado "Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes". El método de demostración indirecta se introdujo como una base para comprobar el paralelismo de rectas si los ángulos correspondientes son congruentes. Luego se demostraron varios métodos de demostración del paralelismo de rectas mediante el método indirecto. El postulado paralelo se utilizó para comprobar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180°. De este teorema se dedujeron de manera natural varios corolarios. Después se desarrolló una fórmula para la suma de los ángulos internos de cualquier polígono. El capítulo terminó con un análisis de simetría y transformaciones.

UNA VISTA PRELIMINAR DEL CAPÍTULO 3

En el capítulo siguiente se extenderá el concepto de congruencia a triángulos y se desarrollarán varios métodos de demostración de triángulos congruentes. También se comprobarán varios teoremas que tratan sobre las desigualdades de un triángulo y se introducirá el teorema de Pitágoras.

CONCEPTOS CLAVE

2.1

Rectas perpendiculares • Planos perpendiculares • Rectas paralelas • Planos paralelos • Postulado paralelo • Transversal • Ángulos internos • Ángulos externos • Ángulos correspondientes • Ángulos alternos internos • Ángulos alternos externos

2.2

Condicional • Recíproco • Inverso • Contraposición • Ley de inferencia negativa • Demostración indirecta

2.3

Demostración de paralelismo de rectas

2.4

Triángulo • Vértices • Lados de un triángulo • Interior y exterior de un triángulo • Triángulo escaleno • Triángulo isósceles • Triángulo equilátero • Triángulo agudo • Triángulo obtuso • Triángulo rectángulo • Triángulo equiángulo • Recta auxiliar • Determinada • Subdeterminada • Sobredeterminada • Corolario • Ángulo externo de un triángulo

2.5

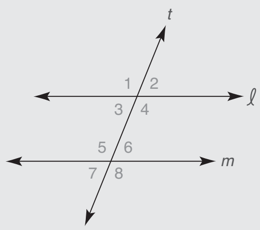
Polígonos convexos (triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, nonágono, decágono) • Polígono cóncavo • Diagonales de un polígono • Polígono regular • Polígono equilátero • Polígono equiángulo • Poligramo

2.6

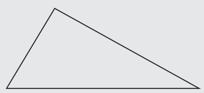
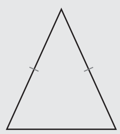
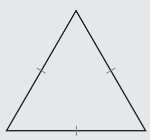
Simetría • Recta de simetría • Eje de simetría • Punto de simetría • Transformaciones • Deslizamientos • Traslaciones • Reflexiones • Rotaciones

TABLA 2.6 Una vista general del capítulo 2

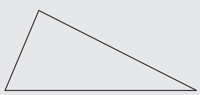
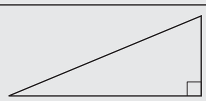
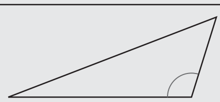
▶ Rectas paralelas y transversales

FIGURA	RELACIÓN	SÍMBOLOS
	$\ell \parallel m$	$\angle$s correspondientes $\cong$; $\angle 1 \cong \angle 5$ $\angle 2 \cong \angle 6$, etcétera. $\angle$s alternos internos $\cong$; $\angle 3 \cong \angle 6$ y $\angle 4 \cong \angle 5$ $\angle$s alternos externos $\cong$; $\angle 1 \cong \angle 8$ y $\angle 2 \cong \angle 7$ $\angle$s suplementarios; $m\angle 3 + m\angle 5 = 180°$; $m\angle 1 + m\angle 7 = 180°$, etcétera

▶ Triángulos clasificados por lados

FIGURA	TIPO	NÚMERO DE LADOS CONGRUENTES
	Escaleno	Ninguno
	Isósceles	Dos
	Equilátero	Tres

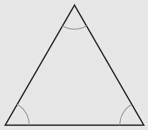
▶ Triángulos clasificados por ángulos

FIGURA	TIPO	ÁNGULO(S)
	Agudo	Tres ángulos agudos
	Rectángulo	Un ángulo recto
	Obtuso	Un ángulo obtuso

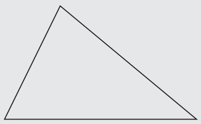
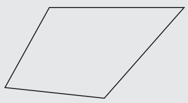
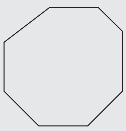
continúa

TABLA 2.6 *(continuación)*

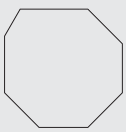
▶ Triángulos clasificados por ángulos

FIGURA	TIPO	ÁNGULO(S)
	Equiángulo	Tres ángulos congruentes

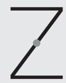
▶ Polígonos: Suma S de todos los ángulos internos

FIGURA	TIPO DE POLÍGONO	SUMA DE ÁNGULOS INTERNOS
	Triángulo	$S = 180°$
	Cuadrilátero	$S = 360°$
	Polígono con n lados	$S = (n - 2) \cdot 180°$

▶ Polígonos: Suma S de todos los ángulos externos; D es el número total de diagonales

FIGURA	TIPO DE POLÍGONO	RELACIONES
	Polígono con n lados	$S = 360°$ $D = \frac{n(n-3)}{2}$

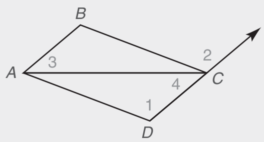
▶ Simetría

FIGURA	TIPO DE SIMETRÍA	FIGURA VUELTA A DIBUJAR PARA MOSTRAR SIMETRÍA
Z	Punto	
D	Recta	

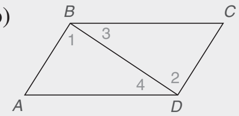
Capítulo 2 EJERCICIOS DE REPASO

1. Si m∠1 = m∠2, ¿cuáles rectas son paralelas?

(a)



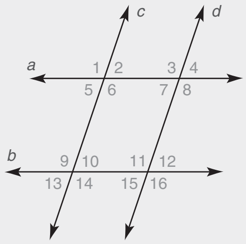
(b)



2. *Dado:* m∠13 = 70°
Encuentre: m∠3

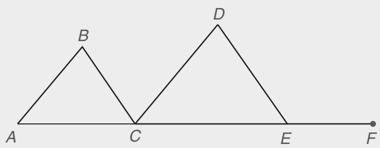
3. *Dado:* m∠9 = 2*x* + 17,
m∠11 = 5*x* − 94
Encuentre: *x*

4. *Dado:* m∠*B* = 75°,
m∠*DCE* = 50°
Encuentre: m∠*D* y m∠*DEF*



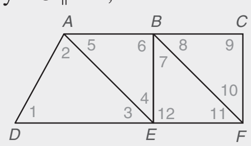
Ejercicios 2, 3

5. *Dado:* m∠*DCA* = 130°
m∠*BAC* = 2*x* + *y*
m∠*BCE* = 150°
m∠*DEC* = 2*x* − *y*
Encuentre: *x* y *y*



Ejercicios 4, 5

6. *Dado:* en el dibujo, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$,
$\overline{AC} \parallel \overline{DF}$
$\overline{AE} \parallel \overline{BF}$
m∠*AEF* = 3*y*
m∠*BFE* = *x* + 45
m∠*FBC* = 2*x* + 15
Encuentre: *x* y *y*



Ejercicios 6-11

Para los ejercicios de repaso 7 al 11 utilice la información dada para nombrar los segmentos que deben ser paralelos. Si no hay tales segmentos escriba "ninguno". Suponga A-B-C y D-E-F. (Utilice el dibujo del ejercicio 6.)

7. ∠3 ≅ ∠11

8. ∠4 ≅ ∠5

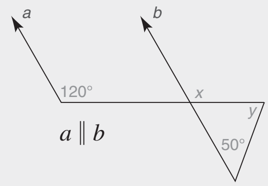
9. ∠7 ≅ ∠10

10. ∠6 ≅ ∠9

11. ∠8 ≅ ∠5 ≅ ∠3

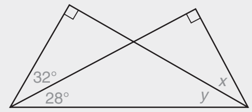
Para los ejercicios de repaso 12 al 15 encuentre los valores de x y y.

12.

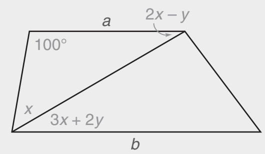


a ∥ *b*

13.

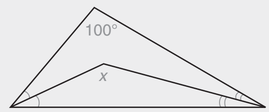


14.

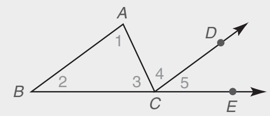


a ∥ *b*

15.



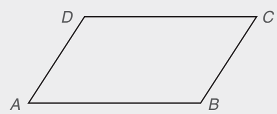
16. *Dado:* m∠1 = x^2 − 12
m∠4 = *x*(*x* − 2)
Encuentre: *x* de manera que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$



Ejercicios 16, 17

17. *Dado:* $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$
m∠2 = x^2 − 3*x* + 4
m∠1 = 17*x* − x^2 − 5
m∠*ACE* = 111°
Encuentre: m∠3, m∠4 y m∠5

18. *Dado:* $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$
∠*A* ≅ ∠*C*
m∠*A* = 3*x* + *y*
m∠*D* = 5*x* + 10
m∠*C* = 5*y* + 20
Encuentre: m∠*B*



Para los ejercicios de repaso 19 al 24 decida si los enunciados siempre son verdaderos (A), algunas veces verdaderos (S) o nunca verdaderos (N).

19. Un triángulo isósceles es un triángulo rectángulo.

20. Un triángulo equilátero es un triángulo rectángulo

21. Un triángulo escaleno es un triángulo isósceles.

22. Un triángulo obtuso es un triángulo isósceles.

23. Un triángulo rectángulo tiene dos ángulos congruentes.

24. Un triángulo rectángulo tiene dos ángulos complementarios.

25. Complete la tabla siguiente para polígonos regulares.

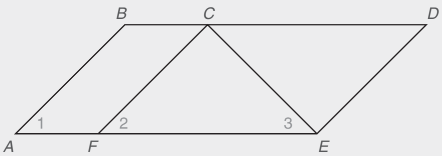
Numero de lados	8	12	20				
Medida de cada ∠ externo				24	36		
Medida de cada ∠ interno						157.5	178
Número de diagonales							

Para los ejercicios de repaso 26 al 29 haga un bosquejo, si es posible, del polígono descrito.

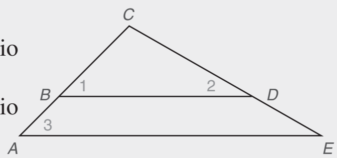
26. Un cuadrilátero que sea equiángulo pero no equilátero.
27. Un cuadrilátero que sea equilátero pero no equiángulo.
28. Un triángulo que sea equilátero pero no equiángulo.
29. Un hexágono que sea equilátero pero no equiángulo.

Para los ejercicios de repaso 30 y 31 escriba el recíproco, el inverso y el contrapositivo de cada enunciado.

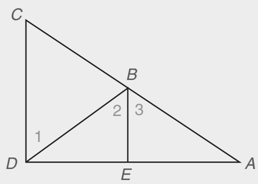
30. Si dos ángulos son ángulos rectos, entonces los ángulos son congruentes.
31. Si no está lloviendo, entonces estoy contento.
32. ¿Cuál enunciado, el recíproco, el inverso o el contrapositivo, tiene siempre la misma verdad o falsedad que una implicación dada?
33. *Dado:* $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$
$\angle 2 \cong \angle 3$
Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 3$



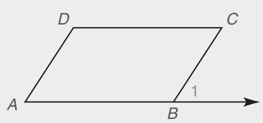
34. *Dado:* $\angle 1$ es complementario al $\angle 2$; $\angle 2$ es complementario al $\angle 3$
Demuestre: $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$



35. *Dado:* $\overline{BE} \perp \overline{DA}$
$\overline{CD} \perp \overline{DA}$
Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 2$



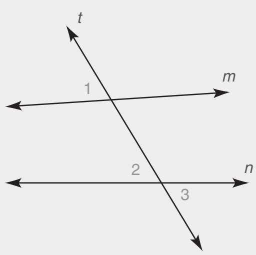
36. *Dado:* $\angle A \cong \angle C$
$\overline{DC} \parallel \overrightarrow{AB}$
Demuestre: $\overline{DA} \parallel \overline{CB}$



Para los ejercicios de repaso 37 y 38 proporcione el primer enunciado para una demostración indirecta.

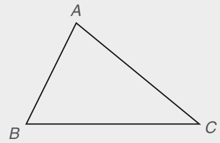
37. Si $x^2 + 7x + 12 \neq 0$, entonces $x \neq -3$.
38. Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a dichos ángulos no son congruentes.

39. *Dado:* $m \nparallel n$
Demuestre: $\angle 1 \not\cong \angle 2$
40. *Dado:* $\angle 1 \not\cong \angle 3$
Demuestre: $m \nparallel n$



Ejercicios 39, 40

41. Construya la recta a través de C paralela a $\overline{AB}$.

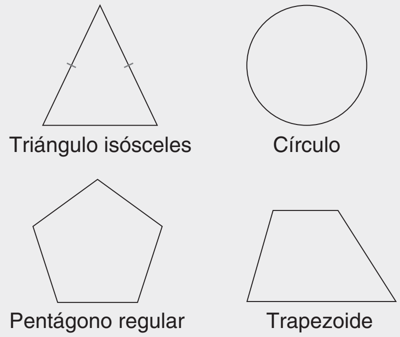


42. Construya un triángulo equilátero ABC con lado $\overline{AB}$.

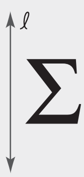
43. ¿Cuáles letras mayúsculas tienen
a) una recta de simetría (al menos un eje)?
b) un punto de simetría?

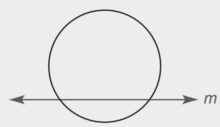
B H J S W

44. ¿Cuáles figuras tienen
a) una recta de simetría (al menos un eje)?
b) un punto de simetría?

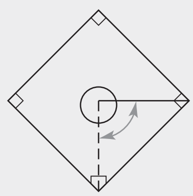


45. Cuando el $\triangle ABC$ se desliza a su imagen $\triangle DEF$, ¿cómo se relacionan el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$?
46. Complete el dibujo de manera que la figura se refleje a través
a) de la recta ℓ. b) de la recta m.

a)


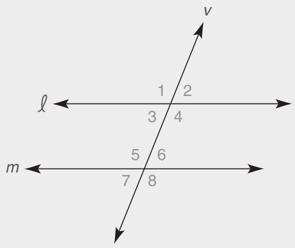
b)


47. ¿A través de qué ángulo de rotación aproximado debe girar un lanzador de béisbol al lanzar a primera base en vez de a *home*?

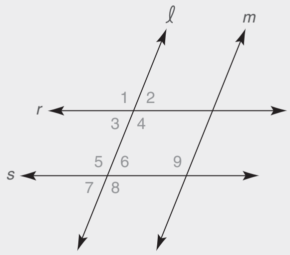


Capítulo 2 EXAMEN

1. Considere la figura que se ilustra a la derecha.
a) El ángulo que corresponde a $\angle 1$ es __________
b) El ángulo interno alterno para $\angle 6$ es __________



2. En la figura adjunta, $m\angle 2 = 68°$, $m\angle 8 = 112°$ y $m\angle 9 = 110°$.
a) ¿Cuáles rectas (r y s o ℓ y m) deben ser paralelas? __________
b) ¿Cuál par de rectas (r y s o ℓ y m) no pueden ser paralelas? __________



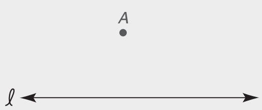
3. Para demostrar un teorema de la forma "Si P, entonces Q" con el método indirecto, el primer renglón de la demostración debería leerse: Suponga que _________ es verdadero.

4. Suponiendo que los enunciados 1 y 2 son verdaderos, deduzca una conclusión válida si es posible.
1. Si dos ángulos son ángulos rectos, entonces los ángulos son congruentes.
2. $\angle R$ y $\angle S$ no son congruentes.

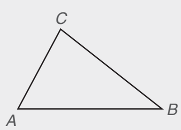
C. $\therefore$?

5. Sean coplanares todas las rectas mencionadas. Haga un esquema para llegar a una conclusión.
a) Si $r \parallel s$ y $s \parallel t$, entonces ________.
b) Si $a \perp b$ y $b \perp c$, entonces ________.

6. A través del punto A construya la recta que sea perpendicular a la recta ℓ.

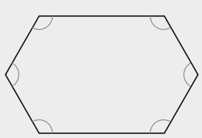


7. Para el $\triangle ABC$, encuentre $m\angle B$ si
a) $m\angle A = 65°$ y $m\angle C = 79°$. __________
b) $m\angle A = 2x$, $m\angle B = x$ y $m\angle C = 2x + 15$. __________



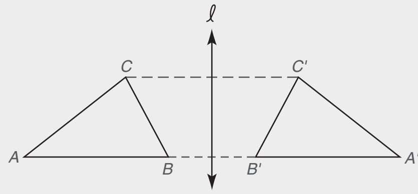
8. a) ¿Qué palabra describe un polígono con cinco lados? _________
b) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono con cinco lados? __________

9. a) Dado que el polígono que se ilustra tiene seis ángulos congruentes, este polígono se conoce como un __________
b) ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos internos congruentes? __________

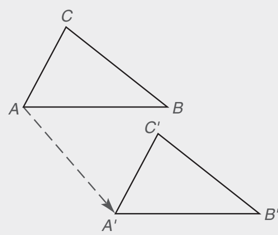


10. Considere las letras mayúsculas A, D, N, O y X.
¿Qué tipo de simetría (recta de simetría, punto de simetría, los dos tipos, o ninguno) se ilustra por cada letra?
A __________ D __________
N __________ O __________
X __________

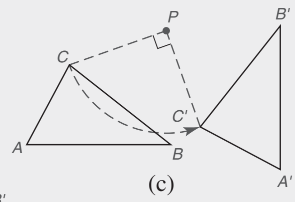
11. ¿Qué tipo de transformación (deslizamiento, reflexión o rotación se ilustra?
a)__________ b) __________ c) __________



(a)

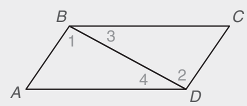


(b)



(c)

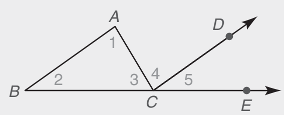
12. En la figura que se muestra suponga que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Si $m\angle 1 = 82°$ y $m\angle 4 = 37°$, encuentre $m\angle C$. __________



Ejercicios 12, 13

13. Si $m\angle 1 = x + 28$ y $m\angle 2 = 2x - 26$, encuentre el valor x para el cual se deduce que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. __________

14. En la figura que se muestra, suponga que el rayo CD biseca el ángulo externo $\angle ACE$ del $\triangle ABC$. Si $m\angle 1 = 70°$ y $m\angle 2 = 30°$, encuentre $m\angle 4$.

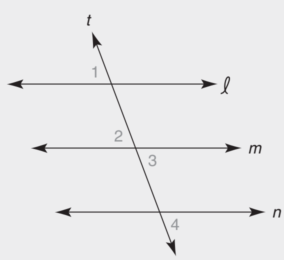


Ejercicios 14, 15

15. En la figura que se muestra, el $\angle ACE$ es un ángulo exterior del $\triangle ABC$. Si $\overline{CD} \parallel \overline{BA}$, $m\angle 1 = 2(m\angle 2)$ y $m\angle ACE = 117°$, encuentre la medida del $\angle 1$. __________

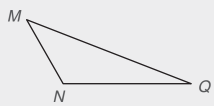
En los ejercicios 16 y 18 complete los enunciados o razones faltantes para cada demostración.

16. *Dado:* $\angle 1 \cong \angle 2$
$\angle 3 \cong \angle 4$
Demuestre: $\ell \parallel n$



DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$	1. ________
2. ________	2. Si dos rectas se intersecan, los $\angle$s verticales son $\cong$
3. $\angle 1 \cong 4$	3. ________
4. ________	4. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los $\angle$s alternos externos sean $\cong$, entonces las rectas son $\parallel$

17. Utilice una demostración indirecta para completar la demostración siguiente.

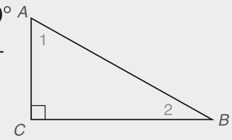


Dado: $\triangle MNQ$ con $m\angle N = 120°$

Demuestre: $\angle M$ y $\angle Q$ no son complementarios

18. *Dado:* en $\triangle ABC$, $m\angle C = 90°$

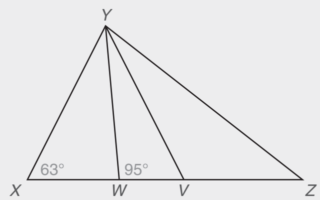
Demuestre: $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios



DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\triangle ABC$, $m\angle C = 90°$	1. ____________________
2. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle C =$ ____________	2. La suma de los $\angle$s de un $\triangle$ es 180°
3. ____________________	3. Propiedad de sustitución de la igualdad
4. $m\angle 1 + m\angle 2 =$ ____________________	4. Propiedad de sustracción de la igualdad
5. ____________________	5. ____________________

19. En el $\triangle XYZ$, el $\angle XYZ$ se triseca tal como se indica. Con las medidas de los ángulos como se muestran, encuentre $m\angle Z$.

____



Capítulo 3

Triángulos

CONTENIDO

Hay un DVD disponible que cuenta con un video con explicación de conceptos, problemas de ejemplo y aplicaciones. Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

¡Majestuoso! En la Plaza de la Estatua de Hong Kong, el Banco de China (la estructura que se muestra a la izquierda en la fotografía de arriba) se eleva a 1 209 metros sobre la plaza. Diseñado por I. M. Pei (que estudió en el Instituto de Tecnología de Massachusetts y también egresó de la Escuela de Graduados en Diseño de Harvard), el Banco de China muestra muchos triángulos de la misma forma y mismo tamaño. Estos triángulos, conocidos como triángulos congruentes, también se presentan en la rueda de la fortuna del ejercicio 41 de la sección 3.3. Mientras que el capítulo 3 está dedicado al estudio de los tipos de triángulos y sus características, las propiedades de los triángulos desarrollados aquí también proporcionan un marco de trabajo para el estudio de cuadriláteros del capítulo 4.

3.1 Triángulos congruentes

CONCEPTOS CLAVE

Triángulos congruentes
LLL
LAL
ALA
AAL
Lado incluido
Ángulo incluido
Propiedad de congruencia reflexiva (Identidad)
Propiedades de congruencia simétrica y transitiva

Dos triángulos son **congruentes** si uno coincide con (se ajusta perfectamente sobre) el otro. En la figura 3.1 se dice que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ si se conservan las siguientes congruencias:

$$\angle A \cong \angle D,\ \angle B \cong \angle E,\ \angle C \cong \angle F,\ \overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF} \text{ y } \overline{AC} \cong \overline{DF}$$

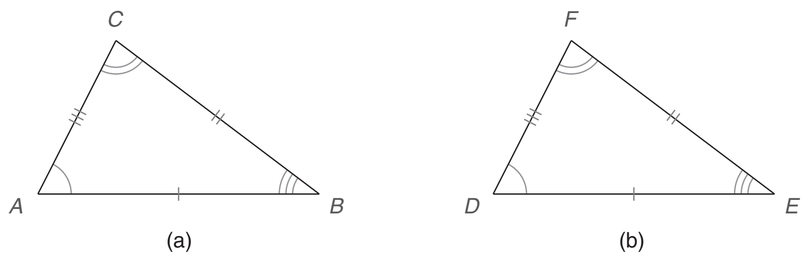


Figura 3.1

De las congruencias indicadas se puede también decir que el vértice A corresponde al vértice D, como también B a E y C a F. Simbólicamente las correspondencias se representan por

$$A \leftrightarrow D, \qquad B \leftrightarrow E \qquad \text{y} \qquad C \leftrightarrow F.$$

En la sección 2.6 se utilizó una transformación de deslizamiento en el $\triangle ABC$ para formar su imagen de $\triangle DEF$. El enunciado $\triangle MNQ \cong \triangle RST$ ordena los vértices correspondientes de los triángulos (que no se muestran), por lo que se puede concluir a partir de este enunciado que

$$M \leftrightarrow R, \qquad N \leftrightarrow S \qquad \text{y} \qquad Q \leftrightarrow T$$

Esta correspondencia de vértices implica la congruencia de partes correspondientes tales como $\angle M \cong \angle R$ y $\overline{NQ} \cong \overline{ST}$.

Por lo contrario, si la correspondencia de vértices de dos triángulos congruentes es $M \leftrightarrow R$, $N \leftrightarrow S$ y $Q \leftrightarrow T$, se ordenan los vértices haciendo las siguientes afirmaciones $\triangle MNQ \cong \triangle RST$, $\triangle NQM \cong \triangle STR$, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1

Para dos triángulos congruentes la correspondencia de vértices está dada por $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ y $C \leftrightarrow F$. Complete cada enunciado:

a) $\triangle BCA \cong ?$ b) $\triangle DEF \cong ?$

Solución Ordenando con cuidado los vértices correspondientes, se tiene que

a) $\triangle BCA \cong \triangle EFD$ b) $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ ■

DEFINICIÓN

Dos triángulos son **congruentes** si las seis partes del primer triángulo son congruentes con las seis partes correspondientes del segundo triángulo.

Descubra

Sostenga juntas dos hojas de papel, utilice tijeras para recortar dos triángulos. ¿Cómo se comparan los triángulos entre sí?

RESPUESTA

Los triángulos son congruentes.

Como siempre, ¡cualquier definición es reversible! Si se sabe que dos triángulos son congruentes, se puede concluir que las partes correspondientes son congruentes. Además, si se sabe que las seis partes son congruentes, ¡también lo son los triángulos! A partir de las partes congruentes que se indican en la figura 3.2 se puede concluir que $\triangle MNQ \cong \triangle RST$. Utilizando la terminología introducida en la sección 2.6 y en la figura 3.2, $\triangle TSR$ es la reflexión de $\triangle QNM$ a través de la recta vertical (que no se muestra) ubicada a la mitad entre los dos triángulos.

Siguiendo la figura 3.2 y algunas de las propiedades de los triángulos congruentes que serán útiles en las demostraciones y explicaciones posteriores.

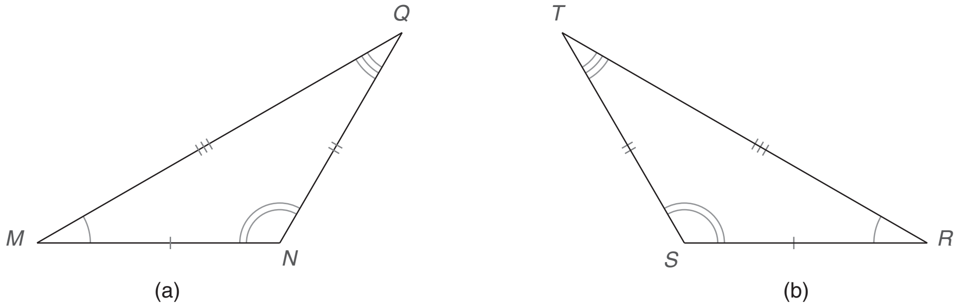


Figura 3.2

1. $\triangle ABC \cong \triangle ABC$. (Propiedad de congruencia reflexiva)
2. Si $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, entonces $\triangle DEF \cong \triangle ABC$. (Propiedad de congruencia simétrica)
3. Si $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ y $\triangle DEF \cong \triangle GHI$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle GHI$. (Propiedad de congruencia transitiva)

GEE

Ejercicios 1-2

Con base en las propiedades anteriores se observa que los "triángulos congruentes" son una relación de equivalencia.

Sería difícil establecer que los triángulos son congruentes si primero tuvieran que comprobarse seis pares de partes congruentes. Por fortuna se puede demostrar que los triángulos son congruentes estableciendo menos de seis pares de congruencias. Para sugerir un primer método considere la construcción en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2

Construya un triángulo cuyos lados tengan las longitudes de los segmentos dadas en la figura 3.3(a).

Solución Figura 3.3(b): Elija $\overline{AB}$ como el primer lado del triángulo (la elección de $\overline{AB}$ es arbitraria) y marque su longitud como se muestra.

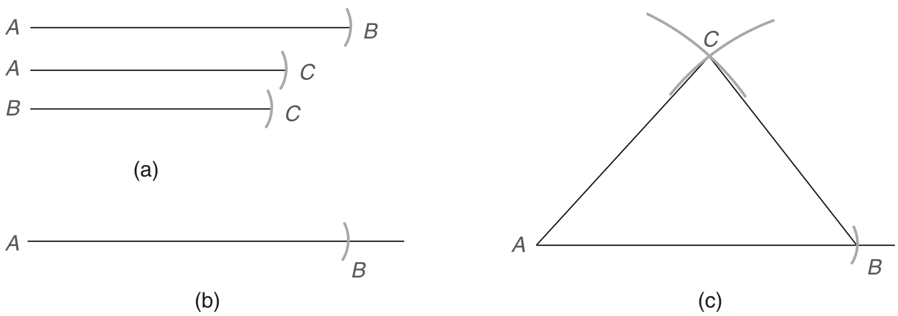
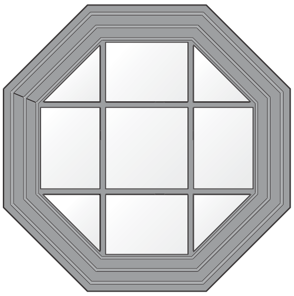


Figura 3.3

Figura 3.3(c): Utilice el punto extremo izquierdo A y trace un arco de longitud igual a la de $\overline{AC}$. Ahora trace un arco de la longitud de $\overline{BC}$ desde el punto del extremo derecho B de modo que estos arcos se intersequen en C, el tercer vértice del triángulo. Uniendo el punto C al punto A y después al B se completa el triángulo deseado. ■

Considere una vez más el ejemplo 2. Si se construyera un triángulo "diferente" eligiendo $\overline{AC}$ como el primer lado, sería congruente con el que se muestra. Podría ser necesario voltearlo o rotarlo para que los vértices correspondientes se acoplen. El objetivo del ejemplo 2 es proporcionar un método para establecer la congruencia de triángulos utilizando sólo tres pares de partes. Si se midieran los ángulos correspondientes en el triángulo dado, o en el triángulo construido, con las mismas longitudes para los lados, estos pares de ángulos ¡también serían congruentes!

Geometría en el mundo real



Los cuatro paneles triangulares en la ventana octagonal son triángulos congruentes.

LLL (MÉTODO PARA DEMOSTRAR LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS)

POSTULADO 12

Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (LLL).

La designación LLL se citará como una razón en la siguiente demostración. Las tres letras L se refieren a los tres *pares* de lados congruentes.

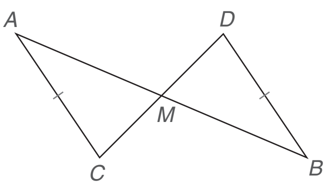


Figura 3.4

EJEMPLO 3

DADO: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan entre sí en M
$\overline{AC} \cong \overline{DB}$
(Vea la figura 3.4.)

DEMUESTRE: $\triangle AMC \cong \triangle BMD$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan entre sí en M	1. Dado
2. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ $\overline{CM} \cong \overline{MD}$	2. Si se biseca un segmento, los segmentos formados son $\cong$
3. $\overline{AC} \cong \overline{DB}$	3. Dado
4. $\triangle AMC \cong \triangle BMD$	4. LLL

NOTA 1: En los pasos 2 y 3, se mostró que los tres pares de lados eran congruentes; por tanto se cita LLL como la razón que justifica que $\triangle AMC \cong \triangle BMD$.

NOTA 2: $\triangle BMD$ es la imagen determinada por la rotación de $\triangle AMC$ alrededor del punto M a través de un ángulo de 180°. ■

Se dice que dos lados que forman un ángulo de un triángulo **incluyen ese ángulo** del triángulo. En el $\triangle TUV$ de la figura 3.5(a) los lados $\overline{TU}$ y $\overline{TV}$ forman el $\angle T$; por tanto, $\overline{TU}$ y $\overline{TV}$ incluyen a $\angle T$. A su vez, se dice que $\angle T$ es el ángulo incluido para $\overline{TU}$ y $\overline{TV}$. De manera similar, dos ángulos cualesquiera de un triángulo deben tener un lado en común, y se dice que estos dos ángulos **incluyen ese lado**. En $\triangle TUV$, $\angle U$ y $\angle T$ comparten el lado común $\overline{UT}$; por tanto, $\angle U$ y $\angle T$ incluyen el lado $\overline{UT}$ equivalentemente, $\overline{UT}$ es el lado incluido por $\angle U$ y $\angle T$.

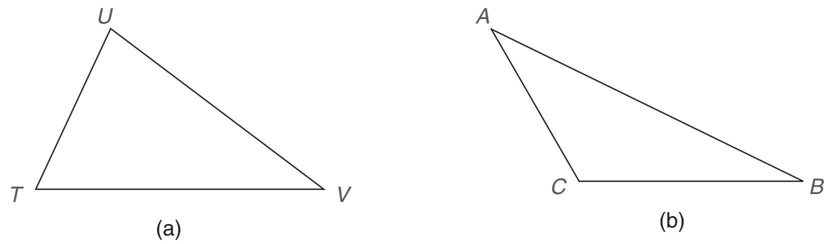


Figura 3.5

Informalmente el término *incluido* nombra la parte de un triángulo que está “entre” otras dos partes con nombre.

EJEMPLO 4

En $\triangle ABC$ de la figura 3.5(b):

a) ¿Qué ángulo está incluido por $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$?
b) ¿Qué lados incluyen el $\angle B$?
c) ¿Cuál es el lado incluido por $\angle A$ y $\angle B$?
d) ¿Qué ángulos incluye $\overline{CB}$?

Solución

a) $\angle C$ (ya que está formado por $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$)
b) $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ (ya que éstos forman el $\angle B$)
c) $\overline{AB}$ (ya que éste es el lado común para $\angle A$ y $\angle B$)
d) $\angle C$ y $\angle B$ (ya que $\overline{CB}$ es un lado de cada ángulo) ■

LAL (MÉTODO PARA DEMOSTRAR LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS)

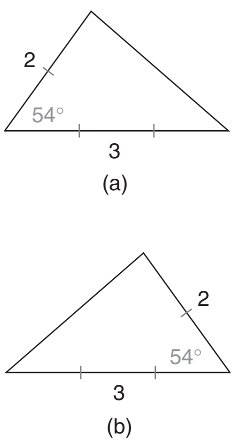


Figura 3.6

Una segunda forma de establecer que dos triángulos son congruentes implica demostrar que dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes a dos lados y el ángulo incluido de un segundo triángulo. Si dos personas trazan cada una un triángulo de tal manera que dos de los lados midan 2 cm y 3 cm y el ángulo incluido mida 54°, entonces dichos triángulos son congruentes. (Vea la figura 3.6.)

POSTULADO 13

Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con dos lados y el ángulo incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (LAL).

El orden de las letras LAL en el postulado 13 ayuda a recordar que los dos lados que se nombran tienen el ángulo “entre” ellos. Esto es, en cada triángulo ambos lados forman el ángulo.

En el ejemplo 5 que se presenta a continuación los dos triángulos cuya congruencia se va a demostrar comparten un lado en común; el enunciado $\overline{PN} \cong \overline{PN}$ se justifica por la propiedad de congruencia reflexiva que, por conveniencia, se expresa como **identidad**.

DEFINICIÓN

En este contexto **identidad** es la razón que se cita cuando se comprueba que un segmento de recta (o un ángulo) es congruente consigo mismo; también se le conoce como propiedad de congruencia reflexiva.

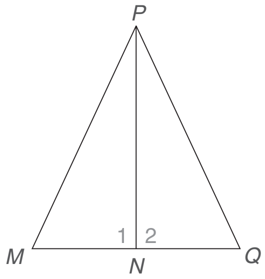


Figura 3.7

Observe en el ejemplo 5 el uso de la identidad y de LAL como las razones finales.

EJEMPLO 5

DADO: $\overline{PN} \perp \overline{MQ}$
$\overline{MN} \cong \overline{NQ}$
(Vea la figura 3.7.)

DEMUESTRE: $\triangle PNM \cong \triangle PNQ$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{PN} \perp \overline{MQ}$	1. Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. Si dos rectas son $\perp$, éstas coinciden para formar $\angle$s adyacentes $\cong$
3. $\overline{MN} \cong \overline{NQ}$	3. Dado
4. $\overline{PN} \cong \overline{PN}$	4. Identidad (o reflexión)
5. $\triangle PNM \cong \triangle PNQ$	5. LAL

NOTA: En $\triangle PNM$, $\overline{MN}$ (paso 3) y $\overline{PN}$ (paso 4) incluyendo al $\angle 1$; de manera similar $\overline{NQ}$ y $\overline{PN}$ incluyen al $\angle 2$ en $\triangle PNQ$. Por tanto, se utiliza LAL para comprobar que $\triangle PNM \cong \triangle PNQ$ en la razón 5. ■

GEE *Ejercicios 3-6*

ALA (MÉTODO PARA DEMOSTRAR LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS)

El siguiente método para demostrar la congruencia de triángulos requiere una combinación de dos ángulos y el lado incluido. Si dos personas trazan cada una un triángulo para el cual dos ángulos miden 33 y 47° y el lado incluido mide 5 cm, entonces estos triángulos son congruentes. Vea la figura que se muestra a continuación.

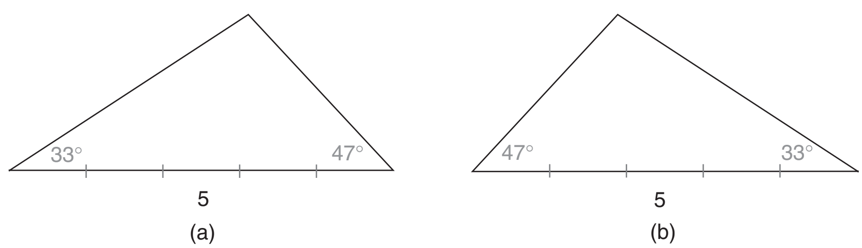


Figura 3.8

POSTULADO 14

Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (ALA).

Aunque este método se escribe de forma compacta como ALA, ¡debe tener cuidado cuando escriba estas abreviaturas! Por ejemplo, ALA se refiere a dos ángulos y el lado incluido, mientras LAL se refiere a dos lados y el ángulo incluido. Para utilizar cualquier postulado deben cumplirse las condiciones específicas descritas en el mismo.

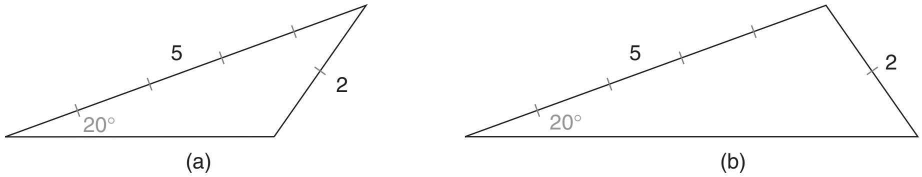


Figura 3.9

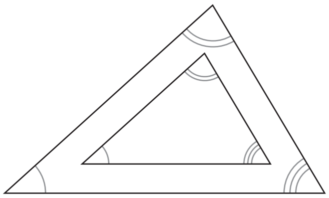


Figura 3.10

LLL, LAL y ALA son métodos válidos de demostración de la congruencia de triángulos, pero LLA *no* es un método y *no se puede* utilizar. En la figura 3.9 los dos triángulos están marcados para mostrar LLA, aun cuando estos dos triángulos *no* son congruentes.

Otra combinación que no se puede utilizar para comprobar la congruencia de triángulos es la AAA. Vea la figura 3.10. ¡Tres pares congruentes de ángulos en dos triángulos no garantizan pares congruentes de lados!

En el ejemplo 6 los triángulos cuya congruencia se va a demostrar se traslapan (vea la figura 3.11). Para aclarar las relaciones se han redibujado por separado los triángulos en la figura 3.12. Observe que las partes señaladas como congruentes, se establecen como congruentes en la demostración. Para el enunciado 3 también se puede utilizar la identidad (o reflexión) para justificar que un ángulo es congruente consigo mismo.

GEE *Ejercicios 7-11*

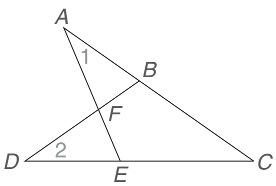


Figura 3.11

EJEMPLO 6

DADO: $\overline{AC} \cong \overline{DC}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
(Vea la figura 3.11.)

DEMUESTRE: $\triangle ACE \cong \triangle DCB$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{AC} \cong \overline{DC}$ (Vea la figura 3.12.)	1. Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. Dado
3. $\angle C \cong \angle C$	3. Identidad
4. $\triangle ACE \cong \triangle DCB$	4. ALA

■

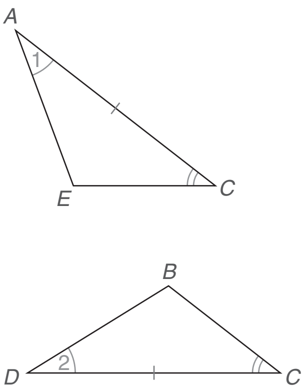


Figura 3.12

Ahora considere un teorema (que se demuestre por el postulado ALA) que es conveniente como una razón en muchas comprobaciones.

AAL (MÉTODO PARA DEMOSTRAR LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS)

TEOREMA 3.1.1

Si dos ángulos y un lado no incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y un lado no incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (AAL).

DADO: $\angle T \cong \angle K$, $\angle S \cong \angle J$ y $\overline{SR} \cong \overline{HJ}$ (Vea la figura 3.13 en la página 134.)

DEMUESTRE: $\triangle TSR \cong \triangle KJH$

Advertencia

No utilice AAA o LLA, ya que simplemente no son válidos para demostrar triángulos congruentes; con AAA los triángulos tienen la misma forma, pero no necesariamente son congruentes.

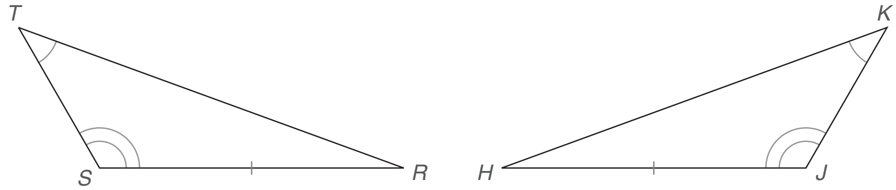


Figura 3.13

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle T \cong \angle K$ $\angle S \cong \angle J$	1. Dado
2. $\angle R \cong \angle H$	2. Si dos $\angle$s de un $\triangle$ son $\cong$ con dos $\angle$s de otro $\triangle$, entonces los $\angle$s terceros también son congruentes
3. $\overline{SR} \cong \overline{HJ}$	3. Dado
4. $\triangle TSR \cong \triangle KJH$	4. ALA

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Demostración de que dos triángulos son congruentes

GEE *Ejercicios 12-14*

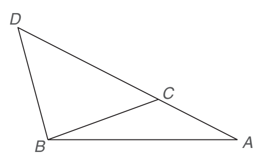
Regla general: Los métodos de demostración (posibles razones finales) disponibles en la sección 3.1 son LLL, LAL, ALA y AAL.

Ilustración: Vea los ejercicios del 9 al 12 de esta sección.

Ejercicios 3.1

En los ejercicios del 1 al 8 utilice los esquemas provistos para contestar cada pregunta.

1. Nombre un ángulo común y un lado común para $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$. Si $\overline{BC} \cong \overline{BD}$, ¿puede concluir que $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ son congruentes? ¿Puede utilizar LLA como una razón para la demostración de la congruencia de triángulos?

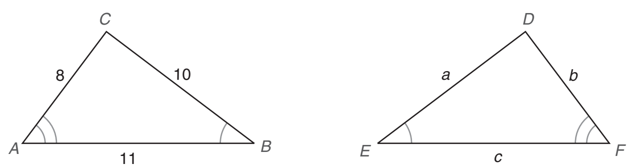


Para los ejercicios 2 y 3 vea la figura en la segunda columna.

2. Con los ángulos correspondientes que se indican, los triángulos son congruentes. Encuentre los valores para a, b y c.

3. Con los ángulos correspondientes que se indican, encuentre m$\angle A$ si m$\angle F = 72°$.

4. Con los ángulos correspondientes que se indican, encuentre m$\angle E$ si m$\angle A = 57°$ y m$\angle C = 85°$.

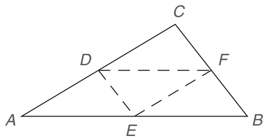


Ejercicios 2–4, 6

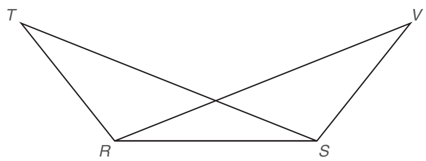
5. En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto son los **catetos**; el lado más largo (opuesto al ángulo recto) es la **hipotenusa**. Algunos libros indican que cuando dos triángulos rectángulos tienen pares de catetos congruentes, los triángulos rectángulos son congruentes por la razón LL. En nuestro estudio, LL es sólo un caso especial de uno de los postulados en esta sección. ¿De qué postulado se trata?

6. Con base en la figura para el ejercicio 2 escriba un enunciado acerca de si los triángulos son congruentes, preste atención al orden de los vértices correspondientes.

7. En el $\triangle ABC$ los puntos medios de los lados están unidos. ¿Qué le dice la intuición acerca de la relación entre $\triangle AED$ y $\triangle FDE$? (Más adelante se demostrará esta relación.)

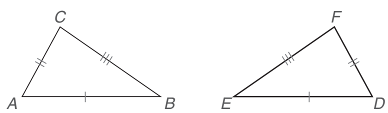


8. Suponga que desea demostrar que $\triangle RST \cong \triangle SRV$. Use la razón identidad para nombrar un par de partes correspondientes que sean congruentes.

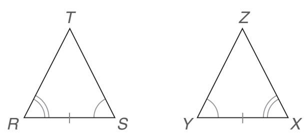


En los ejercicios 9 al 12 las partes congruentes están indicadas por guiones (lados) o arcos (ángulos). Establezca qué método (LLL, LAL, ALA o AAL) se podría utilizar para demostrar la congruencia de dos triángulos.

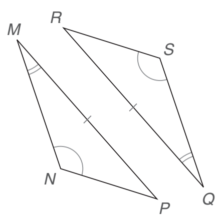
9.



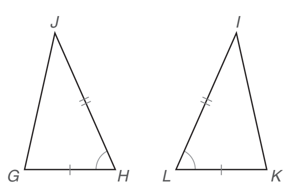
10.



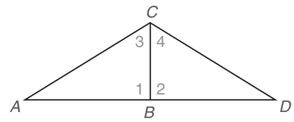
11.



12.



En los ejercicios 13 al 18 utilice sólo la información dada para establecer la razón de por qué $\triangle ABC \cong \triangle DBC$. Redibuje la figura y utilice marcas como las que se usaron en los ejercicios 9 al 12.



Ejercicios 13-18

13. $\angle A \cong \angle D, \overline{AB} \cong \overline{BD}$, y $\angle 1 \cong \angle 2$

14. $\angle A \cong \angle D, \overline{AC} \cong \overline{CD}$, y B es el punto medio de $\overline{AD}$

15. $\angle A \cong \angle D, \overline{AC} \cong \overline{CD}$, y $\overrightarrow{CB}$ biseca al $\angle ACD$

16. $\angle A \cong \angle D, \overline{AC} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{BD}$

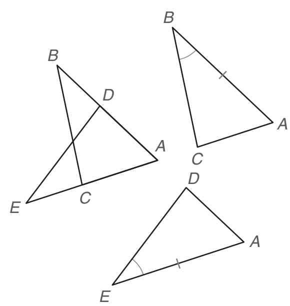
17. $\overline{AC} \cong \overline{CD}, \overline{AB} \cong \overline{BD}$ y $\overline{CB} \cong \overline{CB}$ (por identidad)

18. $\angle 1$ y $\angle 2$ son $\angle$s rectos, $\overline{AB} \cong \overline{BD}$ y $\angle A \cong \angle D$

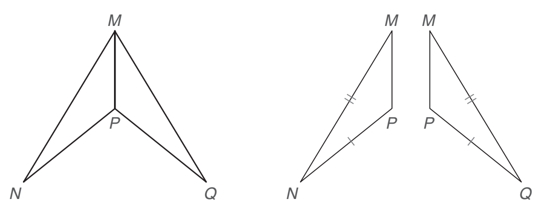
En los ejercicios 19 y 20 los triángulos que han demostrado ser congruentes se han redibujado por separado. Las partes congruentes están marcadas.

- *a)* *Nombre un par de partes adicional que sea congruente por identidad.*
- *b)* *Considerando las partes congruentes, establezca la razón por la cual los triángulos deben ser congruentes.*

19. $\triangle ABC \cong \triangle AED$

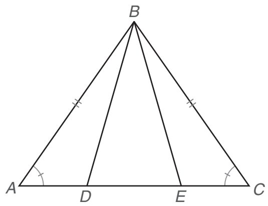


20. $\triangle MNP \cong \triangle MQP$



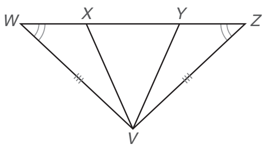
En los ejercicios 21 al 24 se puede demostrar la congruencia de los triángulos nombrados. Considerando los pares congruentes marcados, nombre los pares de partes adicionales que deben ser congruentes para que sea posible utilizar el método mencionado.

21. LAL



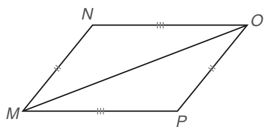
$\triangle ABD \cong \triangle CBE$

22. ALA



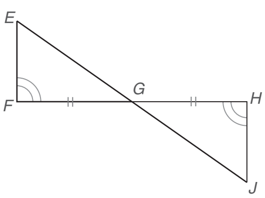
$\triangle WVY \cong \triangle ZVX$

23. LLL



$\triangle MNO \cong \triangle OPM$

24. AAL



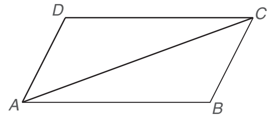
$\triangle EFG \cong \triangle JHG$

En los ejercicios 25 y 26 complete cada demostración. Use la figura que aparece en la parte superior de la segunda columna de esta página.

25. *Dado:* $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{CB}$
Demostración: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{CB}$	1. ?
2. ?	2. Identidad
3. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$	3. ?



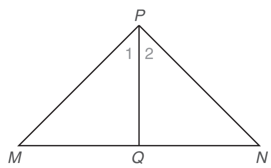
Ejercicios 25-26

26. *Dado:* $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
Demostración: $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$	1. ?
2. $\angle DCA \cong \angle BAC$	2. ?
3. ?	3. Dado
4. ?	4. Si dos rectas $\parallel$ son cortadas por una transversal. Los $\angle$s alternos internos son $\cong$
5. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	5. ?
6. ?	6. ALA

En los ejercicios 27 al 32 use LLL, LAL, ALA o AAL para demostrar que los triángulos son congruentes.

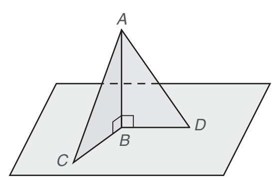


Ejercicios 27-28

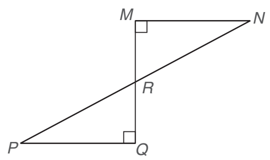
27. *Dado:* $\overrightarrow{PQ}$ biseca el $\angle MPN$
$\overline{MP} \cong \overline{NP}$
Demuestre: $\triangle MQP \cong \triangle NQP$

28. *Dado:* $\overline{PQ} \perp \overline{MN}$ y $\angle 1 \cong \angle 2$
Demuestre: $\triangle MQP \cong \triangle NQP$

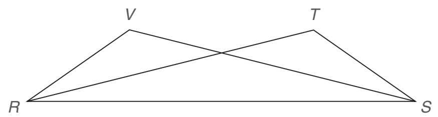
29. *Dado:* $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y $\overline{AB} \perp \overline{BD}$
$\overline{BC} \cong \overline{BD}$
Demuestre: $\triangle ABC \cong \triangle ABD$



30. *Dado:* $\overline{PN}$ biseca a $\overline{MQ}$
$\angle M$ y $\angle Q$ son ángulos rectos
Demuestre: $\triangle PQR \cong \triangle NMR$



31. *Dado:* $\angle VRS \cong \angle TSR$ y $\overline{RV} \cong \overline{TS}$
Demuestre: $\triangle RST \cong \triangle SRV$

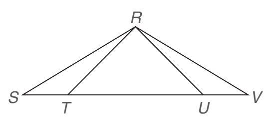


Ejercicios 31, 32

32. *Dado:* $\overline{VS} \cong \overline{TR}$ y $\angle TRS \cong \angle VSR$
Demuestre: $\triangle RST \cong \triangle SRV$

En los ejercicios 33 a 36 los métodos que deben utilizarse son LLL, LAL, ALA y AAL.

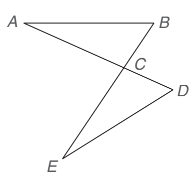
33. Dado que $\triangle RST \cong \triangle RVU$, ¿se tiene que $\triangle RSU$ también es congruente con $\triangle RVT$? Mencione el método utilizado, si lo hay, para llegar a esta conclusión.



Ejercicios 33, 34

34. Dado que $\angle S \cong \angle V$ y $\overline{ST} \cong \overline{UV}$, ¿se tiene que $\triangle RST \cong \triangle RVU$? ¿Qué método utilizó, si hay?

35. Dado que $\angle A \cong \angle E$ y $\angle B \cong \angle D$, ¿se tiene que $\triangle ABC \cong \triangle EDC$? Si es así, cite el método que empleó para llegar a esta conclusión.

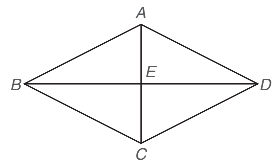


Ejercicios 35–36

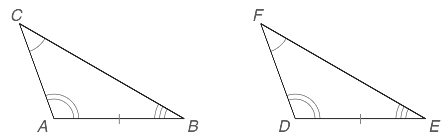
36. Dado que $\angle A \cong \angle E$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$, ¿se deduce que $\triangle ABC \cong \triangle EDC$? Cite el método utilizado para llegar a esta conclusión.

37. En el cuadrilátero $ABCD$, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son bisectores perpendiculares uno de otro. Nombre todos los triángulos que son congruentes con:

a) $\triangle ABE$ b) $\triangle ABC$ c) $\triangle ABD$

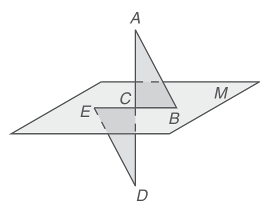


38. En $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ usted sabe que $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$ y $\overline{AB} \cong \overline{DE}$. Antes de concluir que los triángulos son congruentes por ALA, necesita demostrar que $\angle B \cong \angle E$. Establezca el postulado o teorema que le permita confirmar este enunciado ($\angle B \cong \angle E$).

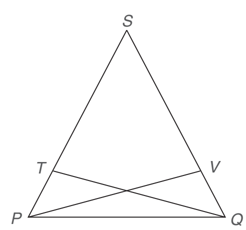


En los ejercicios 39 y 40, complete cada demostración.

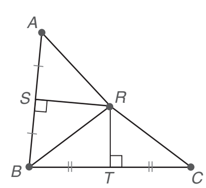
39. *Dado:* Plano M
C es el punto medio de $\overline{EB}$
$\overline{AD} \perp \overline{BE}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$
Demuestre: $\triangle ABC \cong \triangle DEC$



40. *Dado:* $\overline{SP} \cong \overline{SQ}$ y $\overline{ST} \cong \overline{SV}$
Demuestre: $\triangle SPV \cong \triangle SQT$ y $\triangle TPQ \cong \triangle VQP$



41. *Dado:* $\angle ABC$; $\overline{RS}$ es el bisector perpendicular de $\overline{AB}$; $\overline{RT}$ es el bisector perpendicular de $\overline{BC}$.
Demuestre: $\overline{AR} \cong \overline{RC}$



3.2 Partes correspondientes de triángulos congruentes

CONCEPTOS CLAVE

- PCTCC
- Hipotenusa y catetos de un triángulo rectángulo
- HC
- Teorema de Pitágoras
- Propiedad de las raíces cuadradas

Recuerde que la definición de triángulos congruentes establece que *todas* las seis partes (tres lados y tres ángulos) de un triángulo son congruentes respecto a las seis partes correspondientes del segundo triángulo. Si se ha comprobado que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ por LAL (las partes congruentes están marcadas en la figura 3.14), entonces se llega a conclusiones tales como $\angle C \cong \angle F$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. La siguiente razón (PCTCC) se utiliza con frecuencia para deducir tales conclusiones y está basada en la definición de triángulos congruentes.

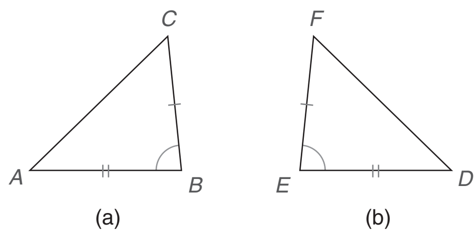


Figura 3.14

Ejercicios 1-3

> **PCTCC: Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.**

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Uso de PCTCC

Regla general: En una demostración se debe demostrar que dos triángulos son congruentes *antes* de demostrar que las PCTCC se pueden utilizar para comprobar que otro par de lados o ángulos de dichos triángulos son también congruentes.

Ilustración: En la prueba del ejemplo 1, se debe establecer el enunciado 5 (triángulos congruentes) antes de concluir que $\overline{TZ} \cong \overline{VZ}$ por PCTCC.

EJEMPLO 1

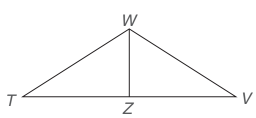


Figura 3.15

DADO: $\overrightarrow{WZ}$ biseca al $\angle TWV$
$\overline{WT} \cong \overline{WV}$
(Vea la figura 3.15.)

DEMUESTRE: $\overline{TZ} \cong \overline{VZ}$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overrightarrow{WZ}$ biseca $\angle TWV$	1. Dado
2. $\angle TWZ \cong \angle VWZ$	2. El bisector de un ángulo lo separa en dos $\angle$s $\cong$
3. $\overline{WT} \cong \overline{WV}$	3. Dado
4. $\overline{WZ} \cong \overline{WZ}$	4. Identidad
5. $\triangle TWZ \cong \triangle VWZ$	5. LAL
6. $\overline{TZ} \cong \overline{VZ}$	6. PCTCC

■

Recuerde

PCTCC significa "Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes".

En el ejemplo 1 se podría haber utilizado fácilmente PCTCC para comprobar que dos ángulos son congruentes. Si se hubiera pedido demostrar que $\angle T \cong \angle V$, entonces el enunciado final tendría que leerse

6. $\angle T \cong \angle V$	6. PCTCC

Se puede tomar la demostración del ejemplo 1 un paso más adelante para demostrar la congruencia de los triángulos y después utilizar PCTCC para tener otra conclusión, tal como en las rectas paralelas o perpendiculares. En el ejemplo 1 suponga que se le ha pedido comprobar que $\overline{WZ}$ biseca $\overline{TV}$. Entonces los pasos 1-6 se mantendrían tal como están y un séptimo paso se leería

7. $\overline{WZ}$ biseca $\overline{TV}$	7. Si un segmento de recta se divide en dos partes $\cong$, entonces se ha bisecado

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Pruebas que implican triángulos congruentes

En este estudio de triángulos se establecerán tres tipos de conclusiones:

1. *Demostración de congruencia de triángulos*, tales como $\triangle TWZ \cong \triangle VWZ$
2. *Demostración de partes correspondientes de triángulos congruentes* como $\overline{TZ} \cong \overline{VZ}$ (Observe que se tiene que demostrar que los dos Δs son $\cong$ antes de que se pueda utilizar PCTCC.)
3. *Establecer una relación más* como $\overline{WZ}$ biseca a $\overline{TV}$ (Observe que se debe establecer que los dos $\triangle$s son $\cong$ y aplicar también PCTCC antes de que se pueda llegar a esta conclusión.)

Se habla poco en este libro acerca de un "plan para la demostración", pero cada estudiante o profesor de geometría debe tener un plan antes de poder terminar una demostración. Aunque generalmente no se escribe el "plan", la técnica se muestra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2

DADO: $\overline{ZW} \cong \overline{YX}$
$\overline{ZY} \cong \overline{WX}$
(Vea la figura 3.16.)

DEMUESTRE: $\overline{ZY} \parallel \overline{WX}$

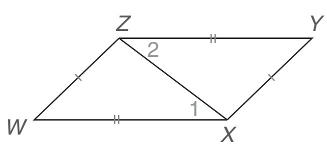


Figura 3.16

PLAN PARA LA DEMOSTRACIÓN: Al demostrar que $\triangle ZWX \cong \triangle XYZ$, se puede demostrar que $\angle 1 \cong \angle 2$ por PCTCC. Entonces los $\angle$s 1 y 2 son ángulos alternos internos congruentes para $\overline{ZY}$ y $\overline{WX}$, que deben ser paralelos.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{ZW} \cong \overline{YX}$; $\overline{ZY} \cong \overline{WX}$	1. Dado
2. $\overline{ZX} \cong \overline{ZX}$	2. Identidad
3. $\triangle ZWX \cong \triangle XYZ$	3. LLL
4. $\angle 1 \cong \angle 2$	4. PCTCC
5. $\overline{ZY} \parallel \overline{WX}$	5. Si dos rectas se cortan por una transversal de tal manera que los $\angle$s alternos internos sean $\cong$, dichas rectas son $\parallel$

GEE

Ejercicios 4-6

SUGERENCIAS PARA LA DEMOSTRACIÓN DE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Debido a que varias demostraciones dependen del establecimiento de la congruencia de triángulos, se ofrecen las siguientes sugerencias.

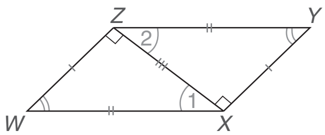


Figura 3.17

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Trazos utilizados para demostrar triángulos congruentes

Sugerencias para una demostración que implica triángulos congruentes:

1. Marque las figuras de forma sistemática, utilizando:
   a) Un *cuadrado* en la abertura de cada ángulo recto
   b) El mismo número de *guiones* en los lados congruentes
   c) El mismo número de *arcos* en los ángulos congruentes
2. Trace los triángulos cuya congruencia va a demostrarse en colores distintos.
3. Si se traslapan los triángulos, dibújelos por separado.

NOTA: En la figura 3.17 se presentan marcas similares.

GEE

Ejercicios 7-9

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

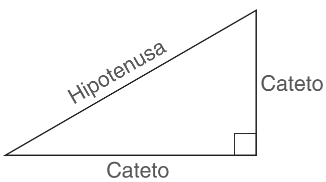


Figura 3.18

En un triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto es la **hipotenusa**, y los lados del ángulo recto son los **catetos** del triángulo. En la figura 3.18 se ilustran estas tres partes de un triángulo rectángulo.

Otro método para demostrar la congruencia de triángulos es el método HC, el cual se aplica exclusivamente a triángulos rectángulos. En HC, H se refiere a la hipotenusa y C se refiere al cateto. La demostración de este método se pospondrá hasta la sección 5.4.

HC (MÉTODO PARA COMPROBAR LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS)

TEOREMA 3.2.1

Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un cateto de un segundo triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes (HC).

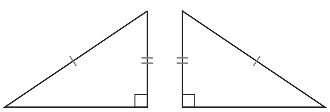


Figura 3.19

En la figura 3.19 se ilustra la relación descrita en el teorema 3.2.1. En el ejemplo 3 la construcción basada en HC conduce a un triángulo rectángulo único.

EJEMPLO 3

DADO: $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ en la figura 3.20(a); observe que $AB > CA$. (Vea la página 141.)

CONSTRUYA: El triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud igual a AB y un cateto de longitud igual a CA.

Solución Figura 3.20(b): construya $\overleftrightarrow{CQ}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{EF}$ en el punto C.

Figura 3.20(c): ahora marque la longitud de $\overline{CA}$ sobre $\overleftrightarrow{CQ}$.

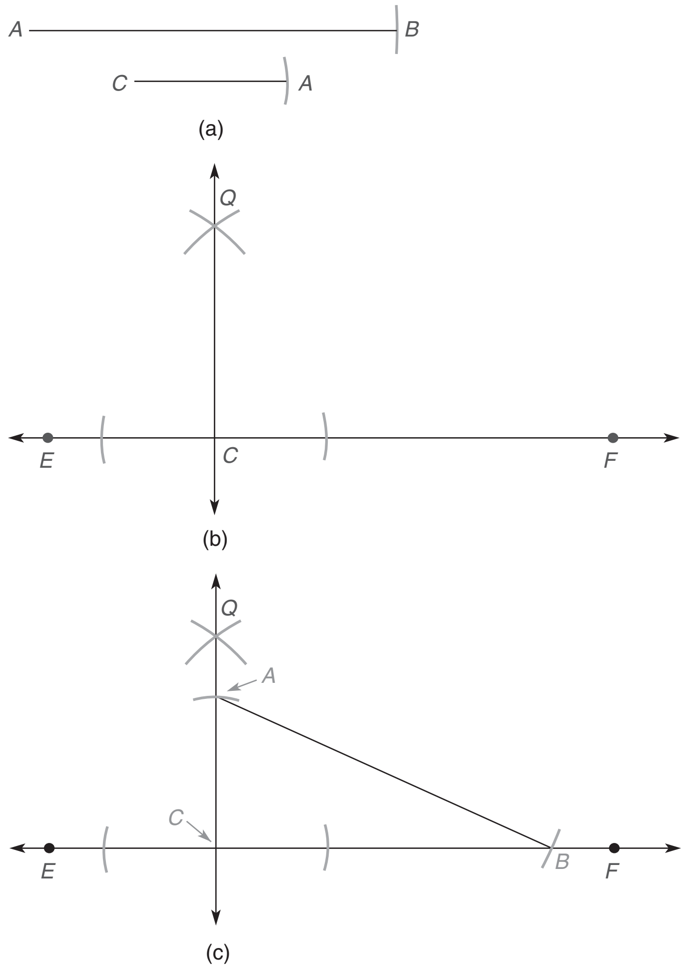
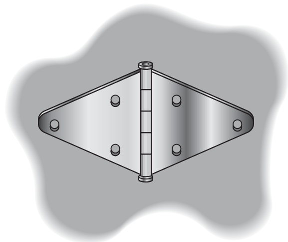


Figura 3.20

Por último con el punto A como centro marque una longitud igual a $\overline{AB}$ como se muestra. $\triangle ABC$ es el $\triangle$ rectángulo que se desea. ■

Geometría en el mundo real



En el proceso de fabricación las partes de diferentes máquinas deben ser congruentes. Los dos lados de la bisagra que se muestra son congruentes.

EJEMPLO 4

Cite la razón de por qué los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ECD$ en la figura 3.21 son congruentes si:

a) $\overline{AB} \cong \overline{EC}$ y $\overline{AC} \cong \overline{ED}$
b) $\angle A \cong \angle E$ y C es el punto medio de $\overline{BD}$
c) $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ y $\angle 1 \cong \angle 2$
d) $\overline{AB} \cong \overline{EC}$ y $\overline{EC}$ biseca $\overline{BD}$

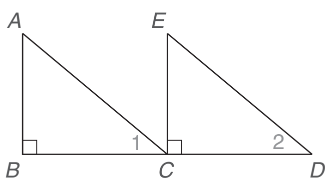


Figura 3.21

GEE

Ejercicios 10-11

Solución

a) HC b) AAL c) ALA d) LAL ■

El siguiente teorema se puede aplicar sólo cuando un triángulo es un triángulo rectángulo (tiene un ángulo recto). La demostración del teorema se pospondrá hasta la sección 5.4.

TEOREMA DE PITÁGORAS

El cuadrado de la longitud (c) de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes (a y b) de los catetos del triángulo rectángulo, esto es $c^2 = a^2 + b^2$.

Exploración tecnológica

Se necesita software de cómputo y una calculadora.

1. Forme un △ rectángulo ABC con $m\angle C = 90°$.
2. Mida AB, AC y BC.
3. Demuestre que $(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$.

(Es probable que la respuesta no sea "perfecta".)

En las aplicaciones del teorema de Pitágoras se llega con frecuencia a enunciados tales como $c^2 = 25$. Utilizando la siguiente propiedad se ve que $\sqrt{25}$ o $c = 5$.

PROPIEDAD DE LAS RAÍCES CUADRADAS

Sea que x represente la longitud de un segmento de recta y sea que p represente un número positivo. Si $x^2 = p$, entonces $x = \sqrt{p}$.

La *raíz cuadrada* de p, simbolizada $\sqrt{p}$, representa aquel número que multiplicado por sí mismo es igual a p. Como se indicó antes, $\sqrt{25} = 5$ ya que $5 \times 5 = 25$. Para encontrar el valor aproximado de una raíz cuadrada que no es exacta se puede utilizar una calculadora; donde el símbolo $\approx$ significa "es aproximadamente igual a", $\sqrt{22} \approx 4.69$ debido a que $4.69 \times 4.69 = 21.9961 \approx 22$.

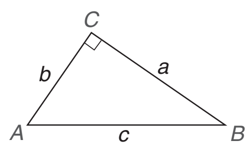
EJEMPLO 5

Encuentre la longitud del tercer lado del triángulo rectángulo (vea la figura que se muestra a continuación).

a) Encuentre c si $a = 6$ y $b = 8$.
b) Encuentre b si $a = 7$ y $c = 10$.

Solución

a) $c^2 = a^2 + b^2$, así $c^2 = 6^2 + 8^2$
o $c^2 = 36 + 64 = 100$.
Entonces $c = \sqrt{100} = 10$.
b) $c^2 = a^2 + b^2$, así $10^2 = 7^2 + b^2$
o $100 = 49 + b^2$. La sustracción da
$b^2 = 51$, así $b = \sqrt{51} \approx 7.14$.

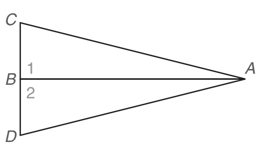


GEE
Ejercicios 12-14

Ejercicios 3.2

En los ejercicios 1 al 8 planee y escriba la demostración de dos columnas para cada problema.

1. *Dado:* $\angle 1$ y $\angle 2$ son $\angle$s rectos
$\overline{CA} \cong \overline{DA}$
Demuestre: $\triangle ABC \cong \triangle ABD$

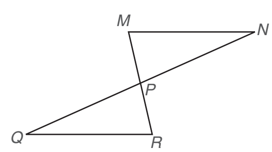


Ejercicios 1-2

2. *Dado:* $\angle 1$ y $\angle 2$ son $\angle$s rectos
$\overrightarrow{AB}$ biseca al $\angle CAD$
Demuestre: $\triangle ABC \cong \triangle ABD$

3. *Dado:* P es el punto medio de $\overline{MR}$ y $\overline{NQ}$
Demuestre: $\triangle MNP \cong \triangle RQP$

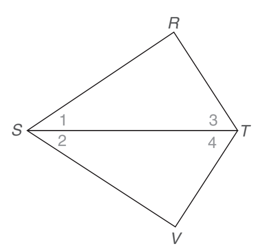
4. *Dado:* $\overline{MN} \parallel \overline{QR}$ y $\overline{MN} \cong \overline{QR}$
Demuestre: $\triangle MNP \cong \triangle RQP$



Ejercicios 3 y 4

5. *Dado:* $\angle R$ y $\angle V$ son $\angle$s rectos
$\angle 1 \cong \angle 2$
Demuestre: $\triangle RST \cong \triangle VST$

6. *Dado:* $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$
Demuestre: $\triangle RST \cong \triangle VST$



Ejercicios 5-8

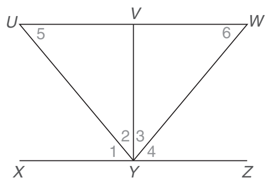
Está disponible en DVD un video de ejercicios. Este material se vende por separado.

Para los ejercicios 7 y 8 utilice la figura de la página 142.

7. *Dado:* $\overline{SR} \cong \overline{SV}$ y $\overline{RT} \cong \overline{VT}$
Demuestre: $\triangle RST \cong \triangle VST$

8. *Dado:* $\angle R$ y $\angle V$ son $\angle$s rectos
$\overline{RT} \cong \overline{VT}$
Demuestre: $\triangle RST \cong \triangle VST$

9. *Dado:* $\overline{UW} \parallel \overline{XZ}$, $\overline{VY} \perp \overline{UW}$ y $\overline{VY} \perp \overline{XZ}$
$m\angle 1 = m\angle 4 = 42°$
Encuentre: $m\angle 2$, $m\angle 3$, $m\angle 5$ y $m\angle 6$



Ejercicios 9-10

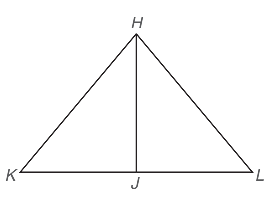
10. *Dado:* $\overline{UW} \parallel \overline{XZ}$, $\overline{VY} \perp \overline{UW}$ y $\overline{VY} \perp \overline{XZ}$
$m\angle 1 = m\angle 4 = 4x + 3$
$m\angle 2 = 6x - 3$
Encuentre: $m\angle 1$, $m\angle 2$, $m\angle 3$, $m\angle 4$, $m\angle 5$ y $m\angle 6$

En los ejercicios 11 y 12 complete cada prueba.

11. *Dado:* $\overline{HJ} \perp \overline{KL}$ y $\overline{HK} \cong \overline{HL}$
Demuestre: $\overline{KJ} \cong \overline{JL}$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{HJ} \perp \overline{KL}$ y $\overline{HK} \cong \overline{HL}$	1. ?
2. $\angle$s HJK y HJL son $\angle$s rectos	2. ?
3. $\overline{HJ} \cong \overline{HJ}$	3. ?
4. ?	4. HC
5. ?	5. PCTCC



Ejercicios 11, 12

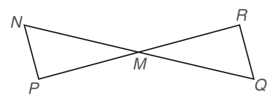
12. *Dado:* $\overrightarrow{HJ}$ biseca al $\angle KHL$
$\overline{HJ} \perp \overline{KL}$
Demuestre: $\angle K \cong \angle L$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. $\angle JHK \cong \angle JHL$	2. ?
3. $\overline{HJ} \perp \overline{KL}$	3. ?
4. $\angle HJK \cong \angle HJL$	4. ?
5. ?	5. Identidad
6. ?	6. ALA
7. $\angle K \cong \angle L$	7. ?

En los ejercicios 13 al 16 primero demuestre que los triángulos son congruentes y después utilice PCTCC.

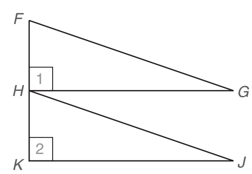
13. *Dado:* $\angle P$ y $\angle R$ son $\angle$s rectos
M es el punto medio de $\overline{PR}$
Demuestre: $\angle N \cong \angle Q$



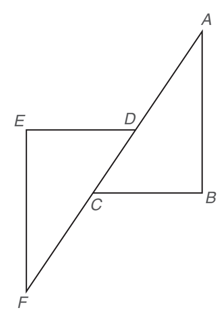
Ejercicios 13, 14

14. *Dado:* M es el punto medio de $\overline{NQ}$
$\overline{NP} \parallel \overline{RQ}$ con transversales $\overline{PR}$ y $\overline{NQ}$
Demuestre: $\overline{NP} \cong \overline{QR}$

15. *Dado:* $\angle 1$ y $\angle 2$ son $\angle$s rectos
H es el punto medio de $\overline{FK}$
$\overline{FG} \parallel \overline{HJ}$
Demuestre: $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$



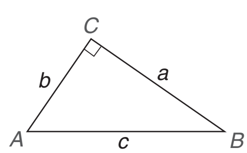
16. *Dado:* $\overline{DE} \perp \overline{EF}$ y $\overline{CB} \perp \overline{AB}$
$\overline{AB} \parallel \overline{FE}$
$\overline{AC} \cong \overline{FD}$
Demuestre: $\overline{EF} \cong \overline{BA}$



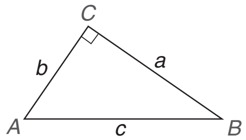
En los ejercicios 17 al 22 $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo. Use la información dada para encontrar la longitud del tercer lado del triángulo.

17. $a = 4$ y $b = 3$

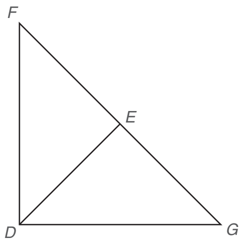
18. $a = 12$ y $b = 5$



19. $a = 15$ y $c = 17$
20. $b = 6$ y $c = 10$
21. $a = 5$ y $b = 4$
22. $a = 7$ y $c = 8$



En los ejercicios 23 al 25 demuestre la relación indicada.



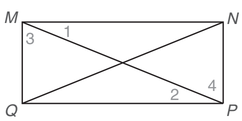
Ejercicios 23-25

23. *Dado:* $\overline{DF} \cong \overline{DG}$ y $\overline{FE} \cong \overline{EG}$
Demuestre: $\overrightarrow{DE}$ biseca al $\angle FDG$

24. *Dado:* $\overrightarrow{DE}$ biseca al $\angle FDG$
$\angle F \cong \angle G$
Demuestre: E es el punto medio de $\overline{FG}$

25. *Dado:* E es el punto medio de $\overline{FG}$
$\overline{DF} \cong \overline{DG}$
Demuestre: $\overline{DE} \perp \overline{FG}$

En los ejercicios 26 al 28 dibuje por separado los triángulos que se va a demostrar que son congruentes.



Ejercicios 26-28

26. *Dado:* $\angle MQP$ y $\angle NPQ$ son $\angle$s rectos
$\overline{MQ} \cong \overline{NP}$
Demuestre: $\overline{MP} \cong \overline{NQ}$

(SUGERENCIA: Demuestre $\triangle MQP \cong \triangle NPQ$.)

27. *Dado:* $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\overline{MN} \cong \overline{QP}$
Demuestre: $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$

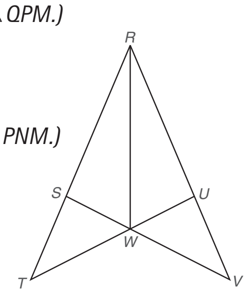
(SUGERENCIA: Demuestre $\triangle NMP \cong \triangle QPM$.)

28. *Dado:* $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$ y $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$
Demuestre: $\overline{MQ} \cong \overline{NP}$

(SUGERENCIA: Demuestre $\triangle MQP \cong \triangle PNM$.)

29. *Dado:* $\overrightarrow{RW}$ biseca al $\angle SRU$
$\overline{RS} \cong \overline{RU}$
Demuestre: $\triangle TRU \cong \triangle VRS$

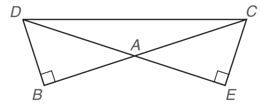
(SUGERENCIA: Primero demuestre que $\triangle RSW \cong \triangle RUW$.)



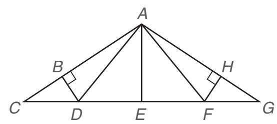
Ejercicio 29

30. *Dado:* $\overline{DB} \perp \overline{BC}$ y $\overline{CE} \perp \overline{DE}$
$\overline{AB} \cong \overline{AE}$
Demuestre: $\triangle BDC \cong \triangle ECD$

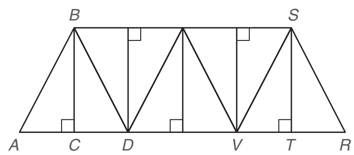
(SUGERENCIA: Primero demuestre que $\triangle ACE \cong \triangle ADB$.)



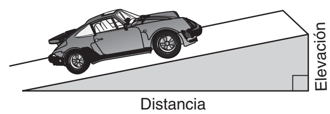
31. En la viga de techo que se muestra, $AB = 8$ y $m\angle HAF = 37°$. Encuentre:
a) AH b) $m\angle BAD$ c) $m\angle ADB$



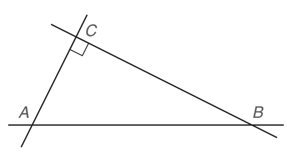
32. En el sistema de soporte del puente que se muestra, $AC =$ 6 pies y $m\angle ABC = 28°$. Encuentre:
a) $m\angle RST$ b) $m\angle ABD$ c) BS



33. Un automóvil circula a lo largo de la carretera por un paso de montaña, recorre una distancia horizontal de 750 pies y una pendiente vertical de 45 pies. Redondeado a pies, ¿qué tanto recorre el automóvil a lo largo de la carretera?



34. Debido a las obras de construcción en el camino de A a B, Alinna maneja 5 millas de A a C y después 12 millas de C a B. ¿Cuánto más debe viajar Alinna al utilizar la ruta alternativa de A a B?

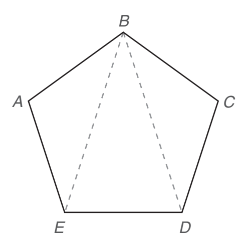


35. *Dado:* El pentágono regular $ABCDE$ con diagonales $\overline{BE}$ y $\overline{BD}$
Demuestre: $\overline{BE} \cong \overline{BD}$

(SUGERENCIA: Primero demuestre que $\triangle ABE \cong \triangle CBD$.)

36. En la figura del pentágono regular $ABCDE$, ¿$\overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{BD}$ trisecan al $\angle ABC$?

(SUGERENCIA: $m\angle ABE = m\angle AEB$).



Ejercicios 35, 36

3.3 Triángulos isósceles

CONCEPTOS CLAVE

- Triángulos isósceles
- Vértice, catetos y base de un triángulo isósceles
- Ángulos de la base
- Ángulo del vértice
- Bisector del ángulo
- Mediana
- Altura
- Bisector perpendicular
- Recta auxiliar
- Determinado, sobredeterminado, subdeterminado
- Triángulos equiláteros y equiángulos
- Perímetro

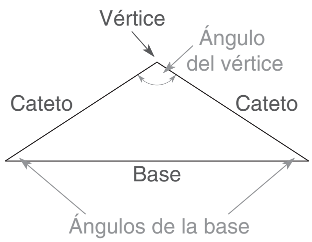
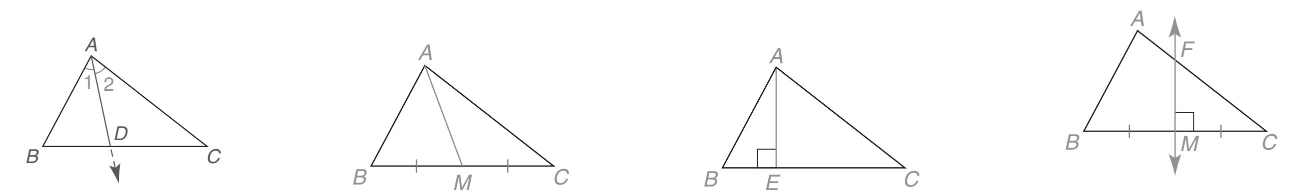


Figura 3.22

En un triángulo isósceles los dos lados de igual longitud son **catetos** y el tercer lado es la **base**. Vea la figura 3.22. El punto en que los dos catetos coinciden es el **vértice** del triángulo, y el ángulo formado por los catetos (y opuesto a la base) es el **ángulo del vértice**. Los dos ángulos restantes son los **ángulos de la base**. Si $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ en la figura 3.23, entonces el $\triangle ABC$ es isósceles con catetos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, base $\overline{AB}$, vértice C, ángulo del vértice C y ángulos de la base en A y B. Con $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, observe que la base $\overline{AB}$ del triángulo isósceles no es necesariamente el lado "inferior".



$\angle 1 \cong \angle 2$, por lo que $\overrightarrow{AD}$ es el bisector de ángulo de $\angle BAC$ en $\triangle ABC$

(a)

M es el punto medio de $\overline{BC}$, por lo que $\overline{AM}$ es la mediana de A a $\overline{BC}$

(b)

$\overline{AE} \perp \overline{BC}$, por lo que $\overline{AE}$ es la altura del $\triangle ABC$ desde el vértice A hasta $\overline{BC}$

(c)

M es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{FM} \perp \overline{BC}$, por lo que $\overleftrightarrow{FM}$ es el bisector perpendicular del lado $\overline{BC}$ en $\triangle ABC$

(d)

Figura 3.23

Considere una vez más el $\triangle ABC$ de la figura 3.23. Cada ángulo del triángulo tiene un **bisector de ángulo** único y puede estar señalado por un rayo o un segmento desde el vértice del ángulo bisecado. Así como un bisector de ángulo comienza en el vértice de un ángulo, la **mediana** también une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Por lo general, la mediana que va desde un vértice de un triángulo no es igual al bisector de ángulo desde ese vértice. Una **altura** es un segmento de recta que se traza desde un vértice al lado opuesto, de tal manera que sea perpendicular al lado opuesto. Por último, el **bisector perpendicular** de un lado de un triángulo se muestra como una recta en la figura 3.23(d). Un segmento o rayo podría también bisecar perpendicularmente un lado del triángulo. En la figura 3.24, $\overline{AD}$ es el bisector de ángulo del $\angle BAC$, $\overline{AE}$ es la altura de A a $\overline{BC}$, M es el punto medio de $\overline{BC}$, $\overline{AM}$ es la mediana de A a $\overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{FM}$ es el bisector perpendicular de $\overline{BC}$.

Una altura puede realmente encontrarse en el exterior de un triángulo. En la figura 3.25 (de la página 146), que muestra al triángulo obtuso $\triangle RST$, la altura desde R se debe trazar hasta una extensión del lado $\overline{ST}$. Después utilizaremos la longitud h de la altura $\overline{RH}$ y la longitud b del lado $\overline{ST}$ en la siguiente fórmula para el área de un triángulo:

$$A = \frac{1}{2}bh$$

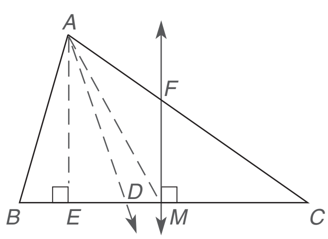


Figura 3.24

Cualquier bisector de ángulo y cualquier mediana se encuentran necesariamente en el interior del triángulo.

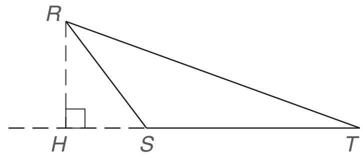


Figura 3.25

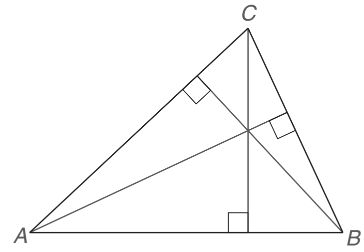


Figura 3.26

Cada triángulo tiene tres alturas, una desde cada vértice. Como se muestra para el $\triangle ABC$ en la figura 3.26, las tres alturas parecen coincidir en un punto común.

Ahora considere la demostración de un enunciado que implica las alturas correspondientes de triángulos congruentes; las alturas correspondientes son las trazadas a los lados correspondientes de los triángulos.

TEOREMA 3.3.1

Las alturas correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

DADO: $\triangle ABC \cong \triangle RST$
Alturas $\overline{CD}$ a $\overline{AB}$ y $\overline{TV}$ a $\overline{RS}$
(Vea la figura 3.27.)

DEMUESTRE: $\overline{CD} \cong \overline{TV}$

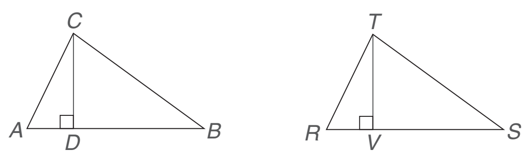


Figura 3.27

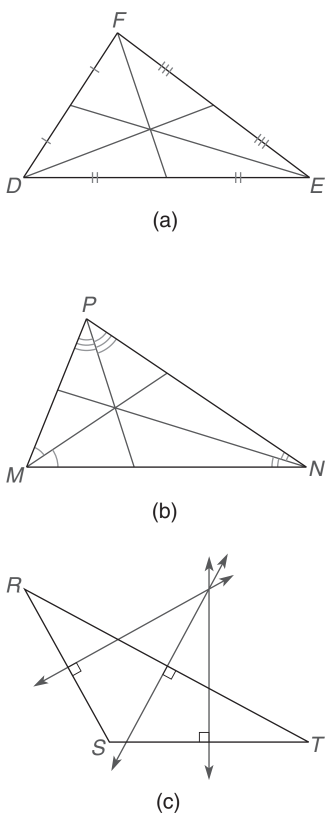


Figura 3.28

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\triangle ABC \cong \triangle RST$ Alturas $\overline{CD}$ a $\overline{AB}$ y $\overline{TV}$ a $\overline{RS}$	1. Dado
2. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{TV} \perp \overline{RS}$	2. Una altura de un $\triangle$ es el segmento de recta desde un vértice trazado $\perp$ al lado opuesto
3. $\angle CDA$ y $\angle TVR$ son $\angle$s rectos	3. Si dos rectas son $\perp$ forman $\angle$s rectos
4. $\angle CDA \cong \angle TVR$	4. Todos los ángulos rectos son $\cong$
5. $\overline{AC} \cong \overline{RT}$ y $\angle A \cong \angle R$	5. PCTCC (dado que $\triangle ABC \cong \triangle RST$)
6. $\triangle CDA \cong \triangle TVR$	6. AAL
7. $\overline{CD} \cong \overline{TV}$	7. PCTCC

Cada triángulo tiene tres medianas, una desde cada vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Así como están trazadas las medianas para el $\triangle DEF$ en la figura 3.28(a) parece que las tres se intersecan en un punto.

Cada triángulo tiene tres bisectores de ángulo, uno por cada uno de los tres ángulos. Así como se muestran para el $\triangle MNP$ en la figura 3.28(b), parece que los tres bisectores de ángulo tienen un punto en común. Vea la figura 3.28 de la página 146.

Cada triángulo tiene tres bisectores perpendiculares para sus lados; éstos se muestran para el $\triangle RST$ en la figura 3.28(c). Así como las alturas, las medianas y los bisectores de ángulo, los bisectores perpendiculares de los lados también coinciden en un solo punto.

Los bisectores de ángulo y las medianas de un triángulo *siempre* coinciden en el interior del triángulo. Sin embargo, las alturas y los bisectores perpendiculares de los lados pueden coincidir en el exterior del triángulo; vea la figura 3.28(c). Estos puntos de intersección se presentarán con más detalle en el capítulo 7.

GEE
Ejercicios 1-6

Descubra

Use una hoja de papel para cortar un triángulo isósceles. Ahora utilice un compás para bisecar el ángulo del vértice. Doble a lo largo del bisector de ángulo para formar dos triángulos más pequeños, ¿cómo se relacionan entre sí los triángulos más pequeños?

RESPUESTA

Son congruentes

La actividad Descubra de la izquierda abre las puertas para nuevos descubrimientos.

En la figura 3.29, el bisector del ángulo del vértice del $\triangle ABC$ isósceles es una recta (segmento) de simetría para el $\triangle ABC$.

EJEMPLO 1

Dé una demostración formal del teorema 3.3.2.

TEOREMA 3.3.2

El bisector del ángulo del vértice de un triángulo isósceles separa el triángulo en dos triángulos congruentes.

DADO: $\triangle ABC$ isósceles, con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$\overrightarrow{BD}$ biseca al $\angle ABC$
(Vea la figura 3.29.)

DEMUESTRE: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\triangle ABC$ isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	1. Dado
2. $\overrightarrow{BD}$ biseca al $\angle ABC$	2. Dado
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. El bisector de un $\angle$ lo separa en dos $\angle$s $\cong$
4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4. Identidad
5. $\triangle ABD \cong \triangle CBD$	5. LAL

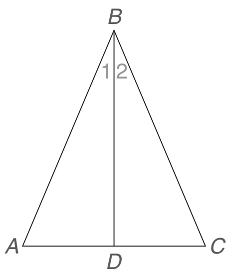


Figura 3.29

Recuerde de la sección 2.4 que se debe determinar una figura auxiliar. Considere la figura 3.30 y las siguientes tres descripciones, que se codifican: **D** para determinada, **U** para indeterminada y **S** para sobredeterminada.

D: Trace un segmento de recta perpendicular desde A hasta $\overline{BC}$, de modo que el punto terminal esté sobre $\overline{BC}$. [*Determinado* porque la recta perpendicular de A a $\overline{BC}$ es única; vea la figura 3.30(a).]

U: Trace un segmento de recta desde A hasta $\overline{BC}$ de modo que el punto terminal esté sobre $\overline{BC}$. [*Indeterminado* porque muchos segmentos de recta son posibles; vea la figura 3.30(b).]

S: Trace un segmento de recta perpendicular desde A hasta $\overline{BC}$ de modo que éste biseque $\overline{BC}$. [*Sobredeterminado* porque el segmento de recta perpendicular trazado desde A hasta $\overline{BC}$ no contendrá el punto medio M de $\overline{BC}$; vea la figura 3.30(c).]

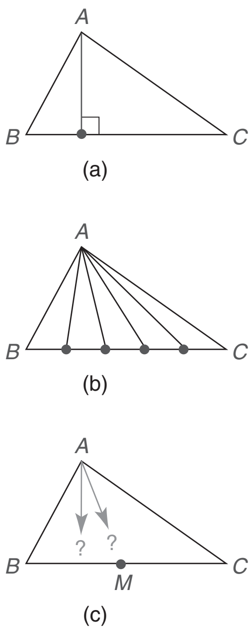


Figura 3.30

En el ejemplo 2 se necesita un segmento auxiliar. Conforme estudie la demostración, observe la unicidad del segmento y su justificación (razón 2) en la demostración.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Uso de una recta auxiliar

Regla general: Un *enunciado* anterior de la demostración establece la "recta auxiliar" como *la* altura o *el* bisector del ángulo o cualquier otra cosa.

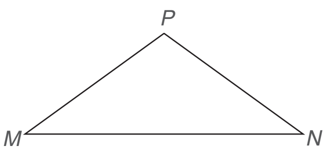
Ilustración: Vea la segunda recta en la prueba del ejemplo 2. El ángulo bisector elegido conduce a triángulos congruentes, lo que nos permite terminar la demostración.

EJEMPLO 2

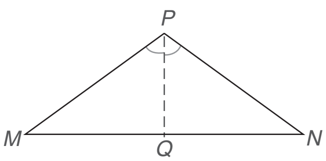
Proporcione una demostración formal del teorema 3.3.3.

TEOREMA 3.3.3

Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a dichos lados también son congruentes.



(a)



(b)

Figura 3.31

DADO: $\triangle MNP$ isósceles
con $\overline{MP} \cong \overline{NP}$
[Vea la figura 3.31(a).]

DEMUESTRE: $\angle M \cong \angle N$

NOTA: La figura 3.3l(b) muestra el segmento auxiliar.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\triangle MNP$ isósceles con $\overline{MP} \cong \overline{NP}$	1. Dado
2. Trace el bisector del $\angle \overrightarrow{PQ}$ desde P hasta $\overline{MN}$	2. Todo ángulo tiene uno y sólo un bisector
3. $\triangle MPQ \cong \triangle NPQ$	3. El bisector del ángulo de vértice de un $\triangle$ isósceles lo separa en dos $\triangle$s $\cong$
4. $\angle M \cong \angle N$	4. PCTCC

■

El teorema 3.3.3 se enuncia algunas veces como "Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes". Este teorema se aplica en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3

Encuentre el tamaño de cada ángulo del triángulo isósceles que se muestra en la figura 3.32 de la página 149, si:

a) $m\angle 1 = 36°$
b) La medida de cada ángulo de la base es 5° menor que el doble de la medida del ángulo del vértice.

Descubra

(Utilice papel y tijeras y recorte un triángulo isósceles MNP con $\overline{MP} \cong \overline{PN}$. Dóblelo de tal manera que el $\angle M$ coincida con el $\angle N$. ¿Qué puede concluir?

RESPUESTA

$\angle M \cong \angle N$

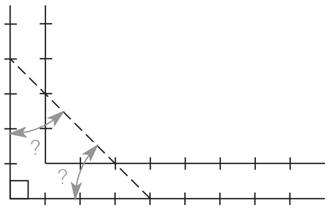


Figura 3.33

Advertencia

El recíproco de un enunciado "Si, entonces" no siempre es verdadero.

Solución

a) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$. Ya que $m\angle 1 = 36°$ y $\angle 2$ y $\angle 3$ son $\cong$ se tiene

$$\begin{aligned} 36 + 2(m\angle 2) &= 180 \\ 2(m\angle 2) &= 144 \\ m\angle 2 &= 72 \end{aligned}$$

Ahora $m\angle 1 = 36°$, y $m\angle 2 = m\angle 3 = 72°$.

b) Sea x la medida del ángulo del vértice. Entonces el tamaño de cada ángulo de la base es $2x - 5$. Ya que la suma de las medidas es de 180°,

$$\begin{aligned} x + (2x - 5) + (2x - 5) &= 180 \\ 5x - 10 &= 180 \\ 5x &= 190 \\ x &= 38 \\ 2x - 5 = 2(38) - 5 = 76 - 5 &= 71 \end{aligned}$$

Por tanto, $m\angle 1 = 38°$ y $m\angle 2 = m\angle 3 = 71°$. ■

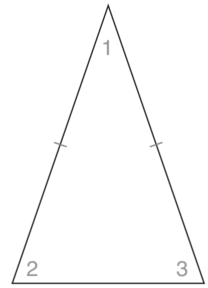


Figura 3.32

En algunos casos un carpintero puede buscar una medición rápida y precisa sin tener que hacer uso de sus herramientas. Suponga que la escuadra del carpintero que se muestra en la figura 3.33 es útil pero que no hay cerca una caja de ingletes. Si se hacen dos marcas en longitudes de 4 pulgadas desde la esquina de la escuadra y se unen, ¿qué tamaño de ángulo se determina? Podrá observar que cada ángulo indicado por un arco mide 45°.

El ejemplo 4 muestra que el recíproco del teorema "Los ángulos de la base de un △ isósceles son congruentes" también es verdadero. Sin embargo, atienda la advertencia que acompaña este texto.

EJEMPLO 4

Estudie la demostración gráfica del teorema 3.3.4.

TEOREMA 3.3.4

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a esos ángulos también son congruentes.

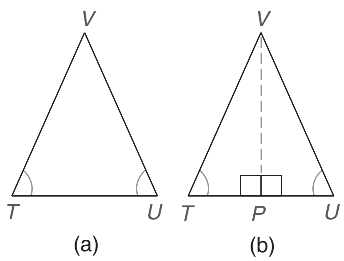


Figura 3.34

GEE
Ejercicios 7-17

DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA 3.3.4

DADO: $\triangle TUV$ con $\angle T \cong \angle U$ [Vea la figura 3.34(a).]

DEMUESTRE: $\overline{VU} \cong \overline{VT}$

DEMOSTRACIÓN: Trace $\overline{VP} \perp \overline{TU}$ [vea la figura 3.34(b)], se observa que $\triangle VPT \cong \triangle VPU$ (por AAL). Ahora $\overline{VU} \cong \overline{VT}$ (por PCTCC). ■

Cuando los tres lados de un triángulo son congruentes, el triángulo es **equilátero**. Si los tres ángulos son congruentes, entonces el triángulo es **equiángulo**. Los teoremas 3.3.3 y 3.3.4 se pueden utilizar para comprobar que los conjuntos {triángulos equiláteros} y {triángulos equiángulos} son equivalentes.

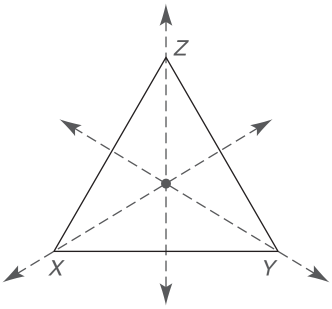


Figura 3.35

COROLARIO 3.3.5

Un triángulo equilátero también es equiángulo.

COROLARIO 3.3.6

Un triángulo equiángulo también es equilátero.

Un triángulo equilátero (o equiángulo) tiene una recta de simetría respecto a cada uno de los tres ejes que se muestran en la figura 3.35.

DEFINICIÓN

El **perímetro** de un triángulo es la suma de las longitudes de sus lados. Por tanto si a, b y c son las longitudes de los tres lados, entonces el perímetro P está dado por $P = a + b + c$. (Vea la figura 3.36.)

Geometría en el mundo real

Los tirantes que crean los triángulos se usan para dar estabilidad a un librero. El triángulo se llama una figura rígida.

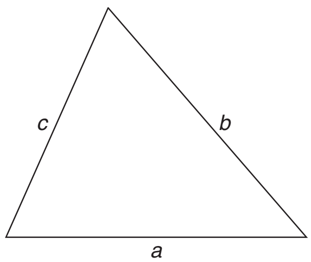


Figura 3.36

EJEMPLO 5

DADO: $\angle B \cong \angle C$
$AB = 5.3$ y $BC = 3.6$

ENCUENTRE: El perímetro del $\triangle ABC$

Solución Si $\angle B \cong \angle C$, entonces $AC = AB = 5.3$.
Por tanto,

$$P = a + b + c$$
$$P = 3.6 + 5.3 + 5.3$$
$$P = 14.2$$

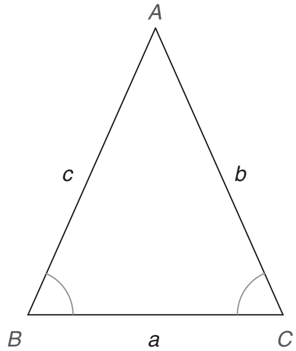
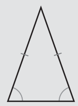
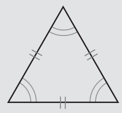
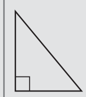
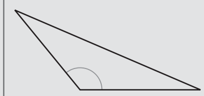


Figura 3.37

GEE
Ejercicios 18-22

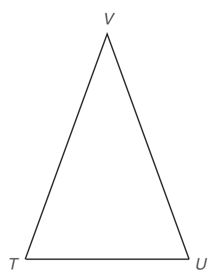
En la tabla 3.1 se resumen varias de las propiedades de los triángulos que se investigaron en las secciones anteriores.

TABLA 3.1
Propiedades seleccionadas de triángulos

	Escaleno	**Isósceles**	**Equilátero (equiangular)**	**Agudo**	**Recto**	**Obtuso**
						
Lados	No hay dos que sean $\cong$	Exactamente dos son $\cong$	Los tres son $\cong$	Posiblemente dos o tres son lados $\cong$	Posiblemente dos lados son $\cong$ $c^2 = a^2 + b^2$	Posiblemente dos lados son $\cong$
Ángulos	La suma de los $\angle$s es 180°	La suma de los $\angle$s es 180°; dos $\angle$s son $\cong$	La suma de los $\angle$s es 180°; tres $\angle$s son $\cong$ 60°	Todos los $\angle$s son agudos, la suma de los $\angle$s es 180°; posiblemente dos o tres $\angle$s son $\cong$	Un $\angle$ es recto; la suma de los $\angle$s es 180°; posiblemente dos $\angle$s son $\cong$ 45°; los $\angle$s agudos son complementarios	Un $\angle$ obtuso; la suma de los $\angle$s es 180°; posiblemente dos $\angle$s agudos son $\cong$

▶▶▶ Ejercicios 3.3

Para los ejercicios 1 al 8 utilice el trazo adjunto.



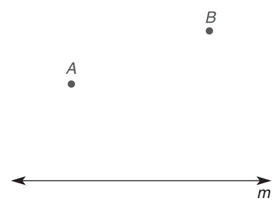
Ejercicios 1-8

1. Si $\overline{VU} \cong \overline{VT}$, ¿qué tipo de triángulo es $\triangle VTU$?
2. Si $\overline{VU} \cong \overline{VT}$, ¿cuáles ángulos de $\triangle VTU$ son congruentes?
3. Si $\angle T \cong \angle U$, ¿cuáles lados de $\triangle VTU$ son congruentes?
4. Si $\overline{VU} \cong \overline{VT}$, $VU = 10$, y $TU = 8$, ¿cuál es el perímetro de $\triangle VTU$?
5. Si $\overline{VU} \cong \overline{VT}$ y $m\angle T = 69°$, encuentre $m\angle U$.
6. Si $\overline{VU} \cong \overline{VT}$ y $m\angle T = 69°$, encuentre $m\angle V$.
7. Si $\overline{VU} \cong \overline{VT}$ y $m\angle T = 62°$, encuentre $m\angle V$.
8. Si $\overline{VU} \cong \overline{VT}$ y $m\angle V = 40°$, encuentre $m\angle T$.

En los ejercicios 9 al 12 determine si los conjuntos tienen una relación de subconjunto. ¿Los dos conjuntos son disjuntos o equivalentes? ¿Los conjuntos se intersecan?

9. L = {triángulos equiláteros}; E = {triángulos equiángulos}
10. S = {triángulos con dos lados $\cong$}; A = {triángulo con dos $\angle$s $\cong$}
11. R = {triángulos rectángulos}; O = {triángulos obtusos}
12. I = {triángulos isósceles}; R = {triángulos rectángulos}

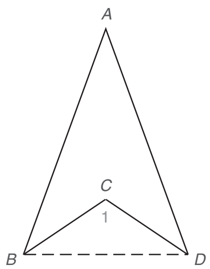
En los ejercicios 13 al 18 describa el segmento como determinado, indeterminado o sobredeterminado. Utilice el esquema adjunto como referencia.



Ejercicios 13-18

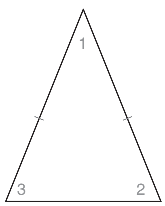
13. Trace un segmento que pase por el punto A.
14. Trace un segmento con puntos extremos A y B.
15. Trace un segmento $\overline{AB}$ paralelo a la recta m.
16. Trace un segmento $\overline{AB}$ perpendicular a m.
17. Trace un segmento perpendicular desde A hasta m.
18. Trace $\overline{AB}$ de tal manera que la recta m biseque $\overline{AB}$.
19. Un topógrafo sabe que un lote tiene la forma de un triángulo isósceles. Si el ángulo del vértice mide 70° y cada lado igual mide 160 pies de largo, ¿qué medida tiene cada uno de los ángulos de la base?

20. En el cuadrilátero cóncavo $ABCD$, el ángulo en A mide 40°. $\triangle ABD$ es isósceles, $\overrightarrow{BC}$ biseca al $\angle ABD$ y $\overrightarrow{DC}$ biseca al $\angle ADB$. ¿Cuáles son las medidas de $\angle ABC$, $\angle ADC$ y $\angle 1$?



En los ejercicios 21 al 26 utilice aritmética o álgebra según sea necesario para encontrar las medidas indicadas. Observe el uso de guiones en los lados iguales de los triángulos isósceles dados.

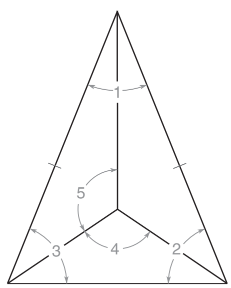
21. Encuentre $m\angle 1$ y $m\angle 2$ si $m\angle 3 = 68°$.



22. Si $m\angle 3 = 68°$, encuentre $m\angle 4$, el ángulo formado por los bisectores de $\angle 3$ y $\angle 2$.

23. Encuentre la medida de $\angle 5$, el cual está formado por los bisectores de $\angle 1$ y $\angle 3$. De nuevo, sea $m\angle 3 = 68°$.

24. Encuentre una expresión para la medida de $\angle 5$ si $m\angle 3 = 2x$ y los segmentos mostrados bisecan los ángulos del triángulo isósceles.



Ejercicios 22-24

25. En el triángulo isósceles $\triangle ABC$ con vértice en A (que no se muestra), cada ángulo de la base es 12° mayor que el ángulo del vértice. Encuentre la medida de cada ángulo.

26. En el triángulo isósceles $\triangle ABC$ (que no se muestra), el ángulo del vértice A es 5° mayor que un medio del ángulo de la base B. Encuentre el tamaño de cada ángulo del triángulo.

En los ejercicios 27 al 30 suponga que $\overline{BC}$ es la base del triángulo isósceles $\triangle ABC$ (que no se muestra).

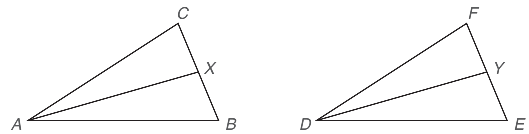
27. Encuentre el perímetro del $\triangle ABC$ si $AB = 8$ y $BC = 10$.

28. Encuentre AB si el perímetro del $\triangle ABC$ es 36.4 y $BC = 14.6$.

29. Encuentre x si el perímetro del $\triangle ABC$ es 40, $AB = x$ y $BC = x + 4$.

30. Encuentre x si el perímetro del $\triangle ABC$ es 68, $AB = x$ y $BC = 1.4x$.

31. Suponga que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Además, $\overline{AX}$ biseca al $\angle CAB$ y $\overline{DY}$ biseca al $\angle FDE$. ¿Son congruentes los bisectores de ángulo correspondientes de triángulos congruentes?

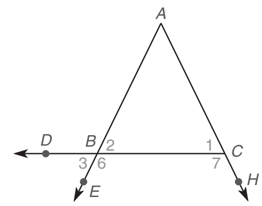


Ejercicios 31-32

32. Suponga que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $\overline{AX}$ es la mediana de A a $\overline{BC}$, y $\overline{DY}$ es la mediana de D a $\overline{EF}$. ¿Son congruentes las medianas correspondientes de triángulos congruentes?

En los ejercicios 33 y 34 complete la demostración utilizando la figura que se muestra a continuación:

33. *Dado:* $\angle 3 \cong \angle 1$
Demuestre: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$



Ejercicios 33-34

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle 3 \cong \angle 1$	1. ?
2. ?	2. Si dos rectas se intersecan, los $\angle$s verticales formados son $\cong$
3. ?	3. Propiedad de congruencia transitiva
4. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	4. ?

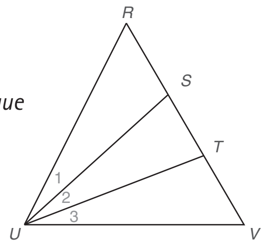
34. *Dado:* $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
Demuestre: $\angle 6 \cong \angle 7$

DEMOSTRACIÓN

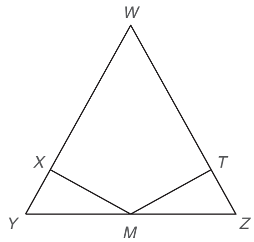
Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. $\angle 2 \cong \angle 1$	2. ?
3. $\angle 2$ y $\angle 6$ son suplementarios; $\angle 1$ y $\angle 7$ son suplementarios	3. ?
4. ?	4. Si dos $\angle$s son suplementarios de $\angle$s $\cong$, son $\cong$ entre sí.

En los ejercicios 35 al 37 complete cada demostración.

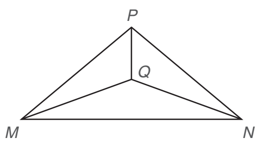
35. *Dado:* $\angle 1 \cong \angle 3$
$\overline{RU} \cong \overline{VU}$
Demuestre: $\triangle STU$ es isósceles
(SUGERENCIA: Primero demuestre que $\triangle RUS \cong \triangle VUT$.)



36. *Dado:* $\overline{WY} \cong \overline{WZ}$
M es el punto medio de $\overline{YZ}$
$\overline{MX} \perp \overline{WY}$ y
$\overline{MT} \perp \overline{WZ}$
Demuestre: $\overline{MX} \cong \overline{MT}$

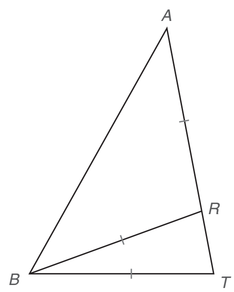


37. *Dado:* $\triangle MNP$ isósceles con vértice P
$\triangle MNQ$ isósceles con vértice Q
Demuestre: $\triangle MQP \cong \triangle NQP$



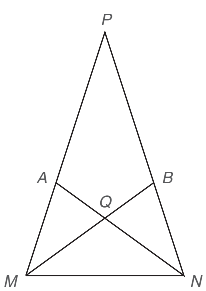
38. En el triángulo isósceles BAT, $\overline{AB} \cong \overline{AT}$. También, $\overline{BR} \cong \overline{BT} \cong \overline{AR}$. Si $AB = 12.3$ y $AR = 7.6$, encuentre el perímetro de:
a) $\triangle BAT$
b) $\triangle ARB$
c) $\triangle RBT$

39. En $\triangle BAT$, $\overline{BR} \cong \overline{BT} \cong \overline{AR}$, y $m\angle RBT = 20°$. Encuentre:
a) $m\angle T$
b) $m\angle ARB$
c) $m\angle A$

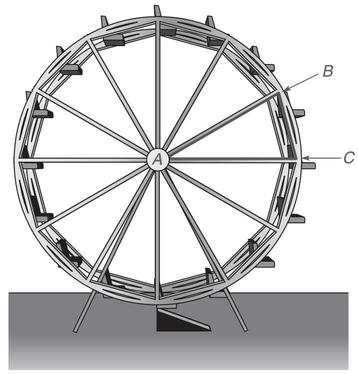


Ejercicios 38, 39

40. En $\triangle PMN$, $\overline{PM} \cong \overline{PN}$. $\overrightarrow{MB}$ biseca al $\angle PMN$ y $\overrightarrow{NA}$ biseca al $\angle PNM$. Si $m\angle P = 36°$ nombre todos los triángulos isósceles que se muestran en la figura.



41. El $\triangle ABC$ se encuentra en el sistema de soporte estructural de la rueda de la fortuna. Si $m\angle A = 30°$ y $AB = AC = 20$ pies, encuentre las medidas de $\angle B$ y $\angle C$.



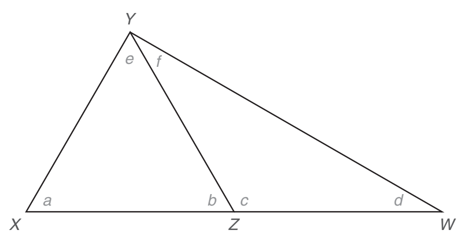
En los ejercicios 42 a 44 explique por qué cada enunciado es verdadero.

42. La altura del vértice de un triángulo isósceles también es la mediana de la base del triángulo.

43. El bisector del ángulo del vértice de un triángulo isósceles biseca la base.

44. Los bisectores de ángulo de los ángulos de la base de un triángulo isósceles, junto con la base, forman un triángulo isósceles.

***45.** *Dado*: En la figura $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$, y Z es el punto medio de $\overline{XW}$.



Demuestre: $\triangle XYW$ es el triángulo rectángulo con $m\angle XYW = 90°$
(SUGERENCIA: Sea $m\angle X = a$.)

***46.** *Dado:* En la figura $a = e = 66°$. También $\overline{YZ} \cong \overline{ZW}$. Si $YW = 14.3$ pulg y $YZ = 7.8$ pulg, encuentre el perímetro del $\triangle XYW$ redondeado a décimas de pulgada.

3.4 Justificación de construcciones básicas

CONCEPTOS CLAVE Justificación de construcciones

En secciones anteriores se explicaron métodos de construcción que parecían cumplir sus metas; sin embargo, los métodos se presentaron de forma intuitiva. En esta sección se justifican los métodos de construcción y se les aplica en otras construcciones. La justificación del método es una "demostración" de que la construcción cumple su propósito. Vea el ejemplo 1.

EJEMPLO 1

Justifique el método para construir un ángulo congruente con un ángulo dado.

DADO: $\angle ABC$
$\overline{BD} \cong \overline{BE} \cong \overline{ST} \cong \overline{SR}$ (por construcción)
$\overline{DE} \cong \overline{TR}$ (por construcción)

DEMUESTRE: $\angle B \cong \angle S$

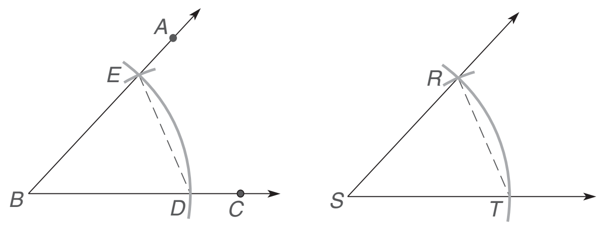


Figura 3.38

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle ABC$; $\overline{BD} \cong \overline{BE} \cong \overline{ST} \cong \overline{SR}$	1. Dado
2. $\overline{DE} \cong \overline{TR}$	2. Dado
3. $\triangle EBD \cong \triangle RST$	3. LLL
4. $\angle B \cong \angle S$	4. PCTCC

En el ejemplo 2 se aplica el método de construcción que se justificó en el ejemplo 1. El objetivo es construir un triángulo isósceles que contenga un ángulo obtuso. Es necesario que los lados congruentes incluyan el ángulo obtuso.

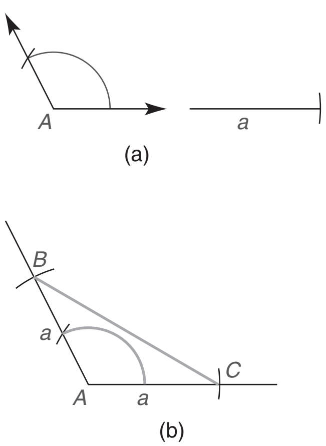


Figura 3.39

EJEMPLO 2

Construya un triángulo isósceles en que el $\angle A$ obtuso esté incluido en los dos lados de longitud a [vea la figura 3.39(a)].

Solución Construya un ángulo congruente con $\angle A$. Desde A marque arcos de longitud a en los puntos B y C, como se muestra en la figura 3.39(b). Una B y C para completar el $\triangle ABC$.

GEE
Ejercicios 1-2

En el ejemplo 3 recuerde el método de construcción que se utilizó para bisecar un ángulo. Aunque se ilustra la técnica, el propósito aquí es justificar el método.

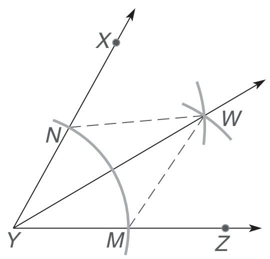


Figura 3.40

EJEMPLO 3

Justifique el método para construir el bisector de un ángulo. Proporcione las razones que faltan en la demostración.

DADO: $\angle XYZ$
$\overline{YM} \cong \overline{YN}$ (por construcción)
$\overline{MW} \cong \overline{NW}$ (por construcción)
(Vea la figura 3.40.)

DEMUESTRE: $\overrightarrow{YW}$ biseca al $\angle XYZ$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle XYZ$; $\overline{YM} \cong \overline{YN}$ y $\overline{MW} \cong \overline{NW}$	1. ?
2. $\overline{YW} \cong \overline{YW}$	2. ?
3. $\triangle YMW \cong \triangle YNW$	3. ?
4. $\angle MYW \cong \angle NYW$	4. ?
5. $\overrightarrow{YW}$ biseca a $\angle XYZ$	5. ?

El método del bisector de ángulo se puede utilizar para construir ángulos de ciertas medidas. Por ejemplo, si se ha trazado un ángulo recto, entonces se puede construir un ángulo que mida 45° bisecando el ángulo de 90°. En el ejemplo 4 se construye un ángulo que mide 30°.

EJEMPLO 4

Construya un ángulo que mida 30°.

Solución Figuras 3.41(a) y (b): comience por construir un triángulo equilátero (y por tanto equiángulo). Para lograr esto, marque un segmento de recta de longitud a. A partir de los puntos extremos de este segmento de recta marque arcos utilizando la misma longitud de radio a. El punto de intersección determina el tercer vértice de este triángulo cuyos ángulos miden 60° cada uno.
Figura 3.41(c): al construir el bisector de un ángulo se determina un ángulo que mide 30°.

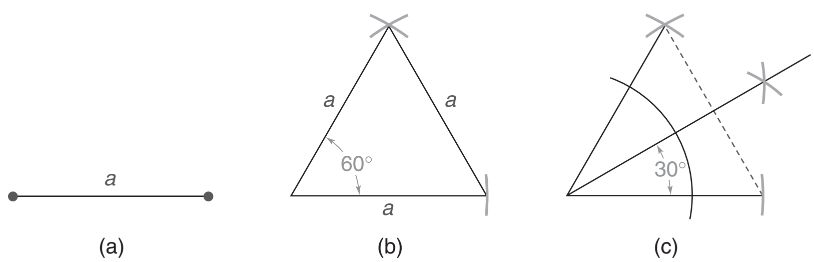


Figura 3.41

En el ejemplo 5 se justifica el método para construir una recta perpendicular a una recta dada a partir de un punto fuera de dicha recta. En este ejemplo el punto P se encuentra sobre la recta ℓ.

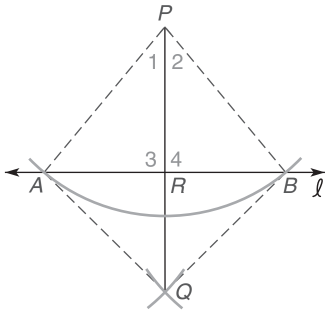


Figura 3.42

EJEMPLO 5

DADO: P no está sobre ℓ
$\overline{PA} \cong \overline{PB}$ (por construcción)
$\overline{AQ} \cong \overline{BQ}$ (por construcción)
(Vea la figura 3.42.)

DEMOSTRACIÓN: $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

Proporcione los enunciados y las razones que faltan en la demostración.

DEMOSTRACIÓN

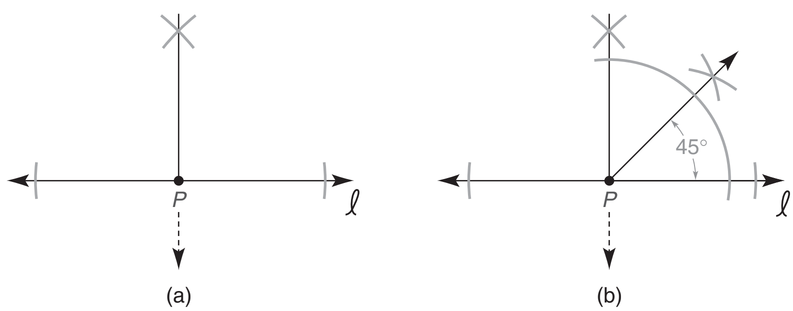
Enunciados	Razones
1. P no está sobre ℓ $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ y $\overline{AQ} \cong \overline{BQ}$	1. ?
2. $\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$	2. ?
3. $\triangle PAQ \cong \triangle PBQ$	3. ?
4. $\angle 1 \cong \angle 2$	4. ?
5. $\overline{PR} \cong \overline{PR}$	5. ?
6. $\triangle PRA \cong \triangle PRB$	6. ?
7. $\angle 3 \cong \angle 4$	7. ?
8. ?	8. Si dos rectas coinciden para formar $\angle$s adyacentes $\cong$, dichas rectas son $\perp$

En el ejemplo 6 recuerde el método para construir la recta perpendicular a una recta dada en un punto sobre ésta. En el ejemplo se ilustra esta técnica y en el ejercicio 29 se le pide al estudiante justificar el método. En el ejemplo 6 se construye un ángulo que mide 45°.

EJEMPLO 6

Construya un ángulo que mida 45°.

Solución Figura 3.43(a): Comience construyendo un segmento de recta perpendicular a la recta ℓ en el punto P.
Figura 3.43(b): Después se biseca uno de los ángulos rectos que se determinaron. El bisector forma un ángulo que mide 45°.



Ejercicios 3-5

Figura 3.43

Como se vio en el ejemplo 4 la construcción de un triángulo equilátero es bastante sencilla. También es posible construir otros polígonos regulares, como un cuadrado o un hexágono regular. En el siguiente recuadro se retoman algunos hechos que ayudarán a desarrollar dichas construcciones.

Para construir un polígono regular con n lados:

1. Cada ángulo interior debe medir $I = \frac{(n-2)180}{n}$ grados; de manera alternativa cada ángulo exterior debe medir $E = \frac{360}{n}$ grados.
2. Todos los lados deben ser congruentes.

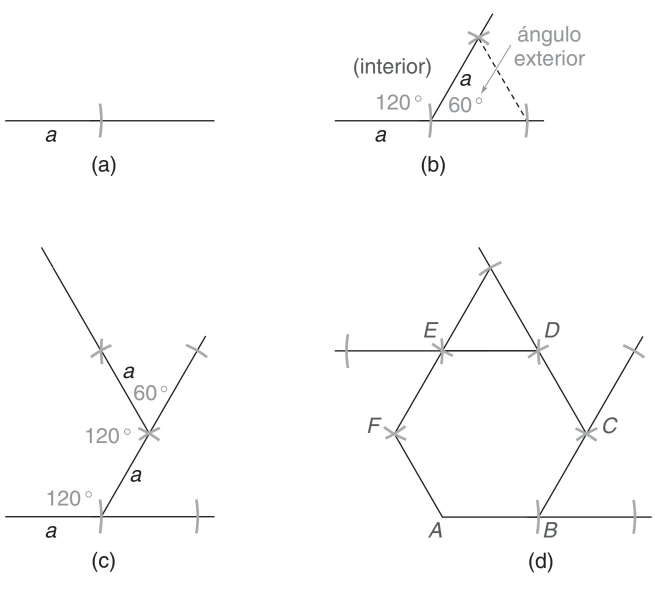
EJEMPLO 7

Construya un hexágono regular que tenga lados de longitud a.

Solución Figura 3.44(a): Se comienza marcando un segmento de recta de longitud a. Figura 3.44(b). Cada ángulo exterior del hexágono ($n = 6$) debe medir $E = \frac{360}{6} = 60°$; entonces cada ángulo interior mide 120°. Se construye un triángulo equilátero (todos los lados miden a) de tal manera que se forme un ángulo exterior de 60°.

Figura 3.44(c): De nuevo, al marcar un arco de longitud a para el segundo lado se construye otro ángulo exterior que mide 60°.

Figura 3.44(d): Este procedimiento continúa hasta que se determina el hexágono regular $ABCDEF$, como se observa en la figura 3.44(d).

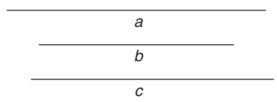


Ejercicios 6-7

Figura 3.44

Ejercicios 3.4

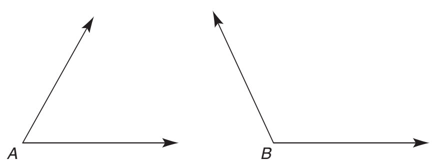
En los ejercicios 1 al 6 utilice los segmentos de recta de longitudes dadas a, b y c para desarrollar las construcciones.



Ejercicios 1–6

1. Construya un segmento de recta de longitud $2b$.
2. Construya un segmento de recta de longitud $b + c$.
3. Construya un segmento de recta de longitud $\frac{1}{2}c$.
4. Construya un segmento de recta de longitud $a - b$.
5. Construya un triángulo con lados de longitudes a, b y c.
6. Construya un triángulo isósceles con una base de longitud b y catetos de longitud a.

En los ejercicios 7 al 12 use los ángulos dados para desarrollar las construcciones.

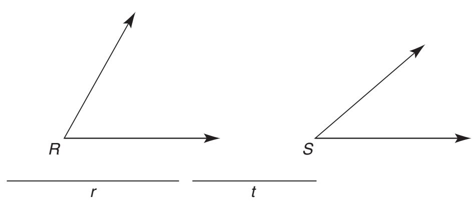


Ejercicios 7–12

7. Construya un ángulo que sea congruente con el $\angle A$ agudo.
8. Construya un ángulo que sea congruente con el $\angle B$ obtuso.
9. Construya un ángulo que mida la mitad del $\angle A$.
10. Construya un ángulo que tenga una medida igual a $m\angle B - m\angle A$.
11. Construya un ángulo que tenga el doble de la medida del $\angle A$.
12. Construya un ángulo cuya medida sea el promedio de las medidas de $\angle A$ y $\angle B$.

En los ejercicios 13 y 14 use los ángulos y las longitudes de los lados dados para construir el triángulo descrito.

13. Construya el triángulo que tenga lados de longitud r y t con el ángulo S incluido.



Ejercicios 13–14

14. Construya el triángulo que tenga un lado de longitud t incluido por los ángulos R y S.

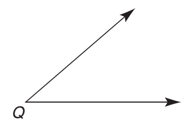
Está disponible en DVD un video de ejercicios. Este material se vende por separado.

En los ejercicios 15 al 18 construya ángulos que tengan las medidas dadas.

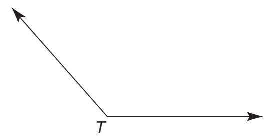
15. 90° y después 45°
16. 60° y después 30°
17. 30° y después 15°
18. 45° y después 105°

   (SUGERENCIA: $105° = 45° + 60°$)

19. Describa cómo construiría un ángulo que midiera 22.5°.
20. Describa cómo construiría un ángulo que midiera 75°.
21. Construya el complemento del ángulo agudo que se muestra.

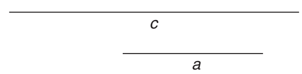


22. Construya el suplemento del ángulo obtuso que se muestra.



En los ejercicios 23 al 26 utilice los segmentos de recta de longitudes a y c, como se muestra.

23. Construya el triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud c y un cateto de longitud a.



Ejercicios 23–26

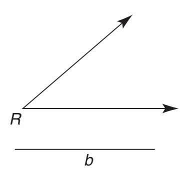
24. Construya un triángulo isósceles con base de longitud c y una altura de longitud a.

   (SUGERENCIA: La altura se encuentra en el bisector perpendicular de la base.)

25. Construya un triángulo isósceles con un ángulo de vértice de 30° y cada cateto de longitud c.
26. Construya un triángulo rectángulo con ángulos de la base de 45° e hipotenusa de longitud c.

En los ejercicios 27 y 28 use el ángulo dado y el segmento de longitud b.

27. Construya el triángulo rectángulo en que el ángulo agudo R tenga un lado (un cateto del triángulo) de longitud b.



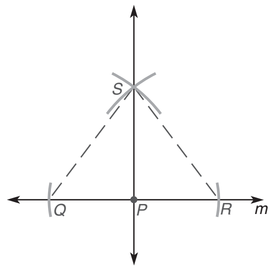
Ejercicios 27, 28

28. Construya un triángulo isósceles con base de longitud b y ángulos de la base congruentes que tengan la medida del ángulo R. (Vea la figura del ejercicio 27.)

29. Complete la justificación de la construcción de la recta perpendicular a una recta dada en un punto en dicha recta.

Dado: Recta m, con punto P en m
$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ (por construcción)
$\overline{QS} \cong \overline{RS}$ (por construcción)

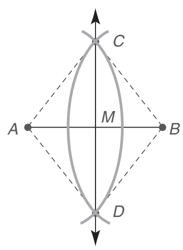
Demuestre: $\overleftrightarrow{SP} \perp m$



30. Termine la justificación de la construcción del bisector perpendicular de un segmento de recta.

Dado: $\overline{AB}$ con $\overline{AC} \cong \overline{BC} \cong \overline{AD} \cong \overline{BD}$ (por construcción)

Demuestre: $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ y $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$



31. Para construir un hexágono regular, ¿qué medida sería necesaria para cada ángulo interior? Construya un ángulo de dicha medida.

32. Para construir un octágono regular, ¿qué medida sería necesaria para cada ángulo interior? Construya un ángulo de dicha medida.

33. Para construir un dodecágono regular (12 lados), ¿qué medida sería necesaria para cada ángulo interior? Construya un ángulo de dicha medida.

34. Trace un triángulo agudo y construya las tres medianas del triángulo. ¿Las medianas parecen coincidir en un punto común?

35. Trace un triángulo obtuso y construya las tres alturas del triángulo. ¿Las alturas parecen coincidir en un punto común?

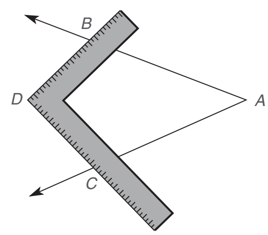
(SUGERENCIA: En la construcción de dos de las alturas es necesario extender los lados.)

36. Trace un triángulo rectángulo y construya los bisectores de ángulo del triángulo. ¿Los bisectores de ángulo parecen coincidir en un punto común?

37. Trace un triángulo obtuso y construya los tres bisectores perpendiculares de sus lados. ¿Los bisectores perpendiculares de los tres lados parecen coincidir en un punto común?

38. Construya un triángulo equilátero y sus tres alturas. ¿Qué le dice la intuición acerca de las tres medianas, los tres bisectores de ángulo y los tres bisectores perpendiculares de los lados de dicho triángulo?

39. Un carpintero ha colocado una escuadra sobre un ángulo de tal manera que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\overline{BD} \cong \overline{CD}$ (vea la figura). ¿Qué puede concluir acerca de la ubicación del punto D?



***40.** En el triángulo rectángulo ABC, $m\angle C = 90°$. También $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$. Construya el bisector del $\angle B$ de tal manera que interseque $\overline{CA}$ en el punto D. Ahora construya $\overline{DE}$ perpendicular a $\overline{AB}$ con E sobre $\overline{AB}$. En términos de a, b y c, encuentre la longitud de $\overline{EA}$.

3.5 Desigualdades en un triángulo

CONCEPTOS CLAVE

Lemas	Desigualdad de lados y ángulos en un triángulo	Desigualdad del triángulo

Existen importantes relaciones de desigualdad entre las partes medidas de un triángulo. Para establecer algunas de ellas retomaremos y aplicaremos algunos hechos del álgebra y la geometría. En el Apéndice A, sección A.3, se puede encontrar un repaso más profundo de desigualdades.

DEFINICIÓN

Sean a y b números reales. $\mathbf{a > b}$ (se lee "a es mayor que b") si y sólo si existe un número positivo p para el cual $a = b + p$.

Ejercicios 1-3

Por ejemplo $9 > 4$, ya que existe el número positivo 5 para el cual $9 = 4 + 5$. Ya que $5 + 2 = 7$ también se sabe que $7 > 2$ y $7 > 5$. En geometría, sea que A-B-C estén en $\overline{AC}$ de modo que $AB + BC = AC$; entonces $AC > AB$, porque BC es un número positivo.

LEMAS (TEOREMAS DE APOYO)

Los siguientes teoremas se utilizarán como apoyo en la demostración de los teoremas que se encuentran más adelante en esta sección. En su papel de teoremas "de apoyo", a cada uno de los cinco enunciados en los recuadros que siguen se les llama **lema**. Se demostrarán los primeros cuatro lemas porque su contenido es geométrico.

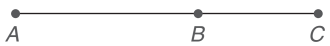


Figura 3.45

LEMA 3.5.1

Si B está entre A y C en $\overline{AC}$, entonces $AC > AB$ y $AC > BC$. (La medida de un segmento de recta es mayor que la medida de cualquiera de sus partes. Vea la figura 3.45.)

DEMOSTRACIÓN

Por el postulado segmento-adición, $AC = AB + BC$. De acuerdo con el postulado de la regla, $BC > 0$ (lo que significa que BC es positivo); se tiene que $AC > AB$. De manera similar, $AC > BC$. Estas relaciones surgen de forma lógica a partir de la definición de $a > b$.

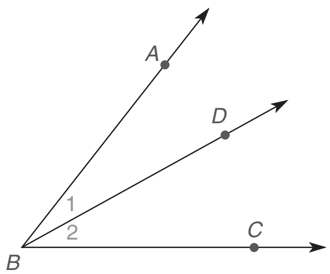


Figura 3.46

LEMA 3.5.2

Si $\overrightarrow{BD}$ divide al $\angle ABC$ en dos partes ($\angle 1$ y $\angle 2$), entonces $m\angle ABC > m\angle 1$ y $m\angle ABC > m\angle 2$. (La medida de un ángulo es mayor que la medida de cualquiera de sus partes. Vea la figura 3.46.)

DEMOSTRACIÓN

Por el postulado ángulo-adición, $m\angle ABC = m\angle 1 + m\angle 2$. Usando el postulado del transportador, $m\angle 2 > 0$; se deduce que $m\angle ABC > m\angle 1$. De manera similar $m\angle ABC > m\angle 2$.

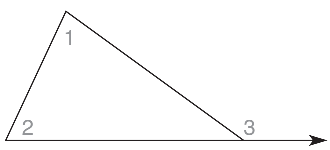


Figura 3.47

LEMA 3.5.3

Si $\angle 3$ es un ángulo exterior de un triángulo y $\angle 1$ y $\angle 2$ son los ángulos interiores no adyacentes, entonces $m\angle 3 > m\angle 1$ y $m\angle 3 > m\angle 2$. (La medida de un ángulo exterior de un triángulo es mayor que la medida de cualquier ángulo interior no adyacente. Vea la figura 3.47.)

DEMOSTRACIÓN

Ya que la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes, $m\angle 3 = m\angle 1 + m\angle 2$. Se deduce que $m\angle 3 > m\angle 1$ y $m\angle 3 > m\angle 2$.

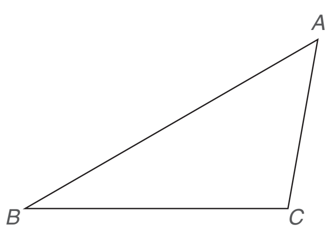


Figura 3.48

LEMA 3.5.4

En el $\triangle ABC$, si $\angle C$ es un ángulo recto o un ángulo obtuso, entonces $m\angle C > m\angle A$ y $m\angle C > m\angle B$. (Si un triángulo contiene un ángulo recto o uno obtuso, entonces la medida de dicho ángulo es mayor que la medida de cualquiera de los ángulos restantes. Vea la figura 3.48.)

DEMOSTRACIÓN

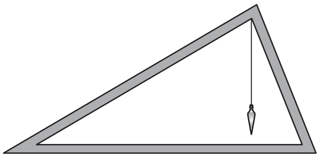
En el $\triangle ABC$, $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$. Con $\angle C$ un ángulo recto o un ángulo obtuso, $m\angle C \geq 90°$; se deduce que $m\angle A + m\angle B \leq 90°$. Entonces cada ángulo ($\angle A$ y $\angle B$) debe ser agudo. Por tanto $m\angle C > m\angle A$ y $m\angle C > m\angle B$.

El siguiente teorema (también un lema) se usa en el ejemplo 1. Su demostración (no incluida) depende de la definición de "es mayor que", que se encuentra en la página anterior.

LEMA 3.5.5 (Propiedad de desigualdad de la adición)

Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$.

Geometría en el mundo real



La "plomada" de un carpintero determina la distancia más corta hacia la recta horizontal. Una abrazadera vertical proporciona soporte estructural para el techo.

EJEMPLO 1

Proporcione un párrafo de demostración para el siguiente problema. Vea la figura 3.49.

DADO: $AB > CD$ y $BC > DE$

DEMUESTRE: $AC > CE$

Figura 3.49

DEMOSTRACIÓN: Si $AB > CD$ y $BC > DE$, entonces $AB + BC > CD + DE$ por el lema 3.5.5. Pero $AB + BC = AC$ y $CD + DE = CE$ por el postulado segmento-adición. Aplicando la sustitución se tiene que $AC > CE$. ■

La demostración en párrafo en el ejemplo 1 pudo haberse escrito en este formato estándar.

GEE *Ejercicios 4-8*

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $AB > CD$ y $BC > DE$	1. Dado
2. $AB + BC > CD + DE$	2. Lema 3.5.5
3. $AB + BC = AC$ y $CD + DE = CE$	3. Postulado segmento-adición
4. $AC > CE$	4. Sustitución

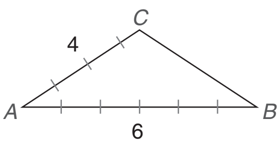


Figura 3.50

La demostración en párrafo y la demostración en dos columnas del ejemplo 1 son equivalentes. En cualquiera de ambas los enunciados deben ordenarse y justificarse.

Los teoremas restantes son el "corazón" de esta sección. Antes de estudiar el teorema y su demostración, es una buena idea visualizar cada teorema. Muchos enunciados de desigualdad son intuitivos; es decir, son fáciles de creer aun cuando no sea tan sencillo comprobarlos.

Estudie el teorema 3.5.6 y considere la figura 3.50 en la que parece que $m\angle C > m\angle B$.

TEOREMA 3.5.6

Si un lado de un triángulo es más largo que un segundo lado, entonces la medida del ángulo opuesto al lado más largo es mayor que la medida del ángulo opuesto al lado más corto.

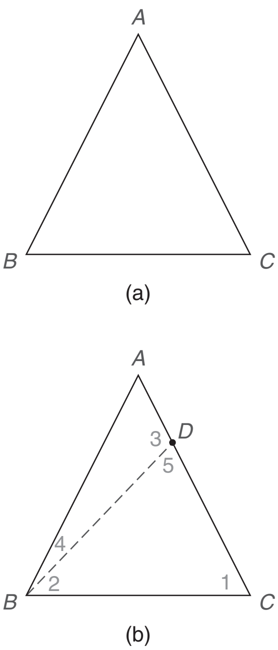


Figura 3.51

EJEMPLO 2

Proporcione un párrafo de demostración del teorema 3.5.6.

DADO: $\triangle ABC$, con $AC > BC$ [Vea la figura 3.51(a).]

DEMUESTRE: $m\angle B > m\angle A$

DEMOSTRACIÓN: Dado el $\triangle ABC$ con $AC > BC$, se usa el postulado de la regla para localizar el punto D en $\overline{AC}$ de modo que $\overline{CD} \cong \overline{BC}$ en la figura 3.51(b). Ahora $m\angle 2 = m\angle 5$ en el triángulo isósceles BDC. Por el lema 3.5.2, $m\angle ABC > m\angle 2$; por tanto, $m\angle ABC > m\angle 5$(*) por sustitución. Por el lema 3.5.3, $m\angle 5 > m\angle A$ (*) ya que $\angle 5$ es un ángulo exterior del $\triangle ADB$. Utilizando los dos enunciados marcados con asterisco se puede concluir por la propiedad de desigualdad transitiva que $m\angle ABC > m\angle A$; esto es, $m\angle B > m\angle A$ en la figura 3.51(a). ■

Exploración tecnológica

Utilice software de cómputo si dispone de él.

1. Dibuje un $\triangle ABC$ con $\overline{AB}$ como el lado más largo.
2. Mida $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.
3. Demuestre que el $\angle C$ tiene la medida más grande.

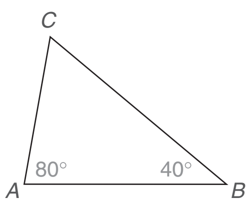


Figura 3.52

Descubra

Utilice papel y un transportador para trazar el $\triangle RST$ de tal manera que $m\angle R = 75°$, $m\angle S = 60°$ y $m\angle T = 45°$. Mida la longitud de cada lado.

a) ¿Qué lado es el más largo?
b) ¿Qué lado es el más corto?

RESPUESTAS

(a) $\overline{ST}$ (b) $\overline{RS}$

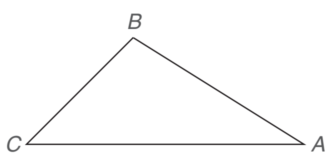


Figura 3.53

La relación descrita en el teorema 3.5.6 se extiende, por supuesto, a todos los lados y a todos los ángulos de un triángulo. Esto es, el mayor de los tres ángulos de un triángulo es opuesto al lado más largo y el ángulo menor es opuesto al lado más corto.

EJEMPLO 3

Dado que los tres lados del $\triangle ABC$ (que no se muestra) son $AB = 4$, $BC = 5$ y $AC = 6$, ordene los ángulos por tamaño.

Solución Ya que $AC > BC > AB$, el ángulo mayor es $\angle B$ que se encuentra opuesto a $\overline{AC}$. El ángulo intermedio en tamaño es $\angle A$, que se encuentra opuesto a $\overline{BC}$. El ángulo más pequeño es $\angle C$, que se encuentra opuesto el lado más corto, $\overline{AB}$. Por tanto el orden de los ángulos por tamaño es

$$m\angle B > m\angle A > m\angle C$$ ■

El recíproco del teorema 3.5.6 también es verdadero. Sin embargo, es necesario utilizar una demostración indirecta para establecer el recíproco. Recuerde que este método de demostración comienza suponiendo lo opuesto de lo que se desea mostrar. Ya que esta suposición conduce a una contradicción, la suposición debe ser falsa y la afirmación deseada es, por tanto, verdadera.

Estudie el teorema 3.5.7 y considere la figura 3.52 en la que $m\angle A = 80°$ y $m\angle B = 40°$. Parece que el lado más largo se encuentra opuesto al ángulo mayor; esto es, parece que $BC > AC$.

TEOREMA 3.5.7

Si la medida de un ángulo de un triángulo es mayor que la medida de un segundo ángulo, entonces el lado opuesto del ángulo más grande es mayor que el lado opuesto del ángulo menor.

La demostración del teorema 3.5.7 depende de este hecho: dados los números reales a y b, sólo uno de los siguientes puede ser verdadero.

$$a > b, \quad a = b \quad \text{o} \quad a < b$$

EJEMPLO 4

Demuestre el teorema 3.5.7 utilizando un método indirecto.

DADO: $\triangle ABC$ con $m\angle B > m\angle A$ (Vea la figura 3.53.)

DEMUESTRE: $AC > BC$

DEMOSTRACIÓN: Dado el $\triangle ABC$ con $m\angle B > m\angle A$ suponga que $AC \leq BC$. Pero si $AC = BC$, entonces $m\angle B = m\angle A$, lo que contradice la hipótesis. Además, si $AC < BC$, entonces se tiene por el teorema anterior que $m\angle B < m\angle A$, lo que también contradice la hipótesis. Por tanto el enunciado supuesto debe ser falso y se tiene que $AC > BC$. ■

EJEMPLO 5

Dado $\triangle RST$ (que no se muestra) en el que $m\angle R = 80°$ y $m\angle S = 55°$, escriba una desigualdad extendida que compare las longitudes de los tres lados.

Solución Ya que la suma de los ángulos de $\triangle RST$ es 180°, se tiene que $m\angle T = 45°$. Con $m\angle R > m\angle S > m\angle T$, se deduce que los lados opuestos a estos $\angle$s son desiguales en el mismo orden. Esto es

$$ST > RT > SR$$ ■

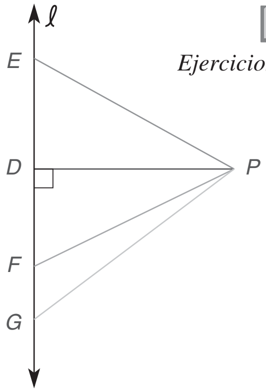


Figura 3.54

GEE
Ejercicios 9-12

El siguiente corolario es una consecuencia del teorema 3.5.7.

COROLARIO 3.5.8

El segmento perpendicular de un punto a una recta es el segmento más corto que puede trazarse del punto a la recta.

En la figura 3.54, $PD < PE$, $PD < PF$ y $PD < PG$. En todo caso, $\overline{PD}$ es opuesto a un ángulo agudo de un triángulo, mientras que el segundo segmento siempre es opuesto a un ángulo recto (necesariamente el ángulo más largo del triángulo involucrado). Con $\overline{PD} \perp \ell$, se dice que PD es la *distancia* de P a ℓ.

El corolario 3.5.8 puede extenderse fácilmente a tres dimensiones.

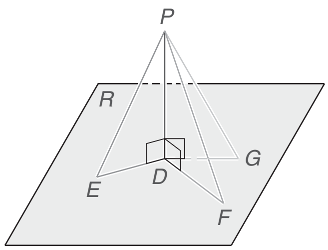


Figura 3.55

COROLARIO 3.5.9

El segmento perpendicular de un punto a un plano es el segmento más corto que puede trazarse del punto al plano.

En la figura 3.55 $\overline{PD}$ es un cateto del triángulo rectángulo que se muestra. Con $\overline{PE}$ la hipotenusa de $\triangle PDE$, $\overline{PF}$ la hipotenusa de $\triangle PDF$ y $\overline{PG}$ la hipotenusa de $\triangle PDG$, la longitud de $\overline{PD}$ es menor que la de $\overline{PE}$, $\overline{PF}$, $\overline{PG}$, o cualquier otro segmento de recta que una el punto P con un punto en el plano R. La longitud de $\overline{PD}$ se conoce como la *distancia* del punto P al plano R.

Nuestro teorema final demuestra que ningún lado del triángulo puede tener una longitud mayor o igual a la suma de las longitudes de los otros lados. En la demostración la relación está validada por sólo una de las tres desigualdades posibles. El teorema 3.5.10 con frecuencia se denomina la desigualdad del triángulo. (Vea la figura 3.56.)

GEE
Ejercicios 13-14

TEOREMA 3.5.10 ▶ (Desigualdad del triángulo)

La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

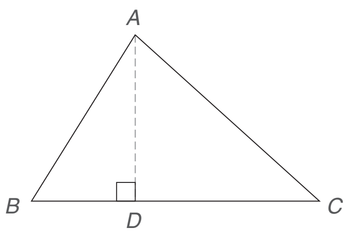


Figura 3.56

DADO: $\triangle ABC$

DEMUESTRE: $BA + CA > BC$

DEMOSTRACIÓN: Trace $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Ya que el segmento más corto de un punto a $\overline{AD}$ es el segmento perpendicular, $BA > BD$ y $CA > CD$. Usando el lema 3.5.5 se suman las desigualdades; $BA + CA > BD + CD$. Por el postulado segmento-adición, la suma $BD + CD$ se puede reemplazar por BC para dar $BA + CA > BC$.

El siguiente enunciado es una forma alternativa y expandida del teorema 3.5.10. Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo y c es la longitud de cualquier lado, entonces $a - b < c < a + b$.

TEOREMA 3.5.10 ▶ (Desigualdad del triángulo)

La longitud de cualquier lado de un triángulo debe estar entre la suma y la diferencia de las longitudes de los otros dos lados.

EJEMPLO 6

¿Puede un triángulo tener lados de las siguientes longitudes?

a) 3, 4 y 5
b) 3, 4 y 7
c) 3, 4 y 8
d) 3, 4 y x

Solución

a) Sí, porque ningún lado tiene una longitud mayor o igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados (es decir, $4 - 3 < 5 < 3 + 4$)
b) No, porque $7 = 3 + 4$ (se necesita $4 - 3 < 7 < 3 + 4$)
c) No, porque $8 > 3 + 4$ (se necesita $4 - 3 < 8 < 3 + 4$)
d) Sí, si se cumple que $4 - 3 < x < 4 + 3$ ■

Del ejemplo 6 puede observar que la longitud de un lado no puede ser mayor o igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados. Considerando la forma alternativa del teorema 3.5.10 se observa que $4 - 3 < 5 < 4 + 3$ en el inciso (a). Cuando 5 [como en el inciso (a)] se sustituye por 7 [como en el inciso (b)] u 8 [como en el inciso (c)], esta desigualdad se vuelve un enunciado falso. El inciso (d) del ejemplo 6 muestra que la longitud del tercer lado debe estar entre 1 y 7.

Nuestro ejemplo final ilustra una aplicación práctica de las relaciones de desigualdad en triángulos.

EJEMPLO 7

En un mapa los bomberos se ubican en los puntos A y B. Se ha generado un incendio en el punto C. ¿Cuál grupo de bomberos está más cerca del lugar del incendio? (Vea la figura 3.57.)

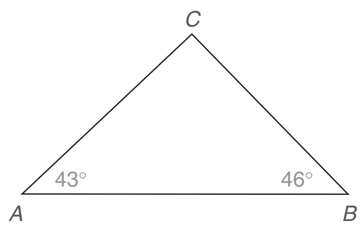


Figura 3.57

Solución Con $m\angle A = 43°$ y $m\angle B = 46°$, el lado opuesto a $\angle B$ tiene un longitud mayor que el lado opuesto al $\angle A$. Se tiene que $AC > BC$. Ya que la distancia de B a C es menor que la distancia de A a C, los bomberos en el sitio B debieron haber sido enviados al incendio ubicado en C.

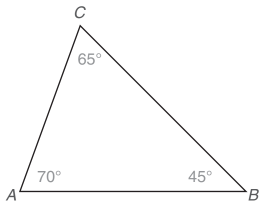
GEE *Ejercicios 15-18*

NOTA: En el ejemplo 7 se supuso que las carreteras de A y B (a C) son igualmente accesibles. ■

Ejercicios 3.5

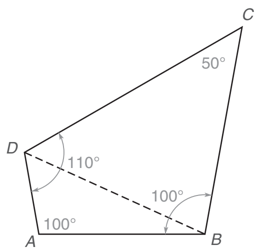
En los ejercicios 1 al 10 clasifique cada enunciado como verdadero o falso.

1. $\overline{AB}$ es el lado más largo del $\triangle ABC$.



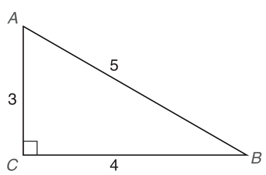
Ejercicios 1-2

2. $AB < BC$
3. $DB > AB$



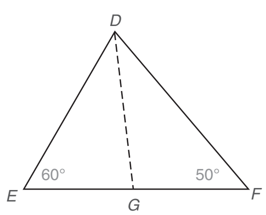
Ejercicios 3-4

4. Ya que $m\angle A = m\angle B$, se deduce que $DA = DC$.
5. $m\angle A + m\angle B = m\angle C$



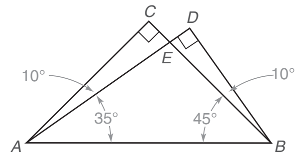
Ejercicios 5-6

6. $m\angle A > m\angle B$
7. $DF > DE + EF$



Ejercicios 7-8

8. Si $\overrightarrow{DG}$ es el bisector de $\angle EDF$, entonces $DG > DE$.
9. $DA > AC$



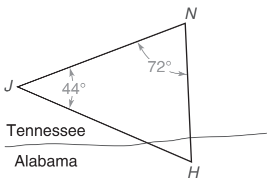
Ejercicios 9-10

10. $CE = ED$
11. Si es posible dibuje un triángulo cuyos ángulos midan:
    a) 100°, 100° y 60°
    b) 45°, 45° y 90°
12. Si es posible dibuje un triángulo cuyos ángulos midan:
    a) 80°, 80° y 50°
    b) 50°, 50° y 80°
13. Si es posible dibuje un triángulo cuyos lados midan:
    a) 8, 9 y 10
    b) 8, 9 y 17
    c) 8, 9 y 18
14. Si es posible dibuje un triángulo cuyos lados midan:
    a) 7, 7 y 14
    b) 6, 7 y 14
    c) 6, 7 y 8

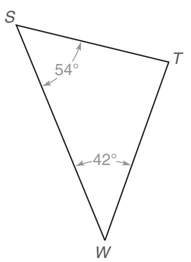
En los ejercicios 15 al 18 describa el triángulo ($\triangle XYZ$, que no se muestra) como escaleno, isósceles o equilátero. Además, ¿el triángulo es agudo, rectángulo u obtuso?

15. $m\angle X = 43°$y $m\angle Y = 47°$
16. $m\angle X = 60°$y $m\angle Y \cong \angle Z$
17. $m\angle X = m\angle Y = 40°$
18. $m\angle X = 70°$ y $m\angle Y = 40°$
19. Dos de los lados de un triángulo isósceles tienen longitudes de 10 y 4 cm. ¿Cuál debe ser la longitud de la base?
20. Los lados de un triángulo rectángulo tienen longitudes de 6, 8 y 10 cm. ¿Qué longitud es la de la hipotenusa?
21. Un triángulo es isósceles *y* agudo. Si un ángulo del triángulo mide 36°, ¿cuál es la medida del (los) ángulo(s) mayor(es) del triángulo? ¿Cuál es la medida del (los) ángulo(s) menor(es) del triángulo?
22. Uno de los ángulos de un triángulo isósceles mide 96°. ¿Cuál es la medida del (los) ángulo(s) mayor(es) del triángulo? ¿Cuál es la medida del (los) ángulo(s) menor(es) del triángulo?

23. La NASA en Huntsville, Alabama (en el punto H), ha solicitado a un fabricante partes que necesita tan pronto como sea posible. De hecho, la NASA enviará a un mensajero por el equipo necesario. El fabricante tiene dos centros de distribución localizados cerca de Tennessee, uno en Nashville (en el punto *N*) y el otro en Jackson (en el punto *J*). Use las mediciones de los ángulos indicados en el mapa adjunto para determinar a qué pueblo se deberá enviar al mensajero para obtener las partes que se necesitan.

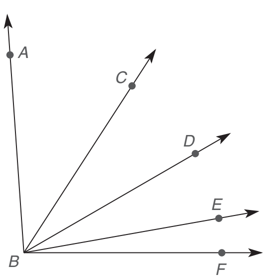


24. Un tornado ha golpeado una pequeña comunidad de Kansas en el punto *T*. Hay unidades de la Cruz Roja estacionadas en Salina (en el punto *S*) y en Wichita (en el punto *W*). Use las mediciones de los ángulos indicados en el mapa adjunto para determinar qué unidad de la Cruz Roja llegará primero con las víctimas. (Suponga que ambas unidades tienen el mismo modo de viajar y carreteras de acceso disponibles.)



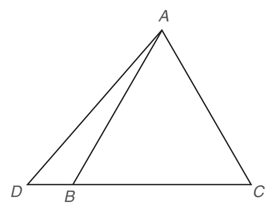
En los ejercicios 25 y 26 termine cada demostración.

25. *Dado:* $m\angle ABC > m\angle DBE$
$m\angle ACD > m\angle EBF$
Demuestre: $m\angle ABD > m\angle DBF$



DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. ?	1. Dado
2. $m\angle ABC + m\angle CBD > m\angle DBE + m\angle EBF$	2. Propiedad de desigualdad de la adición
3. $m\angle ABD = m\angle ABC + m\angle CBD$ y $m\angle DBF = m\angle DBE + m\angle EBF$	3. ?
4. ?	4. Sustitución

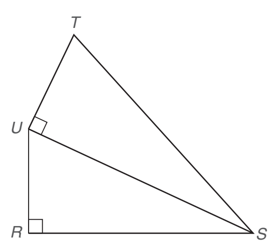
26. *Dado:* $\triangle ABC$ equilátero y D-B-C
Demuestre: $DA > AC$



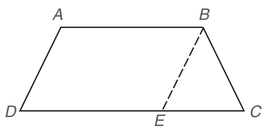
DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. ?	1. Dado
2. $\triangle ABC$ es equiángulo, por lo que $m\angle ABC = m\angle C$	2. ?
3. $m\angle ABC > m\angle D$ ($\angle D$ de $\triangle ABD$)	3. La medida de un $\angle$ exterior de un $\triangle$ es mayor que la medida de cualquier $\angle$ interior no adyacente
4. ?	4. Sustitución
5. ?	5. ?

En los ejercicios 27 y 28 construya las demostraciones.

27. *Dado*: Cuadrilátero *RSTU* con diagonal $\overline{US}$
$\angle R$ y $\angle TUS$ son $\angle$s rectos.
Demuestre: $TS > UR$



28. *Dado:* Cuadrilátero $ABCD$ con $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.
Demuestre: $DC > AB$



29. Para $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ (que no se muestran), suponga que $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ pero que $m\angle A < m\angle D$. Deduzca una conclusión de acuerdo con las longitudes de $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$.

30. En el $\triangle MNP$ (que no se muestra), el punto Q se encuentra en $\overline{NP}$ de tal manera que $\overrightarrow{MQ}$ biseca al $\angle NMP$. Si $MN < MP$, deduzca una conclusión acerca de las longitudes relativas de $\overline{NQ}$ y $\overline{QP}$.

En los ejercicios 31 al 34 aplique una forma del teorema 3.5.10.

31. Los lados de un triángulo tienen longitudes de 4, 6 y x. Escriba una desigualdad que enuncie los valores posibles de x.

32. Los lados de un triángulo tienen longitudes de 7, 13 y x. Como en el ejercicio 31, escriba una desigualdad que describa los posibles valores de x.

33. Si las longitudes de dos lados de un triángulo están representadas por $2x + 5$ y $3x + 7$ (en las que x es positivo), describa en términos de x las longitudes posibles del tercer lado cuya longitud está representada por y.

34. Demuestre por el método indirecto: "La longitud de una diagonal de un cuadrado no es igual a la longitud de cualquiera de los lados del cuadrado".

35. Demuestre por el método indirecto:
Dado: $\triangle MPN$ no es isósceles
Demuestre: $PM \neq PN$

36. Demuestre por el método indirecto:
Dado: $\triangle XYZ$ escaleno en el que $\overline{ZW}$ biseca al $\angle XYZ$ (el punto W se encuentra sobre $\overline{XY}$).
Demuestre: $\overline{ZW}$ no es perpendicular a $\overline{XY}$.

En los ejercicios 37 y 38 demuestre cada teorema.

37. La longitud de la mediana desde el vértice de un triángulo isósceles es menor que la longitud de cualquiera de los catetos.

38. La longitud de una altura de un triángulo agudo es menor que la longitud de cualquier lado que contenga el mismo vértice que la altura.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

Bosquejo de Arquímedes

Mientras Euclides (vea Perspectiva histórica, capítulo 2) fue un gran profesor y escribió de tal manera que la mayoría podía comprender los principios de la geometría, Arquímedes sólo escribió para los matemáticos y científicos bien preparados de sus días. Arquímedes (287-212 a.C) escribió sobre temas tales como la medida del círculo, la cuadratura de la parábola y espirales. Encontró en sus trabajos una muy buena aproximación de π. Sus otros trabajos geométricos incluyen investigaciones de secciones cónicas y espirales, y también escribió acerca de física. Fue un gran inventor y es probable que sea más recordado por sus invenciones que por sus escritos.

Varios eventos históricos concernientes a la vida de Arquímedes han sido sustentados y uno de ellos se refiere a que desenmascaró a un orfebre deshonesto. En aquella ocasión Arquímedes fue llamado para determinar si la corona que había sido ordenada por el rey estaba elaborada de oro puro. Al aplicar el principio de la hidrostática (descubierto por él mismo), Arquímedes estableció que el orfebre no había elaborado la corona enteramente de oro (el principio de la hidrostática establece que un objeto sumergido total o parcialmente en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del fluido que desaloja).

Uno de sus inventos se conoce como tornillo de Arquímedes. El dispositivo permite que el agua fluya de un nivel a otro más alto, de tal manera que, por ejemplo, las bodegas de los barcos pueden desalojar el agua. El tornillo de Arquímedes se utilizó en Egipto para drenar campos cuando el río Nilo desbordaba sus márgenes.

Cuando Siracusa (ciudad donde vivía Arquímedes) cayó bajo el asedio de los romanos, Arquímedes diseñó una catapulta de largo alcance tan efectiva que la ciudad fue capaz de repeler durante tres años la poderosa armada romana antes de ser vencida.

Hay un reporte relacionado con la inventiva de Arquímedes que se dice que es falso, ya que su resultado no ha sido reproducido. Se dice que diseñó un muro de espejos que podía enfocar y reflejar el calor del sol con tal intensidad que podía incendiar los barcos romanos en el mar. Experimentos recientes con espejos cóncavos han fallado en reproducir un calor de tal intensidad, por lo que la anécdota es difícil de creer.

Arquímedes finalmente murió a manos de un soldado romano, aun cuando la armada romana había dado órdenes de no lastimarlo. Después de su muerte, los romanos honraron su gran ingenio con un enorme monumento que mostraba la figura de una esfera inscrita en un cilindro circular recto.

PERSPECTIVA DE APLICACIÓN

Triángulo de Pascal

Blaise Pascal (1623-1662) fue un matemático francés que contribuyó a varias áreas de las matemáticas, incluyendo secciones cónicas, cálculo y la invención de una máquina calculadora. Pero el nombre de Pascal se asocia con más frecuencia con el arreglo de números conocido como triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Cada fila de entradas en el triángulo de Pascal comienza y finaliza con el número 1. Las entradas intermedias en cada fila se encuentran por la adición de las entradas superior izquierda y superior derecha de la fila correspondiente. La siguiente fila tiene la forma

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & \downarrow & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \swarrow\downarrow & \\ 1 & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Las aplicaciones del triángulo de Pascal incluyen el conteo de subconjuntos de un conjunto dado que se considera en el siguiente párrafo. Aunque no se persigue este concepto, el triángulo de Pascal también es de utilidad en el desarrollo algebraico de un binomio a una potencia, como $(a + b)^2$, que es igual a $a^2 + 2ab + b^2$. Observe que los multiplicadores en el producto encontrado con exponente 2 son 1 2 1, de una fila del triángulo de Pascal. En efecto el desarrollo de $(a + b)^3$ conduce a $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, en donde los multiplicadores (también conocidos como coeficientes) toman la forma 1 3 3 1, una fila del triángulo de Pascal.

Subconjuntos de un conjunto dado

Un subconjunto de un conjunto dado es un conjunto formado de elecciones de elementos del conjunto dado. Ya que un subconjunto de un conjunto con n elementos puede tener de 0 a n elementos, se encuentra que el triángulo de Pascal proporciona un conteo del número de subconjuntos que contienen un número de elementos dado.

Triángulo de Pascal	Conjunto	Número de elementos	Subconjuntos del conjunto	Número de subconjuntos
1	$\varnothing$	0	$\varnothing$	1
1 1	{a}	1	$\varnothing$, {a} 1 + 1 subconjuntos	2
1 2 1	{a, b}	2	$\varnothing$, {a}, {b}, {a, b} 1 + 2 + 1 subconjuntos	4
1 3 3 1	{a, b, c}	3	$\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} 1 + 3 + 3 + 1 subconjuntos	8

1 subconjunto de 0 elementos, **3** subconjuntos de 1 elemento cada uno, **3** subconjuntos de 2 elementos cada uno, **1** subconjunto de 3 elementos

En álgebra se demuestra que $2^0 = 1$; no por coincidencia, el conjunto $\varnothing$, que tiene 0 elementos, tiene 1 subconjunto. Del mismo modo, $2^1 = 2$, el conjunto $\{a\}$ que tiene un elemento, tiene 2 subconjuntos. El patrón continúa de tal manera que un conjunto con 2 elementos tiene $2^2 = 4$ subconjuntos y un conjunto con 3 elementos tiene $2^3 = 8$ subconjuntos.
Un examen rápido sugiere el siguiente hecho:

> El número total de subconjuntos para un conjunto de n elementos es 2^n.

Las entradas de la quinta fila del triángulo de Pascal corresponden al número de subconjuntos del conjunto de cuatro elementos $\{a, b, c, d\}$; por supuesto, los subconjuntos de $\{a, b, c, d\}$ deben tener 0 elementos, 1 elemento cada uno, 2 elementos cada uno, 3 elementos cada uno, o 4 elementos cada uno. Con base en el principio anterior habrá un total de $2^4 = 16$ subconjuntos para $\{a, b, c, d\}$.

EJEMPLO 1

Liste todos los 16 subconjuntos del conjunto $\{a, b, c, d\}$ considerando la quinta fila del triángulo de Pascal, a saber 1 4 6 4 1. También observe que $1 + 4 + 6 + 4 + 1$ debe ser igual a 16.

Solución $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$. ■

EJEMPLO 2

Encuentre el número de subconjuntos para un conjunto con 6 elementos.

Solución El número de subconjuntos es 2^6 o 64. ■

Revisando el ejemplo 1 se observa que el número de subconjuntos del conjunto con cuatro elementos $\{a, b, c, d\}$ es $1 + 4 + 6 + 4 + 1$, que es igual a 16 o 2^4. El principio anterior puede reescribirse de la siguiente forma equivalente:

> La suma de las entradas en la fila n del triángulo de Pascal es 2^{n-1}

EJEMPLO 3

La sexta fila del triángulo de Pascal es 1 5 10 10 5 1. Utilice el principio anterior para encontrar la suma de las entradas de esta fila.

Solución Cuando $n = 6$, se tiene que $n - 1 = 5$. Entonces $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5$ o 32. ■

NOTA: Hay 32 subconjuntos para un conjunto que contiene cinco elementos; considere $\{a, b, c, d, e\}$.

Para concluir ¡observe que varios de los principios basados en el triángulo de Pascal no han sido explorados en esta perspectiva de aplicación!

Resumen

UNA VISTA RETROSPECTIVA AL CAPÍTULO 3

En este capítulo se consideraron varios métodos para demostrar la congruencia de triángulos. Se exploraron las propiedades de los triángulos isósceles y se justificaron los métodos de construcción de los capítulos anteriores. También se investigaron las relaciones de desigualdad para los lados y los ángulos de un triángulo.

UNA VISTA PRELIMINAR DEL CAPÍTULO 4

En el siguiente capítulo se utilizarán las propiedades de los triángulos para desarrollar las propiedades de los cuadriláteros. Se considerarán varios tipos especiales de cuadriláteros, incluyendo el paralelogramo, la cometa, el rombo y el trapezoide.

CONCEPTOS CLAVE

3.1
Triángulos congruentes • LLL, LAL, ALA, AAL • Ángulo incluido, lado incluido • Propiedad de congruencia reflexiva (identidad) • Propiedades de congruencia simétrica y transitiva

3.2
PCTCC • Hipotenusa y catetos de un triángulo rectángulo • HC • Teorema de Pitágoras • Propiedad de las raíces cuadradas

3.3
Triángulo isósceles • Vértice, catetos y base de un triángulo isósceles • Ángulos de la base • Ángulo del vértice • Bisector de ángulo • Mediana • Altura • Bisector perpendicular • Recta auxiliar • Determinado, indeterminado, sobredeterminado • Triángulos equiláteros y equiángulos • Perímetro

3.4
Justificación de construcciones

3.5
Lema • Desigualdad de lados y ángulos de un triángulo • Desigualdad del triángulo

TABLA 3.2 Una vista general del capítulo 3

▶ Métodos de demostración de triángulos congruentes: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

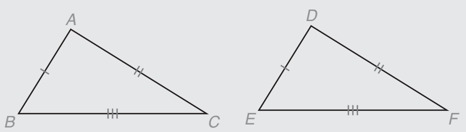
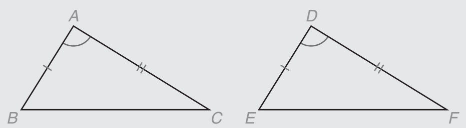
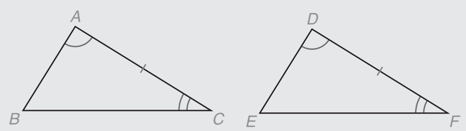
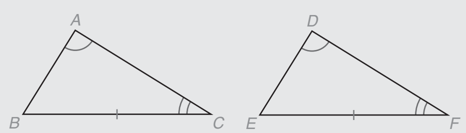
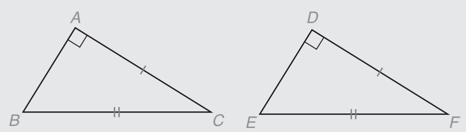
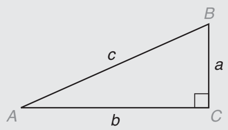
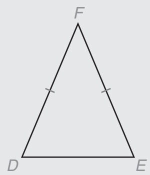
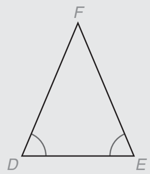
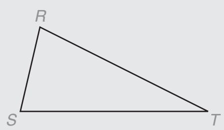
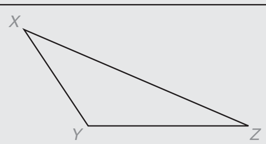
FIGURAS (NOTAS DE MARCAS)	MÉTODO	PASOS NECESARIOS PARA LA DEMOSTRACIÓN
	LLL	$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
	LAL	$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$, y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$
	ALA	$\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, y $\angle C \cong \angle F$
	AAL	$\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$, y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
	HC	$\angle A$ y $\angle D$ son $\angle$s rectos, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

TABLA 3.2 (continúa)

Relaciones especiales

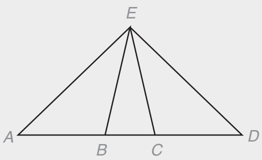
FIGURA	RELACIÓN	CONCLUSIÓN
	Teorema de Pitágoras	$c^2 = a^2 + b^2$
	$\overline{DF} \cong \overline{EF}$ (dos lados $\cong$)	$\angle E \cong \angle D$ (los $\angle$s opuestos son $\cong$)
	$\angle D \cong \angle E$ (dos ángulos $\cong$)	$\overline{EF} \cong \overline{DF}$ (los lados opuestos son $\cong$)

Relaciones de desigualdad de un triángulo

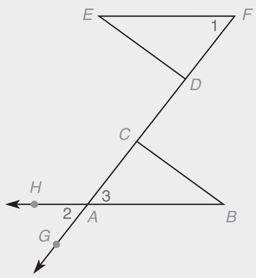
FIGURA	RELACIÓN	CONCLUSIÓN
	$ST > RS$	$m\angle R > m\angle T$ (ángulos opuestos)
	$m\angle Y > m\angle X$	$XZ > YZ$ (lados opuestos)

Capítulo 3 EJERCICIOS DE REPASO

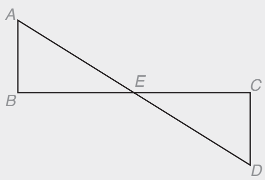
1. *Dado:* $\angle AEB \cong \angle DEC$
$\overline{AE} \cong \overline{ED}$
Demuestre: $\triangle AEB \cong \triangle DEC$



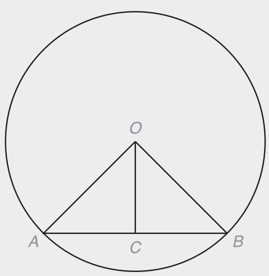
2. *Dado:* $\overline{AB} \cong \overline{EF}$
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$
$\angle 1 \cong \angle 2$
Demuestre: $\angle B \cong \angle E$



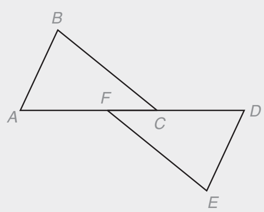
3. *Dado:* $\overline{AD}$ biseca a $\overline{BC}$
$\overline{AB} \perp \overline{BC}$
$\overline{DC} \perp \overline{BC}$
Demuestre: $\overline{AE} \cong \overline{ED}$



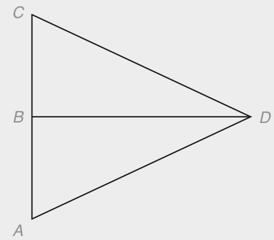
4. *Dado:* $\overline{OA} \cong \overline{OB}$
$\overline{OC}$ es la mediana hacia $\overline{AB}$
Demuestre: $\overline{OC} \perp \overline{AB}$



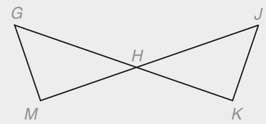
5. *Dado:* $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$
Demuestre: $\overline{BC} \parallel \overline{FE}$



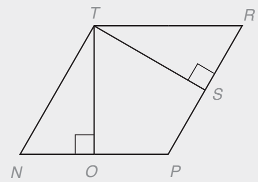
6. *Dado:* B es el punto medio de $\overline{AC}$
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$
Demuestre: $\triangle ADC$ es isósceles



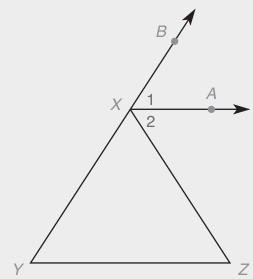
7. *Dado:* $\overline{JM} \perp \overline{GM}$ y $\overline{GK} \perp \overline{KJ}$
$\overline{GH} \cong \overline{HJ}$
Demuestre: $\overline{GM} \cong \overline{JK}$



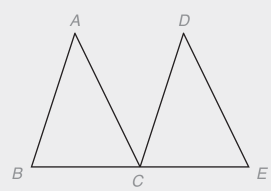
8. *Dado:* $\overline{TN} \cong \overline{TR}$
$\overline{TO} \perp \overline{NP}$
$\overline{TS} \perp \overline{PR}$
$\overline{TO} \cong \overline{TS}$
Demuestre: $\angle N \cong \angle R$



9. *Dado:* $\overline{YZ}$ es la base de un triángulo isósceles;
$\overrightarrow{XA} \parallel \overline{YZ}$
Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 2$

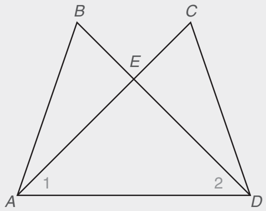


10. *Dado:* $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
$\overline{AB} \cong \overline{DC}$
C es el punto medio de $\overline{BE}$
Demuestre: $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$



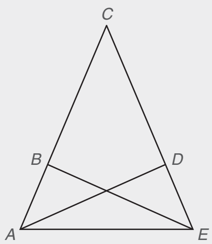
11. *Dado:* $\angle BAD \cong \angle CDA$
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$
Demuestre: $\overline{AE} \cong \overline{ED}$

(SUGERENCIA: Demuestre primero que $\triangle BAD \cong \triangle CDA$.)



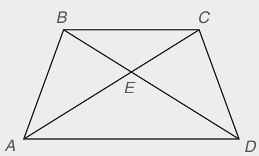
12. *Dado:* $\overline{BE}$ es la altura hasta $\overline{AC}$
$\overline{AD}$ es la altura hasta $\overline{CE}$
$\overline{BC} \cong \overline{CD}$
Demuestre: $\overline{BE} \cong \overline{AD}$

(SUGERENCIA: Demuestre $\triangle CBE \cong \triangle CDA$.)

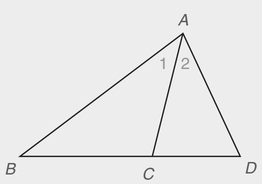


13. *Dado:* $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
$\angle BAD \cong \angle CDA$
Demuestre: $\triangle AED$ es isósceles

(SUGERENCIA: Demuestre $\angle CAD \cong \angle BDA$ por PCTCC.)



14. *Dado:* $\overrightarrow{AC}$ biseca al $\angle BAD$
Demuestre: $AD > CD$



15. En $\triangle PQR$ (que no se muestra), $m\angle P = 67°$ y $m\angle Q = 23°$.

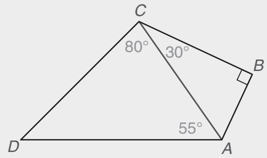
a) Nombre el lado más corto.

b) Nombre el lado más largo.

16. En $\triangle ABC$ (que no se muestra), $m\angle A = 40°$ y $m\angle B = 65°$. Liste los lados de acuerdo con sus longitudes, comience con el lado más corto.

17. En $\triangle PQR$ (que no se muestra), $PQ = 1.5$, $PR = 2$ y $QR = 2.5$. Liste los ángulos de acuerdo con su tamaño, comience con el ángulo más pequeño.

18. Nombre el segmento de recta más largo del cuadrilátero $ABCD$.



19. ¿Cuáles de las siguientes pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo?

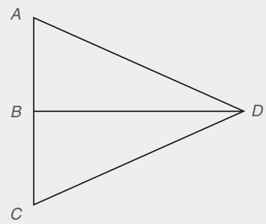
a) 3, 6, 9

b) 4, 5, 8

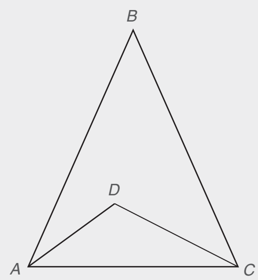
c) 2, 3, 8

20. Dos lados de un triángulo tienen longitudes 15 y 20. La longitud del tercer lado puede ser cualquier número entre __?__ y __?__.

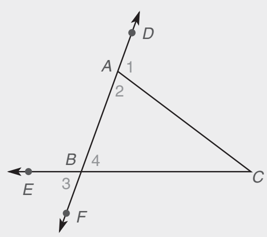
21. *Dado:* $\overline{DB} \perp \overline{AC}$
$\overline{AD} \cong \overline{DC}$
$m\angle C = 70°$
Encuentre: $m\angle ADB$



22. *Dado:* $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$\angle DAC \cong \angle BCD$
$m\angle B = 50°$
Encuentre: $m\angle ADC$



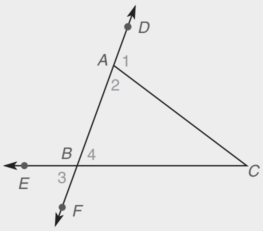
23. *Dado:* $\triangle ABC$ es isósceles con base $\overline{AB}$
$m\angle 2 = 3x + 10$
$m\angle 4 = \frac{5}{2}x + 18$
Encuentre: $m\angle C$



Ejercicios 23-24

24. *Dado:* $\triangle ABC$ con perímetro 40
$AB = 10$
$BC = x + 6$
$AC = 2x - 3$
Encuentre: Si $\triangle ABC$ es escaleno, isósceles o equilátero

25. *Dado*: $\triangle ABC$ es isósceles con base $\overline{AB}$
$AB = y + 7$
$BC = 3y + 5$
$AC = 9 - y$
Encuentre: Si $\triangle ABC$ también es equilátero

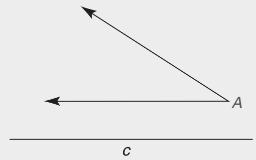


Ejercicios 25-26

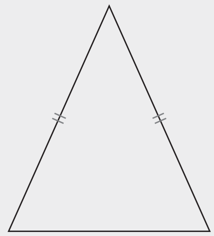
26. *Dado*: $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los catetos del $\triangle ABC$ isósceles
$m\angle 1 = 5x$
$m\angle 3 = 2x + 12$
Encuentre: $m\angle 2$

27. Construya un ángulo que mida 75°.

28. Construya un triángulo rectángulo que tenga un ángulo agudo A e hipotenusa de longitud c.



29. Construya un segundo triángulo isósceles en el que los ángulos de la base midan la mitad de lo que miden los ángulos de la base del triángulo isósceles dado.

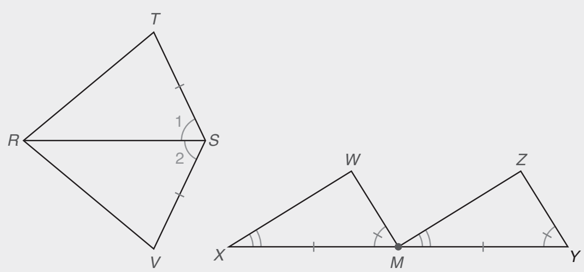


Capítulo 3 EXAMEN

1. Está dado que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (triángulos que no se muestran).
a) Si $m\angle A = 37°$ y $m\angle E = 68°$, encuentre $m\angle F$. _____
b) Si $AB = 7.3$ cm, $BC = 4.7$ cm y $AC = 6.3$ cm, encuentre EF. _____

2. Considere el $\triangle XYZ$ (que no se muestra).
a) ¿Qué lado está incluido por $\angle X$ y $\angle Y$? ___
b) ¿Qué ángulo está incluido por los lados $\overline{XY}$ y $\overline{YZ}$? ___

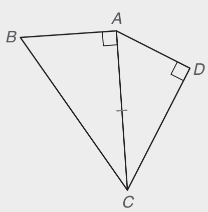
3. Enuncie la razón (LLL, LAL, ALA, AAL o HC) por la cual los triángulos son congruentes. Observe las marcas que indican las partes congruentes.

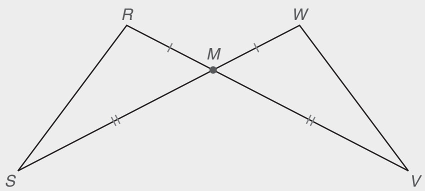


$\triangle RVS \cong \triangle RTS$_____ $\triangle XMW \cong \triangle MYZ$ _____.

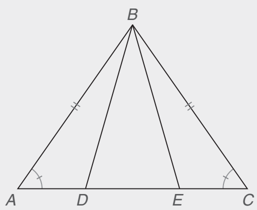
4. Escriba el enunciado que esté representado por el acrónimo PCTCC. _____________

5. Con las partes congruentes marcadas, ¿son congruentes los dos triángulos? Responda SÍ o NO
$\triangle ABC$ y $\triangle DAC$ _____
$\triangle RSM$ y $\triangle WVM$ _____



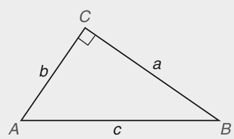


6. Con $\triangle ABD \cong \triangle CBE$ y A-D-E-C, ¿se deduce necesariamente que $\triangle AEB$ y $\triangle CDB$ son congruentes?
Responda SÍ o NO. _______

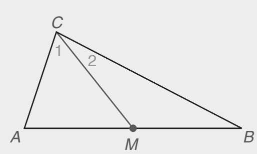


$\triangle ABD \cong \triangle CBE$

7. En $\triangle ABC$, $m\angle C = 90°$. Encuentre:
a) c si $a = 8$ y $b = 6$ ___
b) b si $a = 6$ y $c = 8$ ___



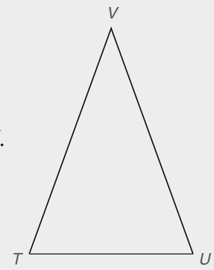
8. $\overline{CM}$ es la mediana de $\triangle ABC$ desde el vértice C hasta el lado $\overline{AB}$.
a) Nombre dos segmentos de recta que deben ser congruentes. _______
b) ¿Es $\angle 1$ necesariamente congruente con $\angle 2$? ____



9. En $\triangle TUV$, $\overline{TV} \cong \overline{UV}$.

a) Si $m\angle T = 71°$, encuentre $m\angle V$. _______.

b) Si $m\angle T = 7x + 2$ y $m\angle U = 9(x - 2)$, encuentre $m\angle V$. _______.



Ejercicios 9-10

10. En $\triangle TUV$, $\angle T \cong \angle U$.

a) Si $VT = 7.6$ pulgadas y $TU = 4.3$ pulgadas, encuentre VU._____

b) Si $VT = 4x + 1$, $TU = 2x$ y $VU = 6x - 10$, encuentre el perímetro de $\triangle TUV$._____

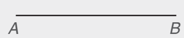
(SUGERENCIA: Encuentre el valor de x.)

11. Muestre todos los arcos en la siguiente construcción.

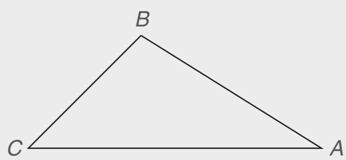
a) Construya un ángulo que mida 60°.

b) Use el resultado del inciso (a) para construir un ángulo que mida 30°.

12. Muestre todos los arcos en la siguiente construcción. Construya un triángulo rectángulo isósceles en el que cada cateto tenga la longitud del segmento de recta $\overline{AB}$.



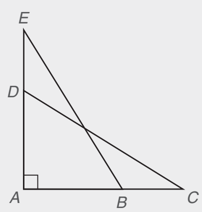
13. En $\triangle ABC$, $m\angle C = 46°$ y $m\angle B = 93°$



a) Nombre el lado más corto de $\triangle ABC$. _____

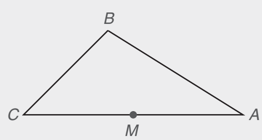
b) Nombre el lado más largo de $\triangle ABC$. ____

14. En $\triangle TUV$ (que no se muestra), $TU > TV > VU$. Escriba una desigualdad de tres partes que compare las medidas de los tres ángulos de $\triangle TUV$. _____



15. En la figura, $\angle A$ es un ángulo recto, $AD = 4$, $DE = 3$, $AB = 5$ y $BC = 2$. De los dos segmentos de recta $\overline{DC}$ y $\overline{EB}$, ¿cuál es más largo? _______

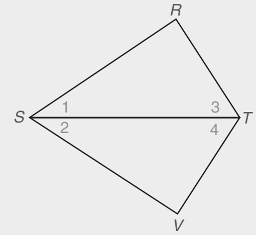
16. Dado $\triangle ABC$, dibuje el triángulo que resulta cuando $\triangle ABC$ rota en el sentido de las manecillas del reloj 180° alrededor de M, el punto medio de $\overline{AC}$. Sea D el nombre de la imagen del punto B. En estos triángulos congruentes, ¿cuál lado de $\triangle CDA$ corresponde al lado $\overline{BC}$ de $\triangle ABC$? _____



17. Complete *todos* los enunciados y las razones para el siguiente problema de demostración.

Dado: $\angle R$ y $\angle V$ son ángulos rectos; $\angle 1 \cong \angle 2$

Demuestre: $\triangle RST \cong \triangle VST$

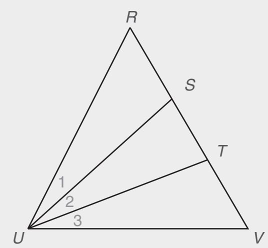


Enunciados	Razones

18. Complete los enunciados y las razones que faltan en la siguiente demostración.

Dado: $\triangle RUV$; $\angle R \cong \angle V$ y $\angle 1 \cong \angle 3$

Demuestre: $\triangle STU$ es un triángulo isósceles



Enunciados	Razones
1. $\triangle RUV$; $\angle R \cong \angle V$	1. ________________
2. $\therefore \overline{UV} \cong \overline{UR}$	2. ________________
3. ________________	3. Dado
4. $\triangle RSU \cong \triangle VTU$	4. ________________
5. ________________	5. PCTCC
6. ________________	4. Si dos lados de un $\triangle$ son $\cong$, este triángulo es isósceles.

19. El perímetro de un triángulo isósceles es de 32 cm. Si la longitud de la altura trazada desde la base es 8 cm, ¿qué longitud tiene cada cateto del triángulo isósceles? ____

Capítulo 4

Cuadriláteros

© Edwin Verin/Dreamstime.

CONTENIDO

Hay un DVD disponible que cuenta con un video con explicación de conceptos, problemas de ejemplo y aplicaciones. Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

¡Reconfortante! Diseñada por el arquitecto Frank Lloyd Wright (1867-1959), esta propiedad está anidada entre árboles en la Bear Run Nature Preserve en el suroeste de Pennsylvania. Conocida como la Casa de la Cascada, fue construida en la década de 1930. La figura geométrica que domina en las casas diseñadas por Wright es el cuadrilátero. En este capítulo se consideran numerosos tipos de cuadriláteros, entre ellos el paralelogramo, el rombo y el trapezoide. Además, se desarrollan el lenguaje y las propiedades para cada tipo de cuadrilátero. Si bien cada cuadrilátero tiene sus propias propiedades, algunas de las aplicaciones para el trapezoide se encuentran en los ejercicios 37-40 de la sección 4.4.

4.1 Propiedades de un paralelogramo

CONCEPTOS CLAVE

- Cuadrilátero
- Cuadrilátero oblicuo
- Paralelogramo
- Diagonales de un paralelogramo
- Alturas de un paralelogramo

Un **cuadrilátero** es un polígono que tiene cuatro lados. A menos que se establezca lo contrario, el término *cuadrilátero* se refiere a una figura como la $ABCD$ en la figura 4.1(a), en que los lados de segmentos de rectas se encuentran en un solo plano. Cuando los lados de un cuadrilátero no son coplanares, como en $MNPQ$ en la figura 4.1(b), se dice que el cuadrilátero es **oblicuo**. Por tanto, $MNPQ$ es un cuadrilátero oblicuo. En este libro por lo general consideramos cuadriláteros cuyos lados son coplanares.

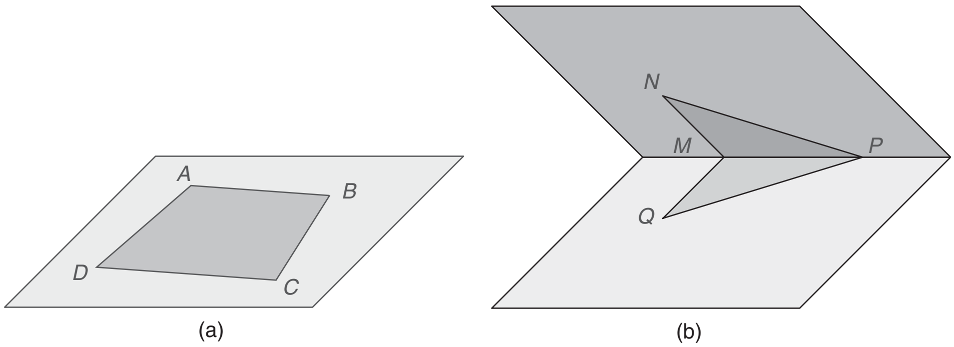


Figura 4.1

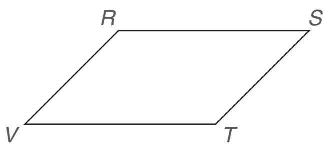


Figura 4.2

DEFINICIÓN

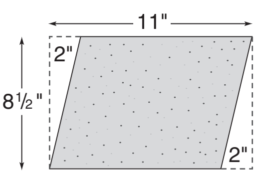
Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el que los dos pares de lados opuestos son paralelos. (Vea la figura 4.2.)

Dado que el símbolo para un paralelogramo es ▱, el cuadrilátero en la figura 4.2 es ▱$RSTV$. El conjunto $P = \{\text{paralelogramos}\}$ es un subconjunto de $Q = \{\text{cuadriláteros}\}$.

La actividad Descubra de la izquierda conduce a muchos de los teoremas de esta sección.

Descubra

Tome una hoja de papel común y recorte un paralelogramo como se muestra. Luego corte una diagonal. ¿Cómo están relacionados los dos triángulos que se forman?



RESPUESTA

Son congruentes.

EJEMPLO 1

Dé una demostración formal del teorema 4.1.1.

TEOREMA 4.1.1

Una diagonal de un paralelogramo lo separa en dos triángulos congruentes.

DADO: ▱$ABCD$ con diagonal $\overline{AC}$ (Vea la figura 4.3 en la página 179.)

DEMUESTRE: $\triangle ACD \cong \triangle CAB$

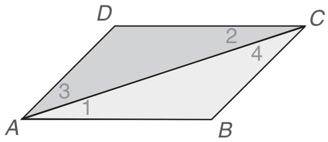


Figura 4.3

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\square ABCD$	1. Dado
2. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	2. Los lados opuestos de un $\square$ son $\parallel$ (definición)
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, los $\angle$s alternos internos son congruentes
4. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	4. Misma razón que 2
5. $\angle 3 \cong \angle 4$	5. Misma razón que 3
6. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	6. Identidad
7. $\triangle ACD \cong \triangle CAB$	7. ALA

■

Recuerde

La suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Uso de ángulos congruentes

Regla general: Para demostrar que las partes de un cuadrilátero son congruentes a menudo se utiliza una recta auxiliar para demostrar que los triángulos son congruentes. Luego se aplica PCTCC.

Ilustración: Esta estrategia se emplea en la demostración de los corolarios 4.1.2 y 4.1.3. En la demostración del corolario 4.1.4 no se necesita la recta auxiliar.

COROLARIO 4.1.2

Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

COROLARIO 4.1.3

Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

COROLARIO 4.1.4

Las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

Recuerde el teorema 2.1.4: "Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos internos en el mismo lado de la transversal son suplementarios." A continuación se enuncia un corolario de ese teorema.

GEE

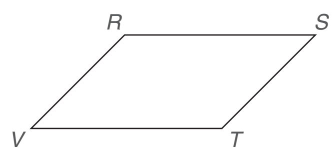
Ejercicios 1-6

COROLARIO 4.1.5

Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.

EJEMPLO 2

En el $\square RSTV$, $m\angle S = 42°$, $ST = 5.3$ cm y $VT = 8.1$ cm. Encuentre:



a) $m\angle V$ b) $m\angle T$ c) RV d) RS

Solución

a) $m\angle V = 42°$; $\angle V \cong \angle S$
porque estos $\angle$s son opuestos del $\square RSTV$.

b) $m\angle T = 138°$; $\angle T$ y $\angle S$ son suplementarios ya que estos ángulos son ángulos consecutivos del ▱$RSTV$.
c) $RV = 5.3$ cm; $\overline{RV} \cong \overline{ST}$ ya que éstos son lados opuestos del ▱$RSTV$.
d) $RS = 8.1$ cm; $\overline{RS} \cong \overline{VT}$, también un par de lados opuestos del ▱$RSTV$. ■

En el ejemplo 3 se ilustra el teorema 4.1.6; es decir, que dos rectas paralelas son equidistantes dondequiera. En general, la frase *la distancia entre dos rectas paralelas* se refiere a la longitud del segmento perpendicular entre dos rectas paralelas. Estos conceptos darán una idea de la definición de altura de un paralelogramo.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Separación de la información dada

Regla general: Cuando la única parte de la información "Dada" conduce a una conclusión importante, se puede separar (para dar énfasis) de los otros hechos Dados en los enunciados de la demostración.

Ilustración: Vea los renglones 1 y 2 en la demostración del ejemplo 3. Observe que los hechos Dados que se encuentran en el enunciado 2 conducen al enunciado 3.

TEOREMA 4.1.6

Dos rectas paralelas son equidistantes dondequiera.

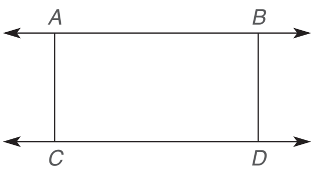


Figura 4.4

EJEMPLO 3

DADO: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$
$\overline{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$ y $\overline{BD} \perp \overleftrightarrow{CD}$
(Vea la figura 4.4.)

DEMUESTRE: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

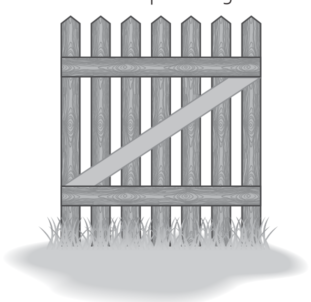
DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	1. Dado
2. $\overline{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$ y $\overline{BD} \perp \overleftrightarrow{CD}$	2. Dado
3. $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$	3. Si dos rectas son $\perp$ a la misma recta, son paralelas
4. $ABDC$ es un ▱	4. Si ambos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son $\parallel$, el cuadrilátero es un ▱
5. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	5. Lados opuestos de un ▱ son congruentes

■

Geometría en el mundo real

El refuerzo central para la puerta mostrada es un paralelogramo.



En el ejemplo 3 se utilizó la definición de un paralelogramo para comprobar que un cuadrilátero particular es un paralelogramo, pero existen otras formas de establecer que un cuadrilátero dado es un paralelogramo. En la sección 4.2 se investigan estos métodos.

DEFINICIÓN

La **altura** de un paralelogramo es un segmento de recta desde un vértice que es perpendicular a un lado no adyacente (o a una extensión de ese lado).

GEE

Ejercicios 7-11

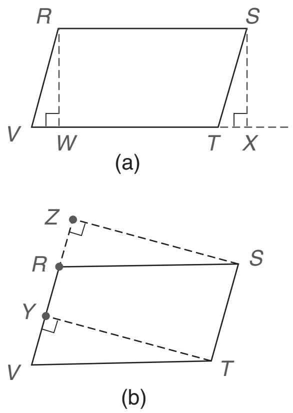


Figura 4.5

Para el $\square RSTV$, $\overline{RW}$ y $\overline{SX}$ son alturas para el lado $\overline{VT}$ (o para el lado $\overline{RS}$), como se muestra en la figura 4.5(a). Respecto al lado $\overline{RS}$, algunas veces denominado base $\overline{RS}$, la longitud RW (o SX) es la *altura* de $RSTV$. De manera similar, en la figura 4.5(b), $\overline{TY}$ y $\overline{SZ}$ son alturas para el lado $\overline{RV}$ (o para el lado $\overline{ST}$). Además, la longitud TY (o ZS) se denomina *altura* del paralelogramo $RSTV$ respecto al lado $\overline{ST}$ (o $\overline{RV}$).

En seguida se considera una relación de desigualdad para el paralelogramo. Para desarrollar esta relación se necesita investigar una desigualdad que comprenda dos triángulos.

En el $\triangle ABC$ y en el $\triangle DEF$ de la figura 4.6, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. Si $m\angle B > m\angle E$, entonces $AC > DF$.

Se utilizará, pero no se demostrará, la siguiente relación que se encuentra en el lema 4.1.7.

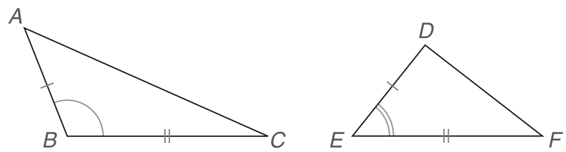


Figura 4.6

DADO: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$; $m\angle B > m\angle E$ (Vea la figura 4.6.)

DEMUESTRE: $AC > DF$

El siguiente es el lema correspondiente.

LEMA 4.1.7

Si dos lados de un triángulo son congruentes con dos lados de un segundo triángulo, y el ángulo incluido del primer triángulo es mayor que el ángulo incluido del segundo, entonces la longitud del lado opuesto al ángulo incluido del primer triángulo es mayor que la longitud del lado opuesto al ángulo incluido del segundo.

Descubra

En una hoja de papel trace un triángulo ($\triangle ABC$) de manera que $AB = 3$, $BC = 5$ y $m\angle B = 110°$. Luego trace $\triangle DEF$, en el cual $DE = 3$, $EF = 5$ y $m\angle E = 50°$. ¿Cuál es mayor, $\overline{AC}$ o $\overline{DF}$?

RESPUESTA

$\overline{AC}$

Ahora se pueden comparar las longitudes de las diagonales de un paralelogramo. Para un paralelogramo que no tiene ángulos rectos, dos ángulos consecutivos son desiguales pero suplementarios; por tanto, un ángulo del paralelogramo será agudo y el ángulo consecutivo será obtuso. En la figura 4.7(a), el $\square ABCD$ tiene un ángulo agudo A y un ángulo obtuso D. Observe que las longitudes de los dos lados de los triángulos que incluyen $\angle A$ y $\angle D$ son congruentes. En la figura 4.7(b), la diagonal $\overline{AC}$ se encuentra opuesta al ángulo obtuso ADC en el $\triangle ACD$ y la diagonal $\overline{BD}$ se encuentra opuesta al ángulo agudo DAB en el $\triangle ABD$. En las figuras 4.7(c) y (d), se tomaron el $\triangle ACD$ y el $\triangle ABD$ del $\square ABCD$ de la figura 4.7(b). Observe que $\overline{AC}$ (opuesto al $\angle D$ obtuso) es mayor que $\overline{DB}$ (opuesto al $\angle A$ agudo).

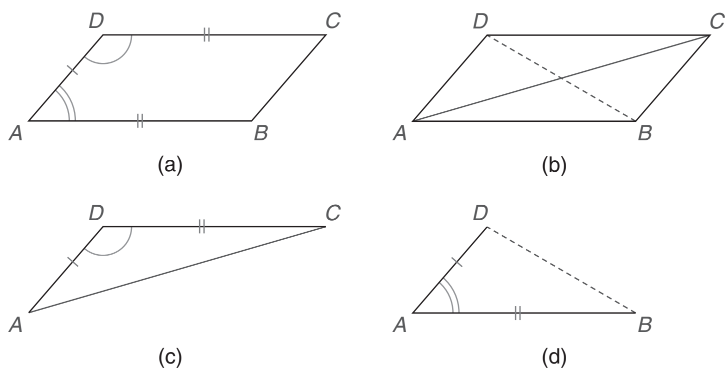


Figura 4.7

Descubra

Trace el $\square ABCD$ de manera que $m\angle A > m\angle B$. ¿Cuál diagonal es mayor?

RESPUESTA

$\overline{BD}$

Con base en el lema 4.1.7 y en el análisis anterior, se tiene el teorema siguiente.

TEOREMA 4.1.8

En un paralelogramo con pares de ángulos consecutivos desiguales, la diagonal mayor se encuentra opuesta al ángulo obtuso.

EJEMPLO 4

En el paralelogramo $RSTV$ (no se muestra), $m\angle R = 67°$.

a) Encuentre la medida de $\angle S$.
b) Determine cuál diagonal ($\overline{RT}$ o $\overline{SV}$) tiene la longitud mayor.

Solución

a) $m\angle S = 180° - 67° = 113°$ (el $\angle R$ y el $\angle S$ son suplementarios).
b) Debido a que el $\angle S$ es obtuso la diagonal opuesta a este ángulo es mayor; es decir, $\overline{RT}$ es la diagonal mayor. ■

Para resolver el ejemplo 5 se utiliza un método indirecto.

EJEMPLO 5

En el paralelogramo $ABCD$ (que no se muestra), $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales y $AC > BD$. Determine cuáles ángulos del paralelogramo son obtusos y cuáles son agudos.

Solución Debido a que la diagonal mayor $\overline{AC}$ se encuentra opuesta a los ángulos B y D, estos ángulos son obtusos. Los ángulos restantes A y C son necesariamente agudos. ■

GEE *Ejercicios 12-15*

En el ejemplo siguiente se utiliza álgebra para relacionar los tamaños de los ángulos y las longitudes de las diagonales.

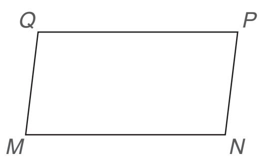


Figura 4.8

EJEMPLO 6

En el $\square MNPQ$ de la figura 4.8, $m\angle M = 2(x + 10)$ y $m\angle Q = 3x - 10$. Determine cuál diagonal será mayor, $\overline{QN}$ o $\overline{MP}$.

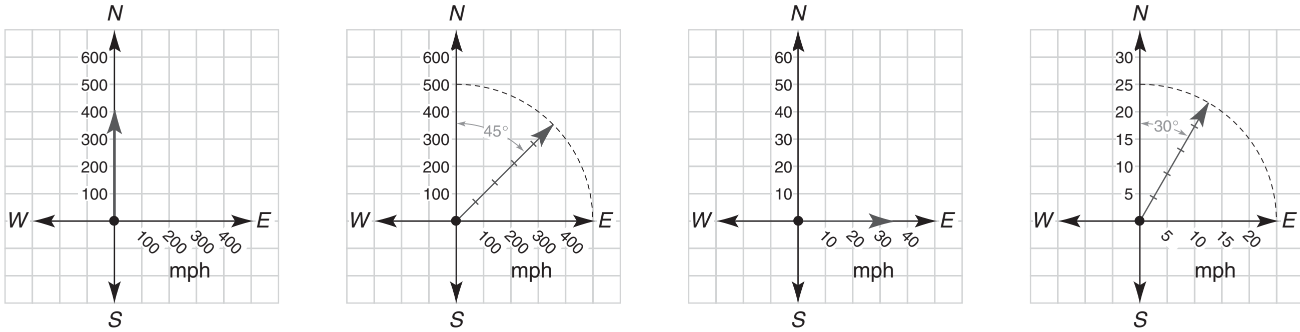
Solución Los ángulos consecutivos M y Q son suplementarios, por tanto $m\angle M + m\angle Q = 180°$.

$$2(x + 10) + (3x - 10) = 180$$
$$2x + 20 + 3x - 10 = 180$$
$$5x + 10 = 180 \rightarrow 5x = 170 \rightarrow x = 34$$

Entonces $m\angle M = 2(34 + 10) = 88°$, en tanto que $m\angle Q = 3(34) - 10 = 92°$. Como $m\angle Q > m\angle M$, la diagonal $\overline{MP}$ ($\angle Q$ opuesto) será mayor que $\overline{QN}$. ■

VELOCIDAD Y DIRECCIÓN DE UN AVIÓN

Para la siguiente aplicación en el ejemplo 7 la velocidad de un avión o la del viento se indican trazando una flecha dirigida. En cada caso se utiliza una escala en una cuadrícula en la cual una recta norte-sur cruza una recta este-oeste en ángulos rectos. Considere los bosquejos en la figura 4.9 de la página 183 y lea las descripciones.



El avión vuela hacia el norte a 400 mph

El avión vuela a 500 mph en dirección 45° NE

El viento sopla a 30 mph en dirección oeste a este

El viento sopla a 25 mph en dirección 30° NE

Figura 4.9

En algunas aplicaciones, como en el ejemplo 7, se puede utilizar un paralelogramo para determinar la solución del problema. Por ejemplo, la ley del paralelogramo permite determinar la rapidez y la dirección resultantes de un avión cuando la velocidad de éste y la del viento se consideran en conjunto. En la figura 4.10 las flechas que representan las dos velocidades están ubicadas de la cabeza a la cola desde el punto de origen. Debido a que el orden de las dos velocidades es reversible, el dibujo conduce a un paralelogramo. En el paralelogramo son la longitud y la dirección las que resuelven el problema. En el ejemplo 7 la exactitud es crítica al escalar y trazar lo que representa el problema. Por otra parte una regla y un transportador darán resultados inaceptables en su respuesta.

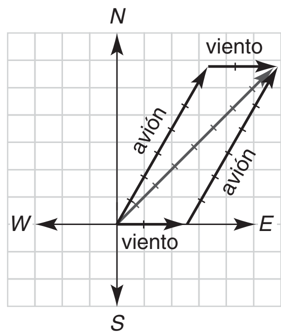


Figura 4.10

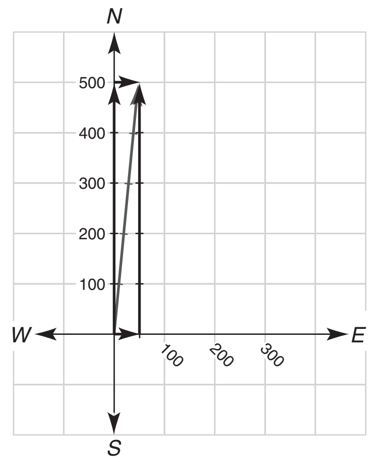


Figura 4.11

NOTA: En el ejemplo 7, kph significa *kilómetros por hora*.

EJEMPLO 7

Un avión vuela hacia el Norte a 500 kph. Si el viento sopla a 50 kph de Oeste a Este, ¿cuáles son la velocidad y la dirección resultantes del avión?

Solución Utilizando una regla para medir la diagonal del paralelogramo se encuentra que la longitud corresponde a una velocidad de aproximadamente 505 kph. Utilizando un transportador se determina que la dirección es aproximadamente 6° NE. (Vea la figura 4.11.)

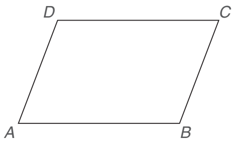
GEE

Ejercicios 16-17

NOTA: La velocidad real es de aproximadamente 502.5 kph en tanto que la dirección es 5.7° NE. ■

Ejercicios 4.1

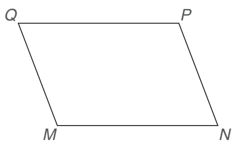
1. *ABCD* es un paralelogramo.
a) Utilizando una regla compare las longitudes de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.
b) Utilizando un transportador compare las medidas de $\angle A$ y $\angle C$.



Ejercicios 1, 2

2. *ABCD* es un paralelogramo.
a) Utilizando una regla compare las longitudes de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.
b) Utilizando un transportador compare las medidas de $\angle B$ y $\angle D$.

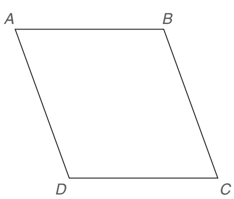
3. *MNPQ* es un paralelogramo. Suponga que $MQ = 5$, $MN = 8$ y $m\angle M = 110°$. Encuentre:
a) QP c) $m\angle Q$
b) NP d) $m\angle P$



Ejercicios 3, 4

4. *MNPQ* es un paralelogramo. Suponga que $MQ = 12.7$, $MN = 17.9$ y $m\angle M = 122°$. Encuentre:
a) QP c) $m\angle Q$
b) NP d) $m\angle P$

5. Dado que $AB = 3x + 2$, $BC = 4x + 1$ y $CD = 5x - 2$, encuentre la longitud de cada lado del $\square ABCD$.



Ejercicios 5-12

6. Dado que $m\angle A = 2x + 3$ y $m\angle C = 3x - 27$ encuentre la medida de cada ángulo del $\square ABCD$.

7. Dado que $m\angle A = 2x + 3$ y $m\angle B = 3x - 23$ encuentre la medida de cada ángulo del $\square ABCD$.

8. Dado que $m\angle A = \frac{2x}{5}$ y $m\angle B = \frac{x}{2}$ encuentre la medida de cada ángulo del $\square ABCD$.

9. Dado que $m\angle A = \frac{2x}{3}$ y $m\angle C = \frac{x}{2} + 20$ encuentre la medida de cada ángulo del $\square ABCD$.

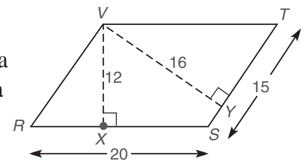
10. Dado que $m\angle A = 2x + y$, $m\angle B = 2x + 3y - 20$ y $m\angle C = 3x - y + 16$, encuentre la medida de cada ángulo del $\square ABCD$.

11. Suponiendo que $m\angle B > m\angle A$ en el $\square ABCD$, ¿cuál diagonal ($\overline{AC}$ o $\overline{BD}$) será mayor?

12. Suponga que se trazan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del $\square ABCD$ y que $AC > BD$. ¿Cuál ángulo ($\angle A$ o $\angle B$) tendrá la medida mayor?

En los ejercicios 13 y 14 considere el $\square RSTV$ con $\overline{VX} \perp \overline{RS}$ y $\overline{VY} \perp \overline{ST}$.

13. a) ¿Cuál segmento de recta es la altura del $\square RSTV$ respecto a la base $\overline{ST}$?
b) ¿Cuál número es la altura del $\square RSTV$ respecto a la base $\overline{ST}$?



Ejercicios 13, 14

14. a) ¿Cuál segmento de recta es la altura del $\square RSTV$ respecto a la base $\overline{RS}$?
b) ¿Cuál número es la altura del $\square RSTV$ respecto a la base $\overline{RS}$?

En los ejercicios 15 al 18 clasifique cada enunciado como verdadero o falso. En los ejercicios 15 y 16 recuerde que el símbolo $\subseteq$ significa "es un subconjunto de".

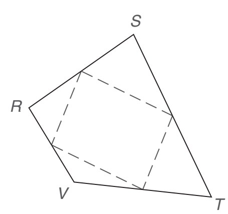
15. Para $Q = \{\text{cuadriláteros}\}$ y $P = \{\text{polígonos}\}$, $Q \subseteq P$.

16. Para $Q = \{\text{cuadriláteros}\}$ y $P = \{\text{paralelogramos}\}$, $Q \subseteq P$.

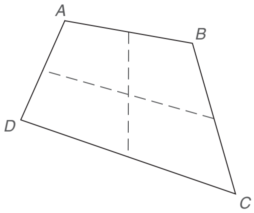
17. Un paralelogramo tiene un punto de simetría respecto al punto donde se intersecan sus dos diagonales.

18. Un paralelogramo tiene una recta de simetría y cualquiera de sus diagonales es un eje de simetría.

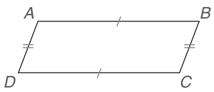
19. En el cuadrilátero *RSTV*, los puntos medios de lados consecutivos están unidos en orden. Intente trazar otros cuadriláteros y unir sus puntos medios. ¿Qué puede concluir acerca del cuadrilátero resultante en cada caso?



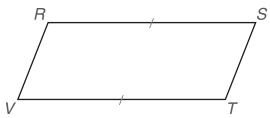
20. En el cuadrilátero *ABCD* se unen los puntos de los lados opuestos para formar dos segmentos intersecantes. Intente trazar otros cuadriláteros y unir sus puntos medios opuestos. ¿Qué puede concluir respecto a estos segmentos en cada caso?



21. El cuadrilátero *ABCD* tiene $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Utilizando su intuición, ¿qué tipo de cuadrilátero es *ABCD*?

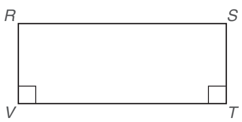


22. El cuadrilátero *RSTV* tiene $\overline{RS} \cong \overline{TV}$ y $\overline{RS} \parallel \overline{TV}$. Utilizando su intuición, ¿qué tipo de cuadrilátero es *RSTV*?



En los ejercicios 23 al 26 utilice la definición de paralelogramo para completar cada demostración.

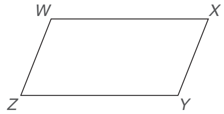
23. *Dado:* $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$, $\overline{RV} \perp \overline{VT}$ y $\overline{ST} \perp \overline{VT}$
Demuestre: *RSTV* es un paralelogramo



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$	1. ?
2. ?	2. Dado
3. ?	3. Si dos rectas son $\perp$ a la misma recta, son $\parallel$ entre sí
4. ?	4. Si ambos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son $\parallel$, el cuadrilátero es un ▱

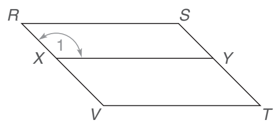
24. *Dado:* $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ y $\angle$s *Z* y *Y* son suplementarios
Demuestre: *WXYZ* es un paralelogramo



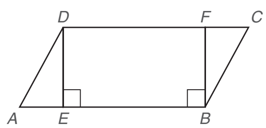
DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$	1. ?
2. ?	2. Dado
3. ?	3. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los $\angle$s interiores en el mismo lado de la transversal sean suplementarios, dichas rectas son $\parallel$
4. ?	4. Si ambos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son $\parallel$, el cuadrilátero es un ▱

25. *Dado:* Paralelogramo *RSTV*; además $\overline{XY} \parallel \overline{VT}$
Demuestre: $\angle 1 \cong \angle S$
Plan: Primero demuestre que *RSYX* es un paralelogramo.



26. *Dado:* Paralelogramo *ABCD* con $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ y $\overline{FB} \perp \overline{AB}$
Demuestre: $\overline{DE} \cong \overline{FB}$
Plan: Primero compruebe que *DEBF* es un paralelogramo.



En los ejercicios 27 al 30 escriba una demostración formal de cada teorema o corolario.

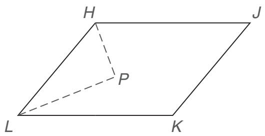
27. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

28. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

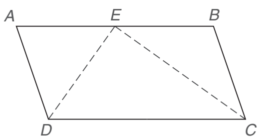
29. Las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

30. Los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.

31. En la figura siguiente se muestran los bisectores de dos ángulos consecutivos del ▱$HJKL$. ¿Qué concluye acerca del $\angle P$?



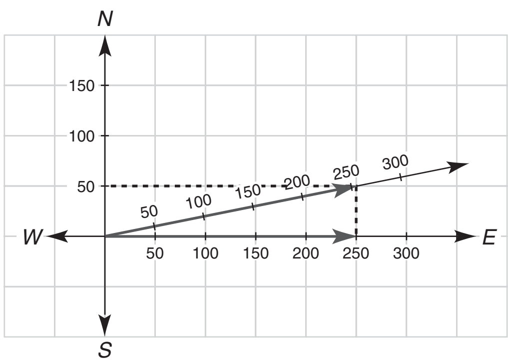
32. Cuando los bisectores de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo convergen en un punto en el lado restante, ¿qué tipo de triángulo es
a) $\triangle DEC$? b) $\triangle ADE$? C) $\triangle BCE$?



33. Trace un paralelogramo $RSTV$ con m$\angle R = 70°$ y m$\angle S = 110°$. ¿Cuál diagonal del ▱$RSTV$ tiene la longitud mayor?

34. Trace el paralelogramo $RSTV$ de manera que las diagonales tengan las longitudes $RT = 5$ y $SV = 4$. ¿Cuáles dos ángulos del ▱$RSTV$ tienen la medida mayor?

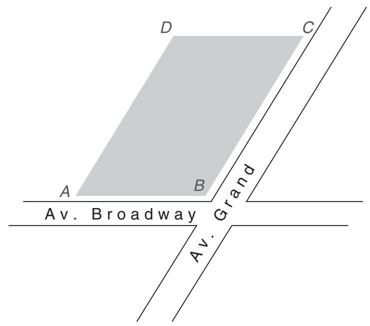
35. El problema siguiente se basa en la ley del paralelogramo. En el dibujo a escala cada unidad corresponde a 50 mph. Un avión pequeño vuela hacia el Este a 250 mph. El viento está soplando a 50 mph en dirección Norte. Utilizando la escala dada determine la longitud aproximada de la diagonal indicada y empléela para determinar la velocidad del avión en millas por hora.



Ejercicios 35, 36

36. En el dibujo para el ejercicio 35 el rumbo (dirección) en el que viaja el aeroplano se describe como norte $x°$ este, donde x es la medida del ángulo del eje Norte al eje Este. Utilizando un transportador encuentre el rumbo aproximado del avión.

37. Dos calles se intersecan para formar un ángulo obtuso en el punto B. En esa esquina la nueva cimentación vaciada para un edificio tiene la forma de un paralelogramo. ¿Cuál diagonal, $\overline{AC}$ o $\overline{BD}$, es mayor?



Ejercicios 37, 38

38. Para probar la precisión de la medición de los cimientos, desde esquinas opuestas de la cimentación del edificio se unen rectas (cuerdas). ¿Cómo se deben relacionar las cuerdas que están representadas por $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$?

39. Para el cuadrilátero $ABCD$, las medidas de sus ángulos son m$\angle A = x + 16$, m$\angle B = 2(x + 1)$, m$\angle C = \frac{3}{2}x - 11$ y m$\angle D = \frac{7}{3}x - 16$. Determine la medida de cada ángulo de $ABCD$ y si $ABCD$ es un paralelogramo.

***40.** *Demuestre:* En un paralelogramo la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados.

4.2 El paralelogramo y la cometa

CONCEPTOS CLAVE

Cuadriláteros que son paralelogramos

Rectángulo

Cometa

Los cuadriláteros que se estudian en esta sección tienen dos pares de lados congruentes.

EL PARALELOGRAMO

Dado que la hipótesis de cada teorema en la sección 4.1 incluyó un paralelogramo dado, nuestro objetivo fue desarrollar las propiedades de los paralelogramos. En esta sección los teoremas 4.2.1 y 4.2.3 toman la forma "Si…, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo". En esta sección se determina que los cuadriláteros que tienen ciertas características deben ser paralelogramos.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ El método "De abajo hacia arriba" para una demostración

Regla general: Este método responde a la pregunta "¿Por qué debe ser verdadero el último enunciado?". La respuesta con frecuencia proporciona una idea del, o de los enunciados anteriores al último enunciado.

Ilustración: En el renglón 8 del ejemplo 1, se estableció que *RSTV* es un paralelogramo por definición. Con $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$ en el renglón 1, se necesita demostrar que $\overline{RV} \parallel \overline{ST}$ como se muestra en el renglón 7.

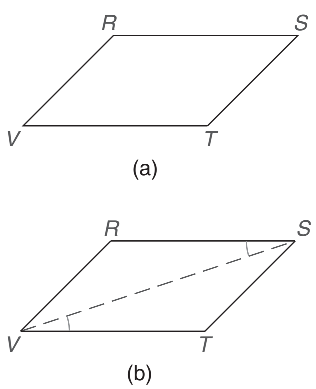


Figura 4.12

EJEMPLO 1

Proporcione una demostración formal del teorema 4.2.1.

TEOREMA 4.2.1

Si dos lados de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

DADO: En la figura 4.12(a), $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$ y $\overline{RS} \cong \overline{VT}$

DEMUESTRE: *RSTV* es un ▱

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$ y $\overline{RS} \cong \overline{VT}$	1. Dado
2. Trace la diagonal $\overline{VS}$, como en la figura 4.12(b)	2. Exactamente una recta pasa por dos puntos
3. $\overline{VS} \cong \overline{VS}$	3. Identidad
4. $\angle RSV \cong \angle SVT$	4. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, los $\angle$s internos alternos son $\cong$
5. $\triangle RSV \cong \triangle TVS$	5. LAL
6. $\therefore \angle RVS \cong \angle VST$	6. PCTCC
7. $\overline{RV} \parallel \overline{ST}$	7. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los $\angle$s sean $\cong$ dichas rectas son $\parallel$
8. *RSTV* es un ▱	8. Si ambos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son $\parallel$, el cuadrilátero es un paralelogramo

Descubra

Tome dos pajillas y córtelas en dos partes cada una de tal modo que las longitudes de las partes de una pajilla concuerden con las de la otra. Ahora forme un cuadrilátero juntando las partes extremo con extremo de manera que los lados congruentes se encuentren en posiciones opuestas. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma siempre?

RESPUESTA

Un paralelogramo

Considere la actividad Descubra de la izquierda. A través de ésta, se descubre otro tipo de cuadrilátero que debe ser un paralelogramo. Esta actividad también conduce al siguiente teorema; la demostración del teorema se le deja al estudiante.

TEOREMA 4.2.2

Si los dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

En el teorema 4.2.3 se enuncia otra cualidad de los cuadriláteros que determinan un paralelogramo. Su demostración también se deja para el estudiante. Para aclarar el significado del teorema 4.2.3 vea en la página 193 el dibujo para el ejercicio 3.

TEOREMA 4.2.3

Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan entre sí, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

© Elemental Imaging/Shutterstock

Figura 4.13

Cuando una figura se traza para representar la hipótesis de un teorema no se deben incluir más condiciones que las establecidas en la hipótesis. En relación con el teorema 4.2.3, si se trazan dos diagonales que no sólo se bisequen entre sí sino que también sean iguales en longitud, entonces el cuadrilátero será un tipo especial de paralelogramo conocido como **rectángulo**. En la sección siguiente se estudiarán los rectángulos.

LA COMETA

El cuadrilátero que se considera en seguida se conoce como *cometa*. Este cuadrilátero obtiene su nombre del juguete de niños que está representado en la figura 4.13. En la construcción de la cometa hay dos pares de lados *adyacentes* congruentes. Vea la figura 4.14(a) en la página 189. Esto conduce a la definición formal de cometa.

GEE

Ejercicios 1-4

DEFINICIÓN

Una **cometa** es un cuadrilátero con dos pares distintos de lados adyacentes congruentes.

Descubra

Tome dos pajillas y córtelas en partes de manera que tengan longitudes iguales. Ahora forme un cuadrilátero colocando juntas las partes congruentes. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma siempre?

RESPUESTA

Cometa

La palabra *distintos* se utiliza en esta definición para aclarar que la cometa no tiene cuatro lados congruentes.

TEOREMA 4.2.4

En una cometa un par de ángulos opuestos son congruentes.

En el ejemplo 2 se comprueba el teorema 4.2.4 demostrando que $\angle B \cong \angle D$. Con lados congruentes marcados, $\angle A \not\cong \angle C$.

Descubra

Tome una hoja de papel común y recorte la cometa *ABCD* de manera que $AB = AD$ y $BC = DC$.

a) Cuando dobla la cometa *ABCD* a lo largo de la diagonal $\overline{AC}$, ¿se forman dos triángulos congruentes?

b) Cuando dobla la cometa *ABCD* a lo largo de la diagonal $\overline{BD}$, ¿se forman dos triángulos congruentes?

RESPUESTAS

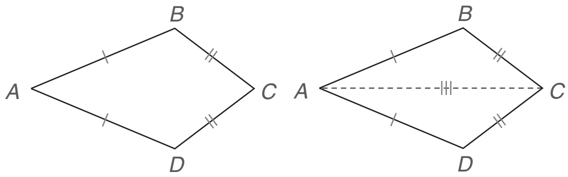
(a) Sí (b) No

EJEMPLO 2

Complete la demostración del teorema 4.2.4.

DADO: La cometa *ABCD* con lados congruentes como se muestra. [Vea la figura 4.14(a).]

DEMUESTRE: $\angle B \cong \angle D$



(a) (b)

Figura 4.14

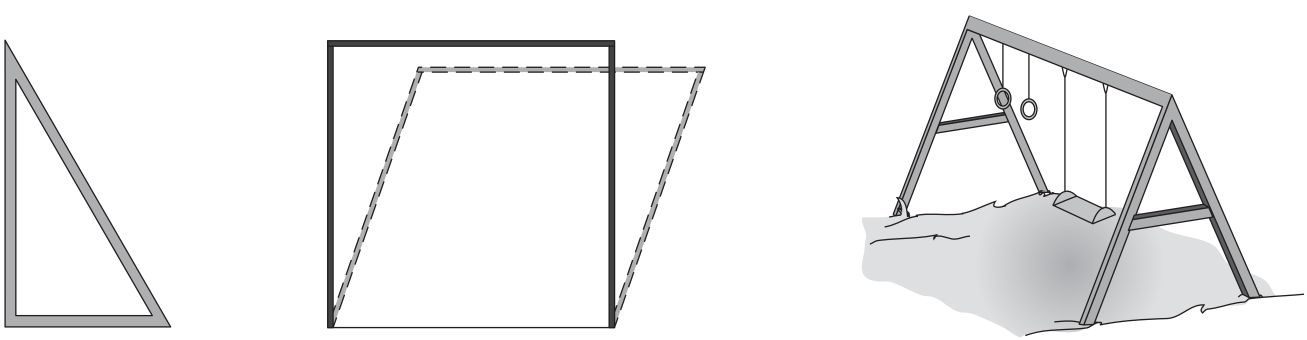
DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. Cometa *ABCD*	1. ?
2. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	2. Una cometa tiene dos pares de lados adyacentes $\cong$
3. Trace $\overline{AC}$ [Figura 4.14(b)]	3. A través de dos puntos hay exactamente una recta
4. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	4. ?
5. $\triangle ACD \cong \triangle ACB$	5. ?
6. ?	6. PCTCC

GEE
Ejercicios 5-10

En los ejercicios 27 y 28 de esta sección se encuentran dos teoremas adicionales que comprenden la cometa.

Al observar un granero o un cobertizo viejo con frecuencia se observa que empieza a ladearse. A diferencia de un triángulo, que tiene una forma rígida [figura 4.15(a)] y se dobla sólo cuando se rompe, un cuadrilátero [figura 4.15(b)] *no* proporciona el mismo nivel de resistencia y estabilidad. En la construcción de una casa, un puente o un columpio [figura 4.15(c)] observe el uso de triángulos de madera o metal como refuerzo.



(a) (b) (c)

Figura 4.15

El refuerzo en el columpio de la figura 4.15(c) sugiere el siguiente teorema.

TEOREMA 4.2.5

El segmento que une los puntos medios de los dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del tercer lado.

En referencia con la figura 4.16(a); en el teorema 4.2.5 se afirma que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y $MN = \frac{1}{2}(BC)$. Se demostrará la primera parte de este teorema, pero la segunda se dejará como ejercicio.

El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado del triángulo.

DADO: En la figura 4.16(a), el $\triangle ABC$ con puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

DEMUESTRE: $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

Descubra

Bosqueje un hexágono regular *ABCDEF*. Trace las diagonales $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$. ¿Qué tipo de cuadrilátero es *ABCE*?

RESPUESTA

Cometa

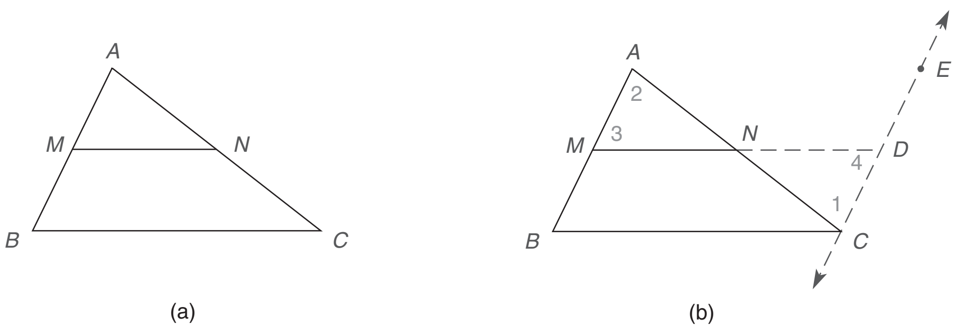


Figura 4.16

Exploración tecnológica

Utilice software de cómputo si dispone de él.

1. Construya el $\triangle ABC$ (cualquier triángulo).
2. Donde M es el punto medio de $\overline{AB}$ y N es el punto medio de $\overline{AC}$, trace $\overline{MN}$.
3. Mida el $\angle AMN$ y el $\angle B$.
4. Demuestre que el $m\angle AMN = m\angle B$, lo que demuestra que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$.
5. Ahora mida $\overline{MN}$ y $\overline{BC}$.
6. Demuestre que $MN = \frac{1}{2}(BC)$. (Las medidas quizá no sean "perfectas".)

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\triangle ABC$, con puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente	1. Dado
2. A través de C construya $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overline{AB}$ como en la figura 4.16(b)	2. Postulado paralelo
3. Prolongue $\overline{MN}$ para que interseque $\overrightarrow{CE}$ en D, como en la figura 4.16(b)	3. Exactamente una recta pasa a través de dos puntos
4. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ y $\overline{AN} \cong \overline{NC}$	4. El punto medio de un segmento lo divide en segmentos $\cong$
5. $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 4 \cong \angle 3$	5. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, los $\angle$s internos alternos son $\cong$
6. $\triangle ANM \cong \triangle CND$	6. AAL
7. $\overline{AM} \cong \overline{DC}$	7. PCTCC
8. $\overline{MB} \cong \overline{DC}$	8. Transitiva (ambos son $\cong$ con $\overline{AM}$)
9. Cuadrilátero $BMDC$ es un $\square$	9. Si dos lados de un cuadrilátero son $\cong$ y $\parallel$, el cuadrilátero es un paralelogramo
10. $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$	10. Lados opuestos de un $\square$ son $\parallel$

En la demostración anterior se necesitó probar que un cuadrilátero con ciertas características es un paralelogramo.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Demostración de que un cuadrilátero es un paralelogramo

Regla general: Los métodos para la demostración incluyen la definición de paralelogramo así como los teoremas 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3.

Ilustración: En la demostración del teorema 4.2.5 los enunciados 2 y 8 permiten la conclusión en el enunciado 9 (se utilizó el teorema 4.2.1).

En el teorema 4.2.5 también se afirma lo siguiente:

> El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del tercer lado.

EJEMPLO 3

En el $\triangle RST$ de la figura 4.17, M y N son los puntos medios de $\overline{RS}$ y $\overline{RT}$, respectivamente.

a) Si $ST = 12.7$, encuentre MN.
b) Si $MN = 15.8$, encuentre ST.

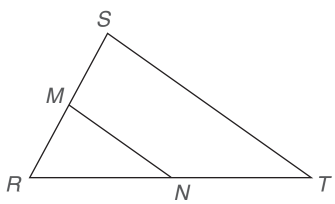


Figura 4.17

Descubra

Dibuje un $\triangle ABC$ con puntos medios D de $\overline{CA}$ y E de $\overline{CB}$. Corte el $\triangle CDE$ y colóquelo en la base $\overline{AB}$. Deslizando $\overline{DE}$ a lo largo de $\overline{AB}$, ¿qué encuentra?

RESPUESTA

$DE = \frac{1}{2}(AB)$ o $AB = 2(DE)$

Solución

a) $MN = \frac{1}{2}(ST)$, por tanto $MN = \frac{1}{2}(12.7) = 6.35$.
b) $MN = \frac{1}{2}(ST)$, por tanto $15.8 = \frac{1}{2}(ST)$.
Multiplicando por 2, se obtiene que $ST = 31.6$. ■

EJEMPLO 4

DADO: $\triangle ABC$ en la figura 4.18, con D el punto medio de $\overline{AC}$ y E el punto medio de $\overline{BC}$; $DE = 2x + 1$; $AB = 5x - 1$

DEMUESTRE: x, DE y AB

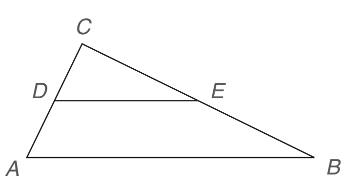


Figura 4.18

Solución De acuerdo con el teorema 4.2.5,

$$DE = \frac{1}{2}(AB)$$

por tanto

$$2x + 1 = \frac{1}{2}(5x - 1)$$

Al multiplicar por 2, se obtiene

$$4x + 2 = 5x - 1$$
$$3 = x$$

Por tanto, $DE = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. De manera similar, $AB = 5 \cdot 3 - 1 = 14$.

GEE
Ejercicios 11-15

NOTA: En el ejemplo 4 una comprobación muestra que $DE = \frac{1}{2}(AB)$. ■

En el ejemplo final de esta sección se considera el diseño de un producto. Vea también los ejercicios relacionados 17 y 18 de esta sección.

EJEMPLO 5

En un departamento hay una cama que se pliega contra la pared. En la posición vertical el diseño muestra patas desplegables de longitud igual; es decir, $AB = CD$ [vea la figura 4.19(a)]. Determine el tipo de cuadrilátero *ABDC* que se forma, según se muestra en la figura 4.19(b), cuando la cama se despliega hasta una posición horizontal.

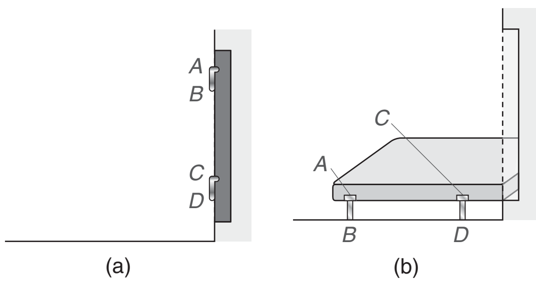


Figura 4.19

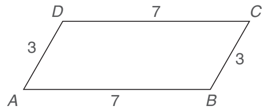
Solución Vea la figura 4.19(a). Dado que $AB = CD$ se deduce que $AB + BC = BC + CD$; aquí, BC se agregó en cada lado de la ecuación. Pero $AB + BC = AC$ y $BC + CD = BD$. Por tanto, $AC = BD$ por sustitución.

En la figura 4.19(b) se observa que $AB = CD$ y $AC = BD$. Debido a que ambos pares de lados opuestos del cuadrilátero son congruentes, *ABDC* es un paralelogramo.

NOTA: En la sección 4.3 también se demostrará que *ABDC* de la figura 4.19(b) es un *rectángulo* (un tipo especial de paralelogramo). ■

Ejercicios 4.2

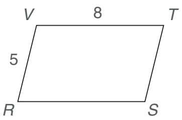
1. a) Como se muestra en la figura, ¿debe ser el cuadrilátero *ABCD* un paralelogramo?



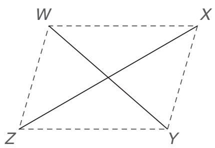
b) Dadas las longitudes de los lados como se muestran en la figura, ¿es única la medida de $\angle A$?

2. a) Como se muestra en la figura, ¿debe ser *RSTV* un paralelogramo?

b) Con medidas como las que se indican, ¿es necesario que $RS = 8$?



3. En el dibujo suponga que $\overline{WY}$ y $\overline{XZ}$ se bisecan entre sí. ¿Qué tipo de cuadrilátero es *WXYZ*?



Ejercicios 3, 4

4. En el dibujo suponga que $\overline{ZX}$ es el bisector perpendicular de $\overline{WY}$. ¿Qué tipo de cuadrilátero es *WXYZ*?

5. Un carpintero coloca tablas con longitudes de 8, 8, 4 y 4 pies y las ubica extremo con extremo.

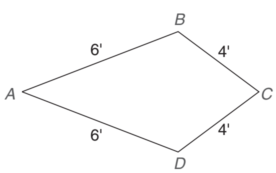
a) Si las tablas se unen en los extremos para formar un cuadrilátero cuyas piezas de 8 pies están conectadas en orden, ¿qué tipo de cuadrilátero se forma?

b) Si estas piezas se unen en los extremos para formar un cuadrilátero en el que se alternan las piezas de 8 pies, ¿qué tipo de cuadrilátero se forma?

6. Un carpintero une cuatro tablas de longitudes 6, 6, 4 y 4 pies, en ese orden, para formar el cuadrilátero *ABCD* que se muestra.

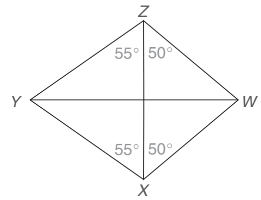
a) ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma?

b) ¿Cómo se relacionan los ángulos *B* y *D*?

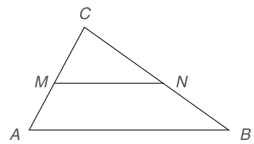


7. En el paralelogramo *ABCD* (no se muestra), $AB = 8$, $m\angle B = 110°$ y $BC = 5$. ¿Cuál diagonal tiene la longitud mayor?

8. En la cometa *WXYZ* se muestran las medidas de los ángulos seleccionados. ¿Cuál diagonal de la cometa tiene la longitud mayor?



9. En el $\triangle ABC$, *M* y *N* son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Si $AB = 12.36$, ¿cuál es la longitud de $\overline{MN}$?

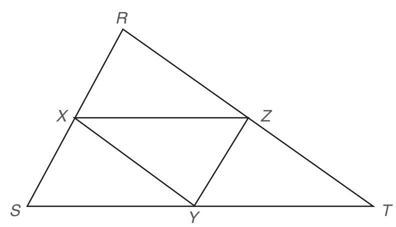


Ejercicios 9, 10

10. En el $\triangle ABC$, *M* y *N* son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Si $MN = 7.65$, ¿cuál es la longitud de $\overline{AB}$?

En los ejercicios 11 al 14 suponga que X, Y y Z son los puntos medios de los lados del $\triangle RST$.

11. Si $RS = 12$, $ST = 14$ y $RT = 16$, encuentre:
a) *XY* b) *XZ* c) *YZ*



Ejercicios 11–14

12. Si $XY = 6$, $YZ = 8$ y $XZ = 10$, encuentre:
a) *RS* b) *ST* c) *RT*

13. Si el perímetro (la suma de las longitudes de los tres lados) del $\triangle RST$ es 20, ¿cuál es el perímetro del $\triangle XYZ$?

14. Si el perímetro (suma de las longitudes de los tres lados) del $\triangle XYZ$ es 12.7, ¿cuál es el perímetro del $\triangle RST$?

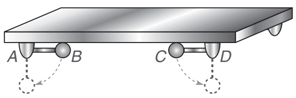
15. Considere cualquier cometa.

a) ¿Tiene recta de simetría? Si es así, describa un eje de simetría.

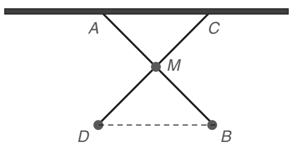
b) ¿Tiene punto de simetría? Si es así, describa el punto de simetría.

16. Considere cualquier paralelogramo.
a) ¿Tiene recta de simetría? Si es así, describa un eje de simetría
b) ¿Tiene punto de simetría? Si es así, describa el punto de simetría.

17. Por ahorrar espacio las ruedas desplegables de una camilla (o parihuela) se doblan bajo ella, como se muestra. A fin de que la superficie superior de la camilla quede paralela al piso cuando se despliegan las ruedas, ¿qué relación debe existir entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$?

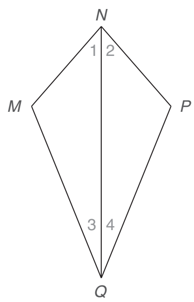


18. Para ahorrar espacio las patas plegables de una tabla de planchar se doblan bajo ella. Un mecanismo deslizante en el punto A y las patas conectadas en el punto medio común P hacen que la superficie superior de la tabla sea paralela al piso. ¿Cómo se relacionan $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$?



En los ejercicios 19 al 24 complete cada demostración.

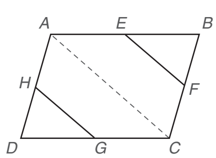
19. *Dado:* $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$
Demuestre: $MNPQ$ es una cometa



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$	1. ?
2. $\overline{NQ} \cong \overline{NQ}$	2. ?
3. ?	3. ALA
4. $\overline{MN} \cong \overline{PN}$ y $\overline{MQ} \cong \overline{PQ}$	4. ?
5. ?	5. Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados adyacentes $\cong$ es una cometa

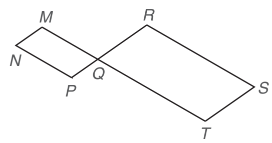
20. *Dado:* Cuadrilátero $ABCD$, con puntos medios en E, F, G y H de los lados
Demuestre: $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$



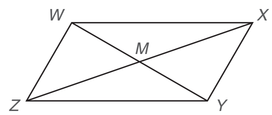
DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. Trace $\overline{AC}$	2. A través de dos puntos hay una recta
3. En $\triangle ABC$, $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ y en $\triangle ADC$, $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$	3. ?
4. ?	4. Si dos rectas son $\parallel$ a la misma recta, estas rectas son $\parallel$ entre sí

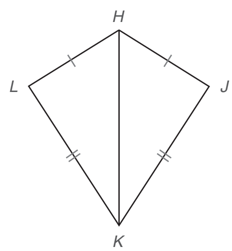
21. *Dado:* M-Q-T y P-Q-R de manera que $MNPQ$ y $QRST$ son ▱s
Demuestre: $\angle N \cong \angle S$



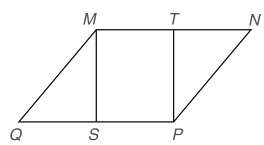
22. *Dado:* ▱$WXYZ$ con diagonales $\overline{WY}$ y $\overline{XZ}$
Demuestre: $\triangle WMX \cong \triangle YMZ$



23. *Dado:* Cometa $HJKL$ con diagonales $\overline{HK}$
Demuestre: $\overrightarrow{HK}$ biseca $\angle LHJ$



24. *Dado:* ▱$MNPQ$, con T como punto medio de $\overline{MN}$ y S el punto medio de $\overline{QP}$
Demuestre: $\triangle QMS \cong \triangle NPT$, y $MSPT$ es un ▱



En los ejercicios 25 al 28 escriba una demostración formal de cada teorema o corolario.

25. Si los dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

26. Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan entre sí, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

27. En una cometa una diagonal es el bisector perpendicular de la otra diagonal.

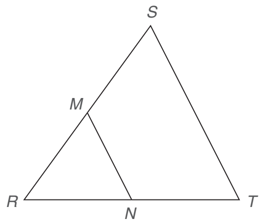
28. Una diagonal de una cometa biseca dos de los ángulos de la cometa.

En los ejercicios 29 al 31 el $\triangle RST$ tiene M y N como puntos medios de los lados $\overline{RS}$ y $\overline{RT}$, respectivamente.

29. *Dado:* $MN = 2y - 3$
$ST = 3y$
Encuentre: y, MN y ST

30. *Dado:* $MN = x^2 + 5$
$ST = x(2x + 5)$
Encuentre: x, MN y ST

31. *Dado:* $RM = RN = 2x + 1$
$ST = 5x - 3$
$m\angle R = 60°$
Encuentre: x, RM y ST

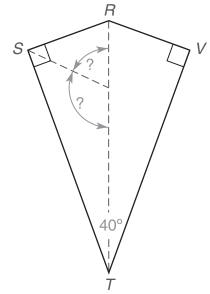


Ejercicios 29-31

32. En la cometa $ABCD$ (no se muestra), $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. Si $m\angle B = \frac{3x}{2} + 2$ y $m\angle D = \frac{9x}{4} - 3$, encuentre x.

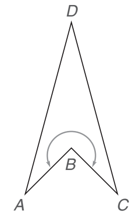
33. En la cometa $ABCD$ del ejercicio 32, $AB = \frac{x}{6} + 5$, $AD = \frac{x}{3} + 3$ y $BC = x - 2$. Encuentre el perímetro (la suma de las longitudes de todos los lados) de la cometa $ABCD$.

34. $RSTV$ es una cometa, con $\overline{RS} \perp \overline{ST}$ y $\overline{RV} \perp \overline{VT}$. Si $m\angle STV = 40°$, ¿cuál es la medida del ángulo formado:
a) por los bisectores de $\angle RST$ y $\angle STV$?
b) por los bisectores de $\angle SRV$ y $\angle RST$?



35. En una cometa cóncava $ABCD$, hay un ángulo interno en el vértice B que es un ángulo reflejo. Dado que $m\angle A = m\angle C = m\angle D = 30°$, encuentre la medida del ángulo reflejo que se indica.

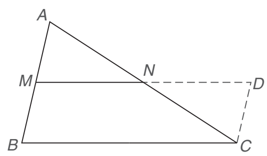
36. Si la longitud del lado $\overline{AB}$ (para la cometa $ABCD$) es 6 pulg, encuentre la longitud de $\overline{AC}$ (no se muestra). Recuerde que $m\angle A = m\angle C = m\angle D = 30°$.



Ejercicios 35, 36

***37.** Demuestre que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del tercer lado.

(SUGERENCIA: En el dibujo $\overline{MN}$ está extendida hasta D, un punto en $\overline{CD}$. Además, $\overline{CD}$ es paralela a $\overline{AB}$.)



***38.** Demuestre que cuando los puntos medios de lados consecutivos de un cuadrilátero se unen en orden, el cuadrilátero resultante es un paralelogramo.

4.3 El rectángulo, el cuadrado y el rombo

CONCEPTOS CLAVE

Rectángulo	Rombo
Cuadrado	Teorema de Pitágoras

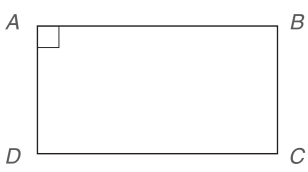


Figura 4.20

EL RECTÁNGULO

En esta sección se analizan paralelogramos especiales. El primero de ellos es el rectángulo (lo abreviamos "rect."), que se define como sigue:

DEFINICIÓN

Un **rectángulo** es un paralelogramo que tiene un ángulo recto. (Vea la figura 4.20.)

Cualquier lector familiarizado con el rectángulo puede confundirse por el hecho de que la definición anterior menciona sólo un ángulo recto. Debido a que por definición un rectángulo es un paralelogramo, el hecho de que un rectángulo tenga cuatro ángulos rectos se demuestra con facilidad aplicando los corolarios 4.1.3 y 4.1.5. La demostración del corolario 4.3.1 se le deja al estudiante.

COROLARIO 4.3.1

Todos los ángulos de un rectángulo son ángulos rectos.

Recuerde

Un rectángulo es un paralelogramo. Por tanto, tiene todas las propiedades de un paralelogramo más algunas propias.

El teorema siguiente es verdadero para rectángulos pero no para paralelogramos en general.

TEOREMA 4.3.2

Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

NOTA: Para seguir el flujo de la demostración en el ejemplo 1, puede ser mejor trazar por separado los triángulos NMQ y PQM de la figura 4.21.

EJEMPLO 1

Complete una demostración del teorema 4.3.2.

DADO: Rectángulo $MNPQ$ con diagonales $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$ (Vea la figura 4.21.)

DEMUESTRE: $\overline{MP} \cong \overline{NQ}$

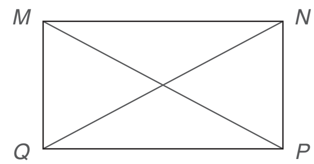


Figura 4.21

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. Rectángulo $MNPQ$ con diagonales $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$	1. Dado
2. $MNPQ$ es un ▱	2. Por definición, un rectángulo es un ▱ con un ángulo recto
3. $\overline{MN} \cong \overline{QP}$	3. Lados opuestos de un ▱ son $\cong$
4. $\overline{MQ} \cong \overline{MQ}$	4. Identidad
5. $\angle NMQ$ y $\angle PQM$ son $\angle$s rectos	5. Por el corolario 4.3.1, los cuatro $\angle$s de un rectángulo son $\angle$s rectos
6. $\angle NMQ \cong \angle PQM$	6. Todos los $\angle$s rectos son $\cong$
7. $\triangle NMQ \cong \triangle PQM$	7. LAL
8. $\overline{MP} \cong \overline{NQ}$	8. PCTCC

■

Descubra

Dado un rectángulo $MNPQ$ (como una hoja de papel), trace las diagonales $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$. De una segunda hoja, recorte el $\triangle MPQ$ (formado por dos lados y una diagonal de $MNPQ$). ¿Puede colocar $\triangle MPQ$ de manera que coincida con $\triangle NQP$?

RESPUESTA

!S

GEE

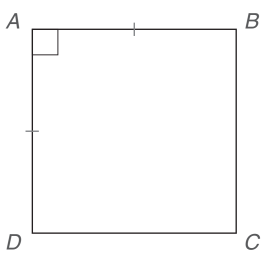
Ejercicios 1-4

EL CUADRADO

Todos los rectángulos son paralelogramos; algunos paralelogramos son rectángulos y algunos rectángulos son *cuadrados*.

DEFINICIÓN

Un **cuadrado** es un rectángulo que tiene dos lados adyacentes congruentes. (Vea la figura 4.22.)



Cuadrado $ABCD$

Figura 4.22

COROLARIO 4.3.3

Todos los lados de un cuadrado son congruentes.

GEE
Ejercicios 5-7

Puesto que un cuadrado es un tipo de rectángulo, tiene cuatro ángulos rectos y sus diagonales son congruentes. Dado que un cuadrado también es un paralelogramo, sus lados opuestos son paralelos. Para cualquier cuadrado se puede demostrar que las diagonales son perpendiculares.

En el capítulo 8 se mide el área en "unidades cuadradas".

EL ROMBO

El siguiente tipo de cuadrilátero que se considera es el rombo.

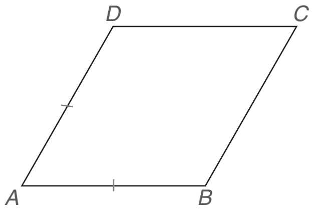


Figura 4.23

DEFINICIÓN

Un **rombo** es un paralelogramo con dos lados adyacentes congruentes.

En la figura 4.23 los lados adyacentes $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ del rombo $ABCD$ están marcados congruentes. Dado que un rombo es un tipo de paralelogramo, también es necesario que $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Por tanto, se tiene el corolario 4.3.4.

COROLARIO 4.3.4

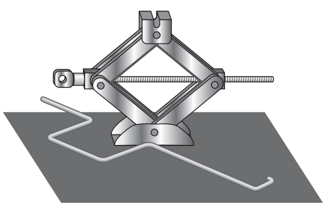
Todos los lados de un rombo son congruentes.

El corolario 4.3.4 se utilizará en la demostración del teorema siguiente.

TEOREMA 4.3.5

Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Geometría en el mundo real



El gato que se emplea para cambiar el neumático de un automóvil ilustra la forma de un rombo.

Descubra

Bosqueje el hexágono regular *RSTVWX*. Trace las diagonales $\overline{RT}$ y $\overline{XV}$. ¿Qué tipo de cuadrilátero es *RTVX*?

RESPUESTA

Rectángulo

EJEMPLO 2

Estudie la demostración gráfica del teorema 4.3.5. En la demostración los pares de triángulos son congruentes por la razón LLL.

DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA 4.3.5

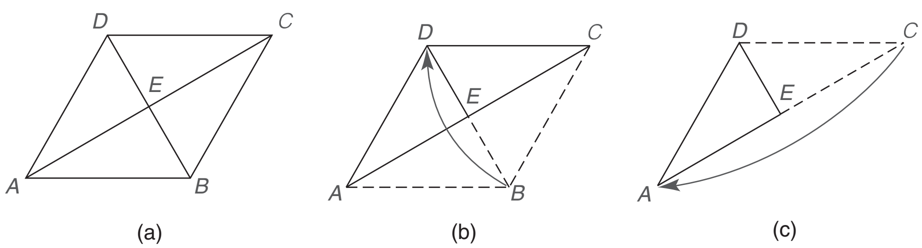


Figura 4.24

DADO: Rombo $ABCD$ con diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ [Vea la figura 4.24(a).]

DEMUESTRE: $\overline{AC} \perp \overline{DB}$

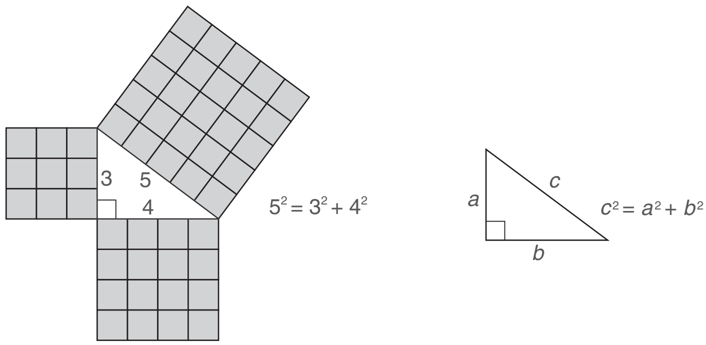
DEMOSTRACIÓN: Doble el $\triangle ABC$ a lo largo de $\overline{AC}$ para que coincida con $\triangle CED$ [vea la figura 4.24(b)]. Ahora doble el $\triangle CED$ a lo largo de la media diagonal $\overline{DE}$ para que coincida $\triangle AED$ [vea la figura 4.24(c)]. Los cuatro triángulos congruentes que se formaron en la figura 4.24(c) se pueden desdoblar para regresar al rombo $ABCD$ de la figura 4.24(a). Con cuatro ángulos rectos congruentes en el vértice E se observa que $\overline{AC} \perp \overline{DB}$. ■

GEE

Ejercicios 8-11

Una definición alterna de *cuadrado* es “Un cuadrado es un rombo cuyos lados adyacentes forman un ángulo recto”. Por tanto, una propiedad adicional de un cuadrado es que sus diagonales son perpendiculares.

El teorema de Pitágoras, el cual trata de ángulos rectos, también es útil en aplicaciones que comprenden cuadriláteros que tienen ángulos rectos. En la antigüedad el teorema afirmaba que “El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos del triángulo rectángulo”. Vea la figura 4.25(a). Esta interpretación implica el concepto de área, el cual se estudia en un capítulo posterior. Al contar los cuadrados de la figura 4.25(a) se observa que 25 “unidades cuadradas” es la suma de 9 y 16 unidades cuadradas. Nuestra interpretación del teorema de Pitágoras utiliza relaciones numéricas (de longitud).



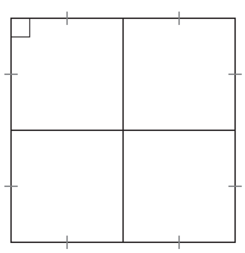
(a) (b)

Figura 4.25

TEOREMA DE PITÁGORAS

Descubra

¿Cuántos cuadrados se muestran?



RESPUESTA

5 (cuatro de 1 por 1 y uno de 2 por 2)

El teorema de Pitágoras se demostrará en la sección 5.4. Aunque se introdujo en la sección 3.2, aquí se vuelve a enunciar por conveniencia y luego se repasa su aplicación para el triángulo *rectángulo* en el ejemplo 3. Cuando en un cuadrilátero existen relaciones de ángulos rectos en cuadriláteros, con frecuencia también se puede aplicar la “regla de Pitágoras”; vea los ejemplos 4, 5 y 6.

Teorema de Pitágoras En un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud c y catetos de longitudes a y b, se deduce que $c^2 = a^2 + b^2$.

Si se conocen las longitudes de los dos lados de un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras se puede aplicar para determinar la longitud del tercer lado. En el ejemplo 3 se busca la longitud de la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuyas longitudes de los catetos se conocen. Cuando se utiliza el teorema de Pitágoras, c debe representar la longitud de la hipotenusa; sin embargo, cualquier cateto se puede elegir para la longitud a (o b).

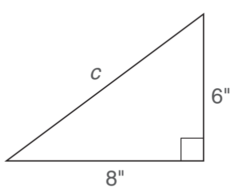


Figura 4.26

EJEMPLO 3

¿Cuál es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 pulg? (Vea la figura 4.26.)

Solución

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 6^2 + 8^2$$
$$c^2 = 36 + 64 \rightarrow c^2 = 100 \rightarrow c = 10 \text{ pulg}$$

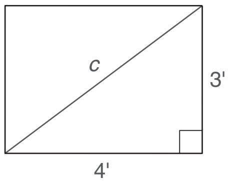


Figura 4.27

En el ejemplo siguiente la diagonal del rectángulo lo divide en dos triángulos rectángulos. Como se muestra en la figura 4.27 la diagonal del rectángulo es la hipotenusa de cada triángulo rectángulo formado por la diagonal.

EJEMPLO 4

¿Cuál es la longitud de la diagonal en un rectángulo cuyos lados miden 3 y 4 pies?

Solución Para cada triángulo en la figura 4.27, $c^2 = a^2 + b^2$ se convierte en $c^2 = 3^2 + 4^2$ o $c^2 = 9 + 16$. Entonces $c^2 = 25$, por tanto $c = 5$. La longitud de la diagonal es 5 pies. ■

En el ejemplo 5 se utilizó el hecho de que un rombo es un paralelogramo para justificar que sus diagonales se bisecan entre sí. Por el teorema 4.3.5 las diagonales del rombo también son perpendiculares.

EJEMPLO 5

¿Cuál es la longitud de cada lado de un rombo, cuyas diagonales miden 10 y 24 cm? (Vea la figura 4.28.)

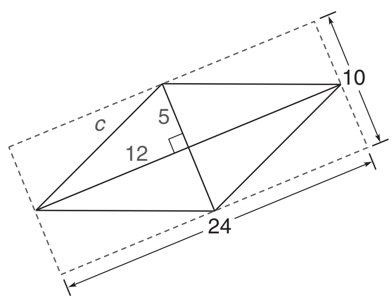


Figura 4.28

Solución Las diagonales de un rombo son bisectores perpendiculares entre sí. Por tanto, las diagonales separan el rombo que se muestra en cuatro triángulos rectángulos congruentes con catetos de longitudes 5 y 12 cm. Para cada triángulo, $c^2 = a^2 + b^2$ se transforma en $c^2 = 5^2 + 12^2$, o $c^2 = 25 + 144$. Entonces $c^2 = 169$, por tanto $c = 13$. La longitud de cada lado es 13 cm. ■

EJEMPLO 6

En un diamante (cancha) de softbol (en realidad un cuadrado), la distancia entre bases es 60 pies. Utilizando el triángulo en la figura 4.29, encuentre la distancia desde el plato de *home* a la segunda base.

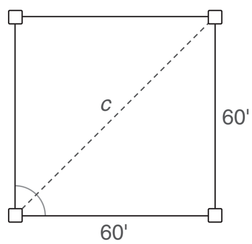


Figura 4.29

Solución Utilizando $c^2 = a^2 + b^2$, se tiene

$$c^2 = 60^2 + 60^2$$
$$c^2 = 7200$$

Entonces

Ejercicios 12-14

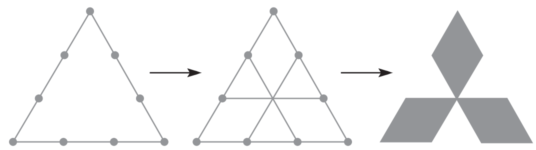
$$c = \sqrt{7200} \qquad \text{o} \qquad c \approx 84.85 \text{ pies}$$

■

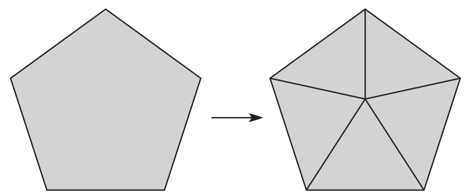
Descubra

Un logotipo es un símbolo geométrico que representa a una compañía. La sola imagen del símbolo sirve como publicidad para la compañía o corporación. Muchos logotipos derivan de formas geométricas comunes. ¿Cuál compañía está representada por estos símbolos?

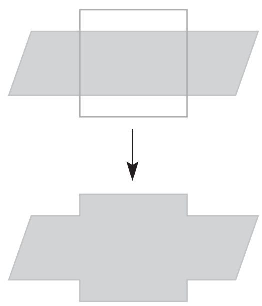
Los lados de un triángulo equilátero se trisecan y luego se conectan como se muestra; por último se borran las secciones medias.



Los vértices de un pentágono regular se unen con el "centro" del polígono como se muestra.



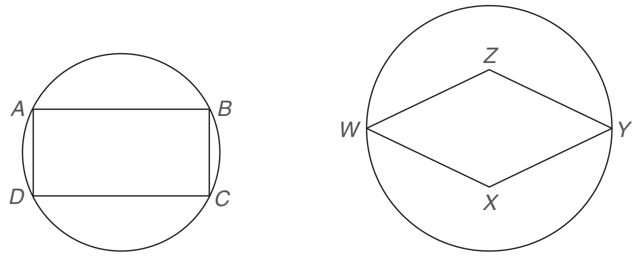
Un cuadrado se superpone y se centra sobre un paralelogramo largo y angosto como se muestra. Luego se eliminan los segmentos de recta interiores.



RESPUESTAS

Mitsubishi; Chrysler; Chevrolet

Cuando todos los vértices de un cuadrilátero se encuentran en un círculo se dice que el cuadrilátero es un *cuadrilátero cíclico*. De hecho, todos los rectángulos son cuadriláteros cíclicos, pero ningún rombo lo es. Al determinar si un cuadrilátero es cíclico el factor clave se encuentra en el hecho de que las diagonales se deben intersecar en un punto que sea equidistante de los cuatro vértices. En la figura 4.30(a) el rectángulo $ABCD$ es cíclico ya que A, B, C y D se encuentran en el círculo. Sin embargo, el rombo $WXYZ$ en la figura 4.30(b) *no* es cíclico debido a que X y Z no pueden encontrarse en el círculo cuando W y Y se encuentran en él.



(a) (b)

Figura 4.30

EJEMPLO 7

Para el rectángulo cíclico $ABCD$, $AB = 8$. La diagonal $\overline{DB}$ del rectángulo también es un diámetro del círculo y $DB = 10$. Encuentre el perímetro de $ABCD$ que se muestra en la figura 4.31.

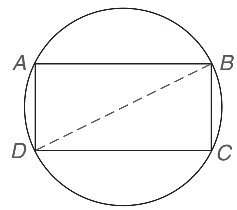


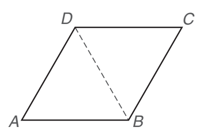
Figura 4.31

Solución $AB = DC = 8$. Sea $AD = b$; aplicando el teorema de Pitágoras con el triángulo rectángulo ABD, se tiene que $10^2 = 8^2 + b^2$.

Entonces $100 = 64 + b^2$ y $b^2 = 36$, por tanto $b = \sqrt{36}$ o 6.
A su vez $AD = BC = 6$. El perímetro de $ABCD$ es $2(8) + 2(6) = 16 + 12 = 28$. ■

Ejercicios 4.3

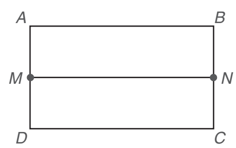
1. Si la diagonal $\overline{DB}$ es congruente con cada lado del rombo $ABCD$, ¿cuál es la media del $\angle A$? ¿Y la del $\angle ABC$?



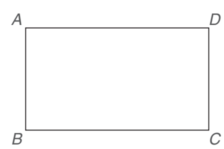
2. Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, ¿qué puede concluir acerca del paralelogramo?

   (SUGERENCIA: Haga una cantidad de dibujos en los que sólo utilice la información que se sugiere.)

3. Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, ¿qué puede concluir acerca del paralelogramo?
4. Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares y congruentes, ¿qué puede concluir acerca del paralelogramo?
5. Si las diagonales de un cuadrilátero son bisectores perpendiculares entre sí (pero no congruentes), ¿qué puede concluir acerca del cuadrilátero?
6. Si las diagonales de un rombo son congruentes, ¿qué puede concluir acerca del rombo?
7. Un segmento de recta une los puntos medios de dos lados opuestos de un rectángulo como se muestra. ¿Qué puede concluir acerca de $\overline{MN}$ y MN?



En los ejercicios 8 al 10 utilice las propiedades de los rectángulos para resolver cada problema. El rectángulo ABCD se muestra en la figura.



Ejercicios 8 al 10

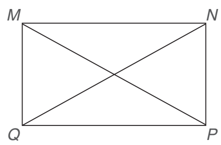
8. *Dado:* $AB = 5$ y $BC = 12$
   Encuentre: CD, AD y AC (no se muestran)
9. *Dado:* $AB = 2x + 7$, $BC = 3x + 4$ y $CD = 3x + 2$
   Encuentre: x y DA

10. *Dado:* $AB = x + y$, $BC = x + 2y$, $CD = 2x - y - 1$. y $DA = 3x - 3y + 1$

Encuentre: x y y

(Vea la figura para el ejercicio 8.)

En los ejercicios 11 al 14 considere el rectángulo MNPQ con diagonales $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$. Cuando la respuesta no sea un número entero, deje como respuesta una raíz cuadrada.



Ejercicios 11-14

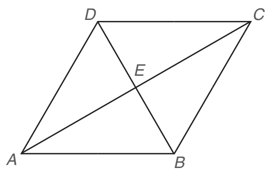
11. Si $MQ = 6$ y $MN = 8$, encuentre NQ y MP.

12. Si $QP = 9$ y $NP = 6$, encuentre NQ y MP.

13. Si $NP = 7$ y $MP = 11$, encuentre QP y MN.

14. Si $QP = 15$ y $MP = 17$, encuentre MQ y NP.

En los ejercicios 15 al 18 considere el rombo ABCD con diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$. Cuando la respuesta no sea un número entero, deje como respuesta una raíz cuadrada.



Ejercicios 15-18

15. Si $AE = 5$ y $DE = 4$, encuentre AD.

16. Si $AE = 6$ y $EB = 5$, encuentre AB.

17. Si $AC = 10$ y $DB = 6$, encuentre AD.

18. Si $AC = 14$ y $DB = 10$, encuentre BC.

19. *Dado:* Rectángulo $ABCD$ (no se muestra) con $AB = 8$ y $BC = 6$; M y N son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.

Encuentre: MN

20. *Dado:* Rombo $RSTV$ (que no se muestra) con diagonales $\overline{RT}$ y $\overline{SV}$ de manera que $RT = 8$ y $SV = 6$

Encuentre: RS, la longitud de un lado

Para los ejercicios 21 y 22 sean P = {paralelogramos}, R = {rectángulos} y H = {rombos}. Clasifique como verdadero o falso:

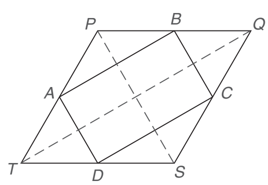
21. $H \subseteq P$ y $R \subseteq P$

22. $R \cup H = P$ y $R \cap H = \emptyset$

En los ejercicios 23 y 24 proporcione los enunciados y las razones faltantes.

23. *Dado:* Cuadrilátero $PQST$ con puntos medios A, B, C y D de los lados

Demuestre: $ABCD$ es un ▱

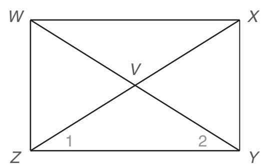


DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. Cuadrilátero $PQST$ con puntos medios A, B, C y D de los lados	1. ?
2. Trace $\overline{TQ}$	2. A través de dos puntos, hay una recta
3. $\overline{AB} \parallel \overline{TQ}$ en $\triangle TPQ$	3. La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es $\parallel$ al tercer lado
4. $\overline{DC} \parallel \overline{TQ}$ en $\triangle TSQ$	4. ?
5. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	5. ?
6. Trace $\overline{PS}$	6. ?
7. $\overline{AD} \parallel \overline{PS}$ en $\triangle TSP$	7. ?
8. $\overline{BC} \parallel \overline{PS}$ en $\triangle PSQ$	8. ?
9. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	9. ?
10. ?	10. Si los dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son $\parallel$ el cuadrilátero es un ▱

24. *Dado:* Rectángulo $WXYZ$ con diagonales $\overline{WY}$ y $\overline{XZ}$

Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 2$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. ?	2. Las diagonales de un rectángulo son $\cong$
3. $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$	3. Los lados opuestos de un rectángulo son $\cong$
4. $\overline{ZY} \cong \overline{ZY}$	4. ?
5. $\triangle XZY \cong \triangle WYZ$	5. ?
6. ?	6. ?

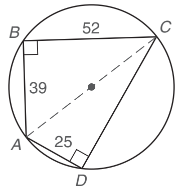
25. ¿Qué tipo(s) de cuadrilátero(s) es (son) necesariamente cíclico(s)?

a) Un cuadrado b) Un paralelogramo

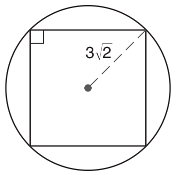
26. ¿Qué tipo(s) de cuadriláteros(s) es (son) necesariamente cíclico (s)?

a) Una cometa b) Un rectángulo

27. Encuentre el perímetro del cuadrilátero cíclico que se muestra.



28. Encuentre el perímetro del cuadrado que se muestra.



En los ejercicios 29 al 31 explique por qué cada enunciado es verdadero.

29. Todos los ángulos de un rectángulo son ángulos rectos.

30. Todos los lados de un rombo son congruentes.

31. Todos los lados de un cuadrado son congruentes.

En los ejercicios 32 al 37 escriba una demostración formal de cada teorema.

32. Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.

33. Una diagonal de un rombo biseca dos ángulos del rombo.

34. Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, el paralelogramo es un rectángulo.

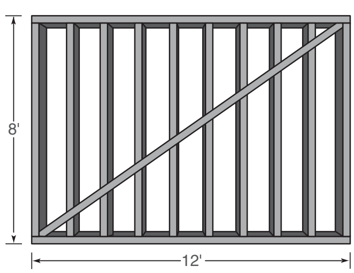
35. Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, el paralelogramo es un rombo.

36. Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes y perpendiculares, el paralelogramo es un cuadrado.

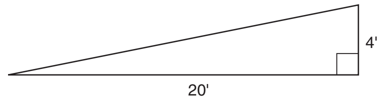
37. Si los puntos medios de los lados de un rectángulo se unen en orden, el cuadrilátero que se forma es un rombo.

En los ejercicios 38 y 39 necesitará utilizar la función raíz cuadrada ($\sqrt{\ }$) de su calculadora.

38. Un muro de 12 pies de longitud y 8 pies de altura tiene un refuerzo triangular a lo largo de la diagonal. Utilice una calculadora para aproximar la longitud del refuerzo hasta la décima más cercana de 1 pie.



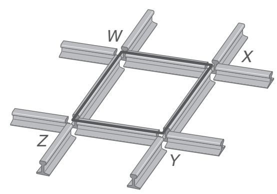
39. Una rampa peatonal desarrolla 20 pies en sentido horizontal mientras se eleva 4 pies. Utilice una calculadora para aproximar su longitud hasta la décima más cercana de 1 pie.



40. a) Argumente que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo recto es equidistante a los tres vértices del triángulo. Parta del hecho de que las diagonales congruentes de un rectángulo se bisecan entre sí. Asegúrese de aportar un dibujo.

b) Utilice la relación del inciso (a) para encontrar CM, la longitud de la mediana para la hipotenusa del $\triangle ABC$ rectángulo, en donde $m\angle C = 90°$, $AC = 6$ y $BC = 8$.

41. Dos conjuntos de rieles (vías de ferrocarril igualmente espaciadas) se intersecan pero no a ángulos rectos. Siendo tan específico como sea posible, indique qué tipo de cuadrilátero $WXYZ$ se forma.



42. En el cuadrado $ABCD$ (no se muestra), el punto E se encuentra en el lado $\overline{DC}$. Si $AB = 8$ y $AE = 10$, encuentre BE.

43. En el cuadrado $ABCD$ (no se muestra), el punto E se encuentra en el interior de $ABCD$ de tal manera que el $\triangle ABE$ es un triángulo equilátero. Encuentre $m\angle DEC$.

4.4 El trapezoide

CONCEPTOS CLAVE

Trapezoide	Catetos	Mediana
Bases	Ángulos base	Trapezoide isósceles

DEFINICIÓN

Un **trapezoide** es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos.

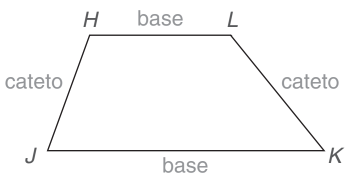


Figura 4.32

En la figura 4.32 se muestra el trapezoide $HJKL$, en el cual $\overline{HL} \parallel \overline{JK}$. Los lados paralelos $\overline{HL}$ y $\overline{JK}$ son **bases** y los lados no paralelos $\overline{HJ}$ y $\overline{LK}$ son **catetos**. Puesto que $\angle J$ y $\angle K$ tienen $\overline{JK}$ como un lado, ambos son un par de **ángulos base** del trapezoide; $\angle H$ y $\angle L$ también son un par de ángulos base ya que $\overline{HL}$ es una base.

Cuando los puntos medios de los dos catetos de un trapezoide se unen, el segmento de recta resultante se conoce como **mediana** del trapezoide. Dado que M y N son los puntos medios de los catetos $\overline{HJ}$ y $\overline{LK}$ en el trapezoide $HJKL$, $\overline{MN}$ es la mediana del trapezoide. [Vea la figura 4.33(a).]

Si dos catetos de un trapezoide son congruentes, el trapezoide se conoce como **trapezoide isósceles**. En la figura 4.33(b) $RSTV$ es un **trapezoide isósceles** ya que $\overline{RV} \cong \overline{ST}$ y $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$.

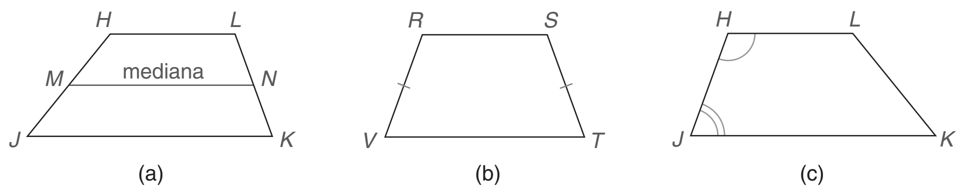


Figura 4.33

Recuerde

Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos internos en el mismo lado de la transversal son suplementarios.

Cada trapezoide contiene dos pares de ángulos internos consecutivos que son suplementarios. Cada uno de estos pares de ángulos se forman cuando las rectas paralelas se cortan por una transversal. En la figura 4.33(c), los ángulos H y J son suplementarios, como lo son los ángulos L y K. Vea el "Recuerde" a la izquierda.

EJEMPLO 1

En la figura 4.32 suponga que $m\angle H = 107°$ y $m\angle K = 58°$. Encuentre $m\angle J$ y $m\angle L$.

Solución Como $\overline{HL} \parallel \overline{JK}$, los $\angle$s H y J son ángulos suplementarios, como lo son los $\angle$s L y K. Entonces $m\angle H + m\angle J = 180$ y $m\angle L + m\angle K = 180$. La sustitución conduce a $107 + m\angle J = 180$ y $m\angle L + 58 = 180$, por tanto $m\angle J = 73°$ y $m\angle L = 122°$. ■

DEFINICIÓN

Una **altura** de un trapezoide es un segmento de recta desde un vértice de una base del trapezoide perpendicular hasta la base opuesta (o hasta una extensión de esa base).

En la figura 4.34, $\overline{HX}$, $\overline{LY}$, $\overline{JP}$ y $\overline{KQ}$ son las alturas del trapezoide *HJKL*. La longitud de cualquier altura de *HJKL* se denomina *altura* del trapezoide.

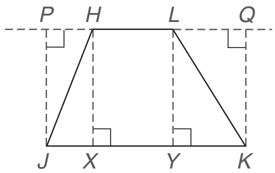
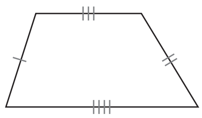


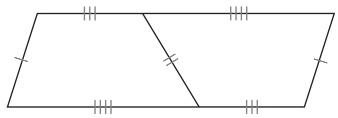
Figura 4.34

GEE
Ejercicios 1-6

Descubra

De una hoja de papel recorte dos trapezoides que sean copias uno del otro. Para efectuar esto, sostenga dos piezas de papel juntas y corte una vez a la izquierda y una vez a la derecha. Tome el segundo trapezoide y voltéelo de manera que coincidan un par de catetos congruentes. ¿Qué tipo de cuadrilátero se formó?





RESPUESTA
Paralelogramo

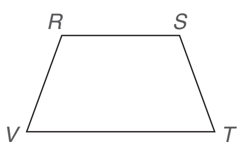
La actividad anterior puede proporcionar una visión para una cantidad de teoremas que comprendan un trapezoide.

TEOREMA 4.4.1
Los ángulos base de un trapezoide isósceles son congruentes.

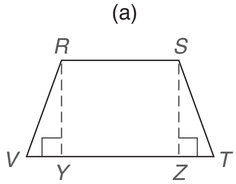
EJEMPLO 2

Estudie la demostración gráfica del teorema 4.4.1

DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA 4.4.1



(a)



(b)

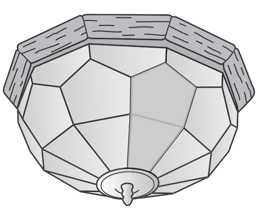
Figura 4.35

DADO: Trapezoide *RSTV* con $\overline{RV} \cong \overline{ST}$ y $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$ [Vea la figura 4.35(a)]

DEMUESTRE: $\angle V \cong \angle T$ y $\angle R \cong \angle S$

DEMOSTRACIÓN: Al trazar $\overline{RY} \perp \overline{VT}$ y $\overline{SZ} \perp \overline{VT}$, se observa que $\overline{RY} \cong \overline{SZ}$ (teorema 4.1.6). Por *HC* $\triangle RYV \cong \triangle SZT$ por *HC* tanto $\angle V \cong \angle T$ (PCTCC), $\angle R \cong \angle S$ en la figura 4.35(a) debido a que estos ángulos son suplementarios de los ángulos congruentes $\angle V$ y $\angle T$ ■

Geometría en el mundo real



Algunos de los paneles de cristal y de las piezas de ornato de la lámpara son trapezoides isósceles. Otros paneles de cristal son pentágonos.

El enunciado siguiente es un corolario del teorema 4.4.1. Su demostración se deja para el estudiante.

COROLARIO 4.4.2

Las diagonales de un trapezoide isósceles son congruentes.

Si las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se mostraran en la figura 4.36 (a la izquierda) serían congruentes.

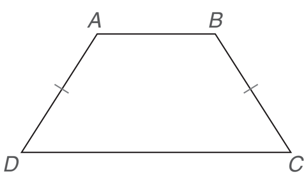


Figura 4.36

EJEMPLO 3

Dado el trapezoide isósceles $ABCD$ con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (vea la figura 4.36):

a) Encuentre las medidas de los ángulos de $ABCD$ si $m\angle A = 12x + 30$ y $m\angle B = 10x + 46$.
b) Encuentre la longitud de cada diagonal (que no se muestran) si se sabe que $AC = 2y - 5$ y $BD = 19 - y$.

Solución

a) Debido a que $m\angle A = m\angle B$, $12x + 30 = 10x + 46$, por tanto, $2x = 16$ y $x = 8$. Entonces $m\angle A = 12(8) + 30$ o $126°$ y $m\angle B = 10(8) + 46$ o $126°$. Restando $(180 - 126 = 54)$, se determinan los suplementos de los $\angle$s A y B. Es decir, $m\angle C = m\angle D = 54°$.

b) Por el corolario 4.4.2, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, por tanto $2y - 5 = 19 - y$. Entonces $3y = 24$ y $y = 8$. Por tanto, $AC = 2(8) - 5 = 11$. Además, $BD = 19 - 8 = 11$. ■

Para complementar se enuncian dos propiedades del trapezoide isósceles.

1. Un trapezoide isósceles tiene una recta de simetría; el eje de simetría es el bisector perpendicular de cualquier base.
2. Un trapezoide isósceles es cíclico; el centro del círculo que contiene los cuatro vértices del trapezoide es el punto de intersección de los bisectores perpendiculares de cualesquiera dos lados consecutivos (o de los dos catetos).

La demostración del teorema siguiente se deja como el ejercicio 33. En los ejemplos 4 y 5 se aplica el teorema 4.4.3.

TEOREMA 4.4.3

La longitud de la mediana de un trapezoide es igual a la mitad de la suma de las longitudes de las dos bases.

NOTA: La longitud de la mediana de un trapezoide es el "promedio" de las longitudes de las bases. Donde m es la longitud de la mediana y b_1 y b_2 son las longitudes de las bases, $m = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$.

EJEMPLO 4

En el trapezoide $RSTV$ en la figura 4.37, $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$ y M y N son los puntos medios de $\overline{RV}$ y $\overline{TS}$, respectivamente. Encuentre la longitud de la mediana $\overline{MN}$ si $RS = 12$ y $VT = 18$. ■

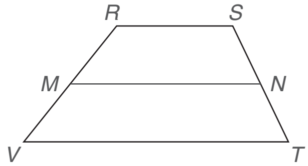


Figura 4.37

Solución Utilizando el teorema 4.4.3, $MN = \frac{1}{2}(RS + VT)$, por tanto $MN = \frac{1}{2}(12 + 18)$, o $MN = \frac{1}{2}(30)$. Entonces, $MN = 15$. ■

EJEMPLO 5

En el trapezoide $RSTV$, $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$ y M y N son los puntos medios de $\overline{RV}$ y $\overline{TS}$, respectivamente (vea la figura 4.37). Determine MN, RS y VT si $RS = 2x$, $MN = 3x - 5$ y $VT = 2x + 10$.

Solución Utilizando el teorema 4.4.3, se tiene que $MN = \frac{1}{2}(RS + VT)$, por tanto

$$3x - 5 = \tfrac{1}{2}[2x + (2x + 10)] \qquad \text{o} \qquad 3x - 5 = \tfrac{1}{2}(4x + 10)$$

Entonces $3x - 5 = 2x + 5$ y $x = 10$. Ahora $RS = 2x = 2(10)$, por tanto $RS = 20$. Además, $MN = 3x - 5 = 3(10) - 5$; por tanto, $MN = 25$. Por último, $VT = 2x + 10$; por tanto, $VT = 2(10) + 10 = 30$.

NOTA: Como comprobación, $MN = \frac{1}{2}(RS + VT)$ conduce al enunciado verdadero $25 = \frac{1}{2}(20 + 30)$. ■

TEOREMA 4.4.4

La media de un trapezoide es paralela a cada base.

GEE
Ejercicios 7-12

La demostración del teorema 4.4.4 se deja como el ejercicio 28. En la figura $\overline{MN} \parallel \overline{RS}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{VT}$.

Los teoremas 4.4.5 y 4.4.6 permiten demostrar que un cuadrilátero con ciertas características es un trapezoide isósceles. Estos teoremas se enuncian a continuación:

TEOREMA 4.4.5

Si dos ángulos base de un trapezoide son congruentes, el trapezoide es un trapezoide isósceles.

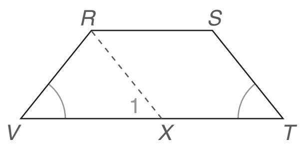


Figura 4.38

Considere el plan siguiente para demostrar el teorema 4.4.5. Vea la figura 4.38.

DADO: Trapezoide $RSTV$ con $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$ y $\angle V \cong \angle T$

DEMUESTRE: $RSTV$ es un trapezoide isósceles

PLAN: Trace una recta auxiliar $\overline{RX}$ paralela a $\overline{ST}$. Ahora demuestre que $\angle V \cong \angle 1$, por tanto $\overline{RV} \cong \overline{RX}$ en el $\triangle RXV$. Pero $\overline{RX} \cong \overline{ST}$ en el paralelogramo $RXTS$, por tanto $\overline{RV} \cong \overline{ST}$ y $RSTV$ es isósceles.

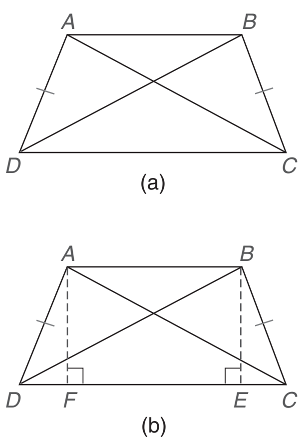


Figura 4.39

TEOREMA 4.4.6

Si las diagonales de un trapezoide son congruentes, el trapezoide es un trapezoide isósceles.

El teorema 4.4.6 tiene una demostración extensa, para la cual se ofrece un bosquejo.

DADO: Trapezoide $ABCD$ con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DB}$ [vea la figura 4.39(a) de la página 208].

DEMUESTRE: $ABCD$ es un trapezoide isósceles.

PLAN: Trace $\overline{AF} \perp \overline{DC}$ y $\overline{BE} \perp \overline{DC}$ en la figura 4.39(b). Ahora se puede demostrar que $ABEF$ es un rectángulo. Puesto que $\overline{AF} \cong \overline{BE}$, $\triangle AFC \cong \triangle BED$

GEE
Ejercicios 13-15

por HC. Entonces $\angle ACD \cong \angle BDC$ por PCTCC. Con $\overline{DC} \cong \overline{DC}$ por identidad. $\triangle ACD \cong \triangle BDC$ por LAL. Ahora $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ debido a que éstas son partes correspondientes del $\triangle ACD \cong \triangle BDC$. Entonces el trapezoide $ABCD$ es isósceles.

Por varias razones la demostración del teorema final es un reto. Al observar las rectas paralelas a, b y c en la figura 4.40, se ven trapezoides como $ABED$ y $BCFE$. Sin embargo, en la demostración (cuyo "plan" se proporciona) se utilizan rectas auxiliares, paralelogramos y triángulos congruentes.

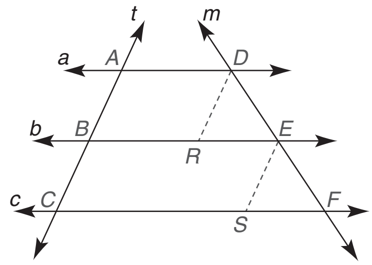


Figura 4.40

TEOREMA 4.4.7

Si tres (o más) rectas paralelas intersecan segmentos de recta congruentes de una transversal, entonces intersecan segmentos de recta congruentes en cualquier transversal.

DADO: Rectas paralelas a, b y c cortadas por una transversal t de manera que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$; además la transversal m en la figura 4.40

DEMUESTRE: $\overline{DE} \cong \overline{EF}$

PLAN: A través de D y E, trace $\overline{DR} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{ES} \parallel \overline{AB}$. En cada $\square$ formado, $\overline{DR} \cong \overline{AB}$ y $\overline{ES} \cong \overline{BC}$. Dado $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, se deduce que $\overline{DR} \cong \overline{ES}$. AAL, se puede demostrar que $\triangle DER \cong \triangle EFS$, entonces $\overline{DE} \cong \overline{EF}$ por PCTCC.

EJEMPLO 6

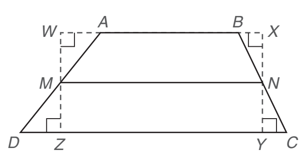
GEE
Ejercicios 16, 17

En la figura 4.40, $a \parallel b \parallel c$. Si $AB = BC = 7.2$ y $DE = 8.4$, encuentre EF.

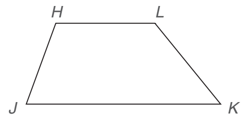
Solución Utilizando el teorema 4.4.7, se determina que $EF = 8.4$. ■

Ejercicios 4.4

1. Encuentre las medidas de los ángulos restantes del trapezoide $ABCD$ (no se muestra) si $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $m\angle A = 58°$ y $m\angle C = 125°$.
2. Encuentre las medidas de los ángulos restantes del trapezoide $ABCD$ (no se muestra) si $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $m\angle B = 63°$ y $m\angle D = 118°$.
3. Si las diagonales de un trapezoide son congruentes, ¿qué puede concluir acerca del trapezoide?
4. Si dos de los ángulos base de un trapezoide son congruentes, ¿qué tipo de trapezoide es?
5. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma cuando los puntos medios de los lados de un trapezoide isósceles se unen en orden?
6. En el trapezoide $ABCD$, $\overline{MN}$ es la mediana. Sin escribir una demostración formal explique por qué $MN = \frac{1}{2}(AB + DC)$.



7. Si $\angle H$ y $\angle J$ son suplementarios, ¿qué tipo de cuadrilátero es $HJKL$?

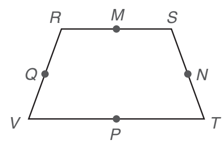


Ejercicios 7-8

8. Si $\angle H$ y $\angle J$ son suplementarios en $HJKL$, ¿también $\angle K$ y $\angle L$ son necesariamente suplementarios?

Para los ejercicios 9 y 10 considere el trapezoide isósceles RSTV con $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$ *y puntos medios M, N, P y Q de los lados.*

9. ¿Tendría $RSTV$ simetría respecto a
a) $\overleftrightarrow{MP}$? b) $\overleftrightarrow{QN}$?

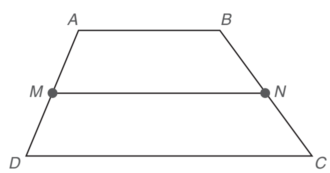


Ejercicios 9, 10

10. a) ¿Es $QN = \frac{1}{2}(RS + VT)$?

b) ¿Es $MP = \frac{1}{2}(RV + ST)$?

En los ejercicios 11 al 16 el esquema muestra el trapezoide ABCD con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$*; además, M y N son los puntos medios de* $\overline{AD}$ *y* $\overline{BC}$*, respectivamente.*



Ejercicios 11-16

11. *Dado:* $AB = 7.3$ y $DC = 12.1$
Encuentre: MN

12. *Dado:* $MN = 6.3$ y $DC = 7.5$
Encuentre: AB

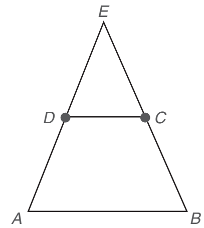
13. *Dado:* $AB = 8.2$ y $MN = 9.5$
Encuentre: DC

14. *Dado:* $AB = 7x + 5$, $DC = 4x - 2$ y $MN = 5x + 3$
Encuentre: x

15. *Dado:* $AB = 6x + 5$ y $DC = 8x - 1$
Encuentre: MN, en términos de x

16. *Dado:* $AB = x + 3y + 4$ y $DC = 3x + 5y - 2$
Encuentre: MN, en términos de x y y

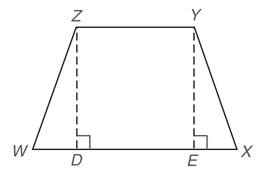
17. *Dado:* $ABCD$ es un trapezoide isósceles. (Vea la figura para el ejercicio 18.)
Demuestre: $\triangle ABE$ es isósceles



Ejercicios 17, 18

18. *Dado:* $\triangle ABE$ isósceles con $\overline{AE} \cong \overline{BE}$; además, D y C son puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$, respectivamente
Demuestre: $ABCD$ es un trapezoide isósceles

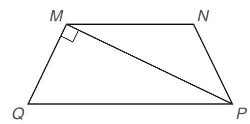
19. En el trapezoide isósceles $WXYZ$ con bases $\overline{ZY}$ y $\overline{WX}$, $ZY = 8$, $YX = 10$ y $WX = 20$. Encuentre h (la longitud de $\overline{ZD}$ o $\overline{YE}$).



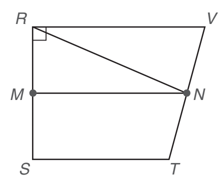
Ejercicios 19, 20

20. En el trapezoide $WXYZ$ con bases $\overline{ZY}$ y $\overline{WX}$, $ZY = 12$, $YX = 10$, $WZ = 17$ y $ZD = 8$. Encuentre la longitud de la base $\overline{WX}$.

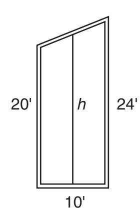
21. En el trapezoide isósceles $MNPQ$ con $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, diagonal $\overline{MP} \perp \overline{MQ}$. Si $PQ = 13$ y $NP = 5$, ¿cuál es la longitud de la diagonal $\overline{MP}$?



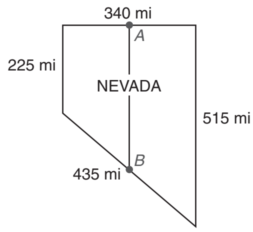
22. En el trapezoide $RSTV$, $\overline{RV} \parallel \overline{ST}$, $m\angle SRV = 90°$ y M y N son puntos medios de los lados no paralelos. Si $ST = 13$, $RV = 17$ y $RS = 16$, ¿cuál es la longitud de $\overline{RN}$?



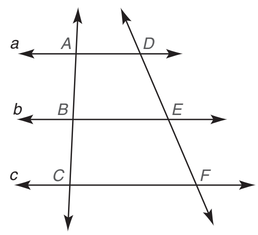
23. Cada sección vertical de un puente suspendido tiene la forma de un trapezoide. Como soporte adicional, se coloca un cable a la mitad como se muestra. Si las dos columnas verticales tienen alturas de 20 y 24 pies y la sección tiene un ancho de 10 pies, ¿cuál será la altura del cable?



24. El estado de Nevada tiene la forma aproximada de un trapezoide con estas dimensiones para sus límites: 340 millas al norte, 515 millas al este, 435 millas al sur y 225 millas al oeste. Si A y B son puntos ubicados a la mitad entre los límites norte y sur, ¿cuál es la distancia aproximada de A a B?



25. En la figura, $a \parallel b \parallel c$ y B es el punto medio de $\overline{AC}$. Si $AB = 2x + 3$, $BC = x + 7$ y $DE = 3x + 2$, encuentre la longitud de $\overline{EF}$.



Ejercicios 25, 26

26. En la figura, $a \parallel b \parallel c$ y B es el punto medio de $\overline{AC}$. Si $AB = 2x + 3y$, $BC = x + y + 7$, $DE = 2x + 3y + 3$ y $EF = 5x - y + 2$, encuentre x y y.

En los ejercicios 27 al 33 complete una demostración formal.

27. Las diagonales de un trapezoide isósceles son congruentes.

28. La mediana de un trapezoide es paralela a cada base.

29. Si dos ángulos consecutivos de un cuadrilátero son suplementarios, el cuadrilátero es un trapezoide.

30. Si dos ángulos base de un trapezoide son congruentes, el trapezoide es un trapezoide isósceles.

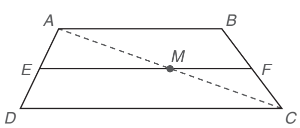
31. Si tres rectas paralelas intersecan segmentos congruentes en una transversal, entonces intersecan segmentos congruentes en cualquier transversal.

32. Si los puntos medios de los lados de un trapezoide isósceles se unen en orden, entonces el cuadrilátero que se forma es un rombo.

33. *Dado:* $\overline{EF}$ es la mediana del trapezoide $ABCD$

Demuestre: $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

(SUGERENCIA: Utilizando el teorema 4.4.7, demuestre que M es el punto medio de $\overline{AC}$. Para el $\triangle ADC$ y el $\triangle CBA$, aplique el teorema 4.2.5.)



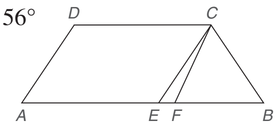
Ejercicios 33-35

Para los ejercicios 34 y 35 $\overline{EF}$ es la mediana del trapezoide ABCD.

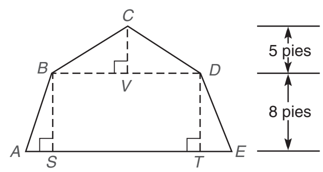
34. En la figura para el ejercicio 33 suponga que $AB = 12.8$ y $DC = 18.4$. Encuentre:
a) MF c) EF
b) EM d) Si $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

35. En la figura para el ejercicio 33 suponga que $EM = 7.1$ y $MF = 3.5$. Encuentre:
a) AB c) EF
b) DC d) Si $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

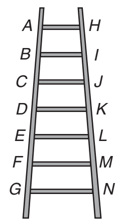
36. *Dado:* $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
$m\angle A = m\angle B = 56°$
$\overline{CE} \parallel \overline{DA}$ y $\overrightarrow{CF}$ biseca $\angle DCB$
Demuestre: $m\angle FCE$



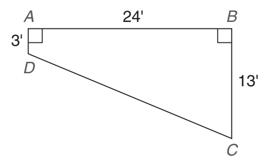
37. En un techo estilo holandés el hastial de un granero tiene la forma de un trapezoide isósceles coronado por un triángulo isósceles. Si $AE = 30$ pies y $BD = 24$ pies, encuentre:
a) AS b) VD c) CD d) DE



38. Los peldaños sucesivos en una escalera forman trapezoides isósceles con los lados, $AH = 2$ pies y $BI = 2.125$ pies.
a) Encuentre GN, el ancho del peldaño inferior
b) ¿Cuál peldaño es la mediana del trapezoide con bases $\overline{AH}$ y $\overline{GN}$?



39. El muro lateral de una alberca interior con longitud de 24 pies tiene la forma de un trapezoide. ¿Cuál es la profundidad de la alberca en su parte central?



40. Para la alberca interior que se muestra en el ejercicio 39, encuentre la longitud del fondo inclinado del punto D al punto C.

***41.** En el trapezoide $ABCD$ (no se muestra), $m\angle A = \frac{x}{2} + 10$, $m\angle B = \frac{x}{3} + 50$ y $m\angle C = \frac{x}{5} + 50$. Encuentre todos los valores posibles de x.

***42.** En el trapezoide $ABCD$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ y $\overline{BC} \perp \overline{AC}$. Si $DA = 17$, $AB = 6$ y $BC = 8$, encuentre el perímetro del $\triangle DAC$.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

Bosquejo de Tales

Uno de los contribuidores más significativos para el desarrollo de la geometría fue el matemático Tales de Mileto (625-547 a.C.). A Tales se le considera el "padre de la geometría" ya que fue el primero en organizar el pensamiento geométrico y en utilizar el método deductivo como un medio para comprobar proposiciones (teoremas). No es sorprendente que Tales haya hecho descubrimientos originales en geometría. Igual de importante que sus descubrimientos fue su persistencia en verificar las afirmaciones de sus predecesores. En este libro encontrará que proposiciones como las siguientes sólo son una parte de las que se le atribuyen.

Capítulo 1: Si dos rectas se intersecan, los ángulos opuestos (verticales) que se forman son iguales.
Capítulo 3: Los ángulos base de un triángulo isósceles son iguales.
Capítulo 5: Los lados de triángulos semejantes son proporcionales.
Capítulo 6: Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

El conocimiento de Tales sobre la geometría fue igualado por la sabiduría que demostró en asuntos cotidianos. Por ejemplo, es conocido por haber medido la altura de la Gran Pirámide de Egipto comparando las longitudes de las sombras que proyectaban la pirámide y su propio personal. Tales también utilizó su percepción de la geometría para medir las distancias desde la costa hasta los barcos en el mar.

Tal vez la historia más interesante en torno a Tales fue la que relata Esopo (conocido por sus fábulas). Al parecer Tales iba camino al mercado con sus bestias de carga portando sacos con sal. Casi por accidente, una de las mulas descubrió que al entrar en el arroyo al que se le condujo para beber agua su carga se reducía en gran medida; por supuesto, esto se debía a la disolución de la sal en los sacos. En viajes subsiguientes, la misma mula continuó aligerando su carga entrando al arroyo. Tales pronto se dio cuenta de que tenía que hacer algo (¡cualquier cosa!) para modificar el comportamiento de la mula. Al prepararse para el siguiente viaje, llenó con esponjas los sacos de la mula amañada. Cuando la mula realizó su acostumbrada zambullida, descubrió que su carga era más pesada que antes. Pronto la mula comprendió que debía mantener los sacos fuera del agua. De esta forma se dice que Tales desalentó a la mula de permitir que la sal se disolviera en el agua en viajes posteriores al mercado.

PERSPECTIVA DE APLICACIÓN

Números al cuadrado como sumas

En álgebra existe un principio que por lo general se "demuestra" mediante un método muy sofisticado conocido como inducción matemática. Sin embargo, la comprobación del principio es mucho más simple cuando se proporciona una justificación geométrica.

En los párrafos siguientes:

1. Se enuncia el principio
2. Se ilustra el principio
3. Se proporciona la justificación geométrica para el principio

> Donde n es un número contable, la suma de los primeros n números contables impares positivos es n^2.

El principio enunciado arriba se ilustra para varias elecciones de n.

Cuando $n = 1$, $1 = 1^2$
Cuando $n = 2$, $1 + 3 = 2^2$ o 4
Cuando $n = 3$, $1 + 3 + 5 = 3^2$ o 9
Cuando $n = 4$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ o 16.

En la explicación geométrica para este principio se utiliza un efecto *envolvente*. Estudie los diagramas en la figura 4.41.

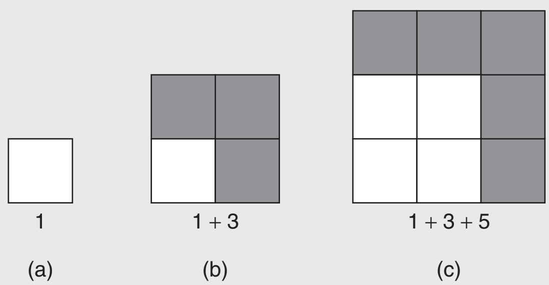


Figura 4.41

Dado un cuadrado unitario (uno con lados de longitud 1), se construye un segundo cuadrado al envolver 3 cuadrados unitarios alrededor del primer cuadrado unitario; en la figura 4.41(b) la "envolvente" se indica por 3 cuadrados sombreados. Ahora, para el segundo cuadrado (lados de longitud 2) formamos el cuadrado siguiente envolviendo 5 cuadrados unitarios alrededor de dicho cuadrado; vea la figura 4.41(c).

La figura siguiente en la secuencia de cuadrados muestra que

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 \text{ o } 16$$

En el "envolvimiento" se enfatiza que el número siguiente en la suma es un número impar. El método de "envolvimiento" agrega $2 \times 3 + 1$ o 7 cuadrados unitarios en la figura 4.42. Cuando se construye cada cuadrado secuencial, siempre se agrega un número impar de cuadrados unitarios como en la figura 4.42.

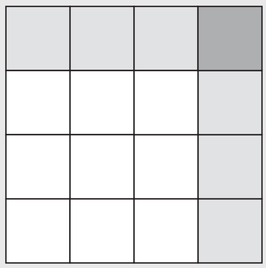


Figura 4.42

PROBLEMA

Utilice el siguiente principio para responder cada una de las siguientes preguntas:

Si n es un número contable, la suma de los primeros números contables enteros impares positivos es n^2.

a) Encuentre la suma de los primeros enteros impares positivos; es decir, determine $1 + 3 + 5 + 7 + 9$.
b) Encuentre la suma de los primeros seis enteros impares positivos.
c) ¿Cuántos enteros impares positivos se agregaron para obtener 81?

Soluciones

a) 5^2 o 25 b) 6^2 o 36 c) 9 ya que $9^2 = 81$ ■

Resumen

UNA VISTA RETROSPECTIVA AL CAPÍTULO 4

El objetivo de este capítulo fue desarrollar las propiedades de cuadriláteros, incluyendo tipos especiales de cuadriláteros como el paralelogramo, el rectángulo y el trapezoide. En la tabla 4.1 de la página 213 se resumen las propiedades de los cuadriláteros.

UNA VISTA PRELIMINAR DEL CAPÍTULO 5

En el siguiente capítulo se definirá semejanza para todos los polígonos con énfasis en los triángulos. El teorema de Pitágoras, que se aplicó en este capítulo, se demostrará en el capítulo 5. Se estudiarán los triángulos rectángulos especiales.

CONCEPTOS CLAVE

4.1

Cuadrilátero • Cuadrilátero oblicuo • Paralelogramo • Diagonales de un paralelogramo • Altura de un paralelogramo

4.2

Cuadriláteros que son paralelogramos • Rectángulo • Cometa

4.3

Rectángulo • Cuadrado • Rombo • Teorema de Pitágoras

4.4

Trapezoides (bases, catetos, ángulos base, mediana) • Trapezoide isósceles

TABLA 4.1 Una vista general del capítulo 4

▶ Propiedades de los cuadriláteros

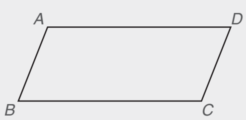
	PARALELOGRAMO	*RECTÁNGULO*	*ROMBO*	*CUADRADO*	*COMETA*	*TRAPEZOIDE*	*TRAPEZOIDE ISÓSCELES*
Lados congruentes	Ambos pares de lados opuestos	Ambos pares de lados opuestos	Los cuatro lados	Los cuatro lados	Los dos pares de lados adyacentes	Posible; también vea el trapezoide isósceles	Par de catetos
Lados paralelos	Ambos pares de lados opuestos	Ambos pares de lados opuestos	Ambos pares de lados opuestos	Ambos pares de lados opuestos	Generalmente ninguno	Par de bases	Par de bases
Lados perpendiculares	Si el paralelogramo es un rectángulo o un cuadrado	Pares consecutivos	Si el rombo es un cuadrado	Pares consecutivos	Posible	Posible	Generalmente ninguno
Ángulos congruentes	Los dos pares de ángulos opuestos	Los cuatro ángulos	Ambos pares de lados opuestos	Los cuatro ángulos	Un par de ángulos opuestos	Posible; también vea el trapezoide isósceles	Cada par de ángulos base
Ángulos suplementarios	Todos los pares de ángulos consecutivos	Cualesquiera dos ángulos	Todos los pares de ángulos consecutivos	Cualesquiera dos ángulos	Posiblemente dos pares	Cada par de ángulos del cateto	Cada par de ángulos del cateto
Relaciones de las diagonales	Se bisecan entre sí	Congruentes: se bisecan entre sí	Perpendiculares; se bisecan entre sí y los ángulos internos	Congruentes; perpendiculares; se bisecan entre sí y los ángulos internos	Perpendiculares; se bisecan entre sí y dos ángulos internos	Intersecan	Congruentes

Capítulo 4 EJERCICIOS DE REPASO

Establezca si los enunciados en los ejercicios de repaso 1 al 12 son siempre verdaderos (S), algunas veces verdaderos (A) o nunca verdaderos (N).

1. Un cuadrado es un rectángulo
2. Si dos de los ángulos de un trapezoide son congruentes, entonces el trapezoide es isósceles.
3. Las diagonales de un trapezoide se bisecan entre sí.
4. Las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares.
5. Un rectángulo es un cuadrado.
6. Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.
7. Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.
8. Los ángulos opuestos de un rombo son congruentes.
9. Las diagonales de un rectángulo son congruentes.
10. Los cuatro lados de una cometa son congruentes.
11. Las diagonales de un paralelogramo son congruentes.
12. Las diagonales de una cometa son bisectores perpendiculares entre sí.

13. *Dado:* $\square ABCD$
$CD = 2x + 3$
$BD = 5x - 4$
Perímetro del $\square ABCD = 96$ cm
Encuentre: Las longitudes de los lados del $\square ABCD$

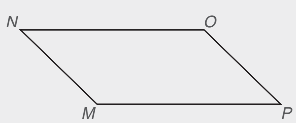


Ejercicios 13, 14

14. *Dado:* $\square ABCD$
$m\angle A = 2x + 6$
$m\angle B = x + 24$
Encuentre: $m\angle C$

15. Las diagonales del $\square ABCD$ (que no se muestra) son perpendiculares. Si una diagonal tiene longitud de 10 y la otra de 24, encuentre el perímetro del paralelogramo.

16. *Dado:* $\square MNOP$
$m\angle M = 4x$
$m\angle O = 2x + 50$
Encuentre: $m\angle M$ y $m\angle P$



Ejercicios 16, 17

17. Utilizando la información del ejercicio 16, determine cuál diagonal ($\overline{MO}$ o $\overline{PN}$) sería mayor.

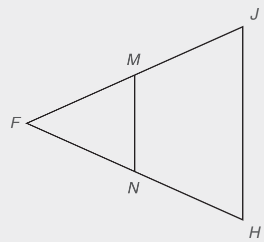
18. En el cuadrilátero $ABCD$, M es el punto medio sólo de $\overline{BD}$ y $\overline{AC} \perp \overline{DB}$ en M. ¿Qué tipo especial de cuadrilátero es $ABCD$?

19. En el trapezoide $DEFG$, $\overline{DE} \parallel \overline{GF}$ y $m\angle D = 108°$. Encuentre las medidas de los otros ángulos en el trapezoide.

20. Una base de un trapezoide tiene longitud de 12.3 cm y la longitud de la otra base es de 17.5 cm. Encuentre la longitud de la mediana del trapezoide.

21. En el trapezoide $MNOP$, $\overline{MN} \parallel \overline{PO}$ y R y S son los puntos medios de $\overline{MP}$ y $\overline{NO}$, respectivamente. Encuentre las longitudes de las bases si $RS = 15$, $MN = 3x + 2$ y $PO = 2x - 7$.

En los ejercicios de repaso 22 al 24 M y N son los puntos medios de $\overline{FJ}$ y $\overline{FH}$, respectivamente.



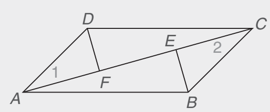
Ejercicios 22-24

22. *Dado:* $\triangle FJH$ isósceles con $\overline{FJ} \cong \overline{FH}$
$FM = 2y + 3$
$NH = 5y - 9$
$JH = 2y$
Encuentre: El perímetro de $\triangle FMN$

23. *Dado:* $JH = 12$
$m\angle J = 80°$
$m\angle F = 60°$
Encuentre: MN, $m\angle FMN$, $m\angle FNM$

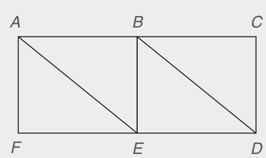
24. *Dado:* $MN = x^2 + 6$
$JH = 2x(x + 2)$
Encuentre: x, MN, JH

25. *Dado:* $ABCD$ es un $\square$
$\overline{AF} \cong \overline{CE}$
Demuestre: $\overline{DF} \parallel \overline{EB}$

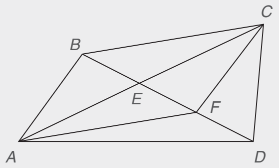


Ejercicio 25

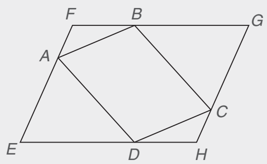
26. *Dado:* $ABEF$ es un rectángulo
$BCDE$ es un rectángulo
$\overline{FE} \cong \overline{ED}$
Demuestre: $\overline{AE} \cong \overline{BD}$ y $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$



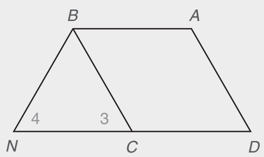
27. *Dado:* $\overline{DE}$ es una mediana del $\triangle ADC$
$\overline{BE} \cong \overline{FD}$
$\overline{EF} \cong \overline{FD}$
Demuestre: $ABCF$ es un $\square$



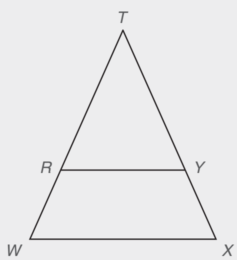
28. *Dado:* $\triangle FAB \cong \triangle HCD$
$\triangle EAD \cong \triangle GCB$
Demuestre: $ABCD$ es un $\square$



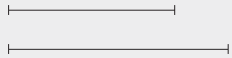
29. *Dado:* $ABCD$ es un paralelogramo
$\overline{DC} \cong \overline{BN}$
$\angle 3 \cong \angle 4$
Demuestre: $ABCD$ es un rombo



30. *Dado:* $\triangle TWX$ es isósceles, con base $\overline{WX}$
$\overline{RY} \parallel \overline{WX}$
Demuestre: $RWXY$ es un trapezoide isósceles



31. Construya un rombo dadas estas longitudes para las diagonales.

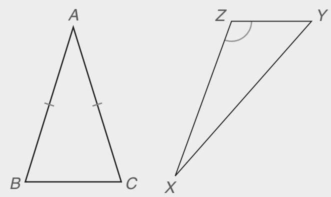


32. Trace el rectángulo $ABCD$ con $AB = 5$ y $BC = 12$.
Incluya las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.
a) ¿Cómo se relacionan $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$?
b) Encuentre la longitud de la diagonal $\overline{AC}$.

33. Trace el rombo $WXYZ$ con diagonales $\overline{WY}$ y $\overline{XZ}$. Deje que $\overline{WY}$ designe la diagonal más grande.
a) ¿Cómo se relacionan las diagonales $\overline{WY}$ y $\overline{XZ}$?
b) ¿Si $WX = 17$ y $XZ = 16$, encuentre la longitud de la diagonal $\overline{WY}$.

34. Considerando paralelogramos, cometas, rectángulos, cuadrados, rombos, trapezoides y trapezoides isósceles, ¿cuáles figuras tienen
a) recta de simetría?
b) punto de simetría?

35. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma cuando el triángulo se refleja a través del lado que se indica?
a) $\triangle ABC$ isósceles a través de $\overline{BC}$
b) $\triangle XYZ$ obtuso a través de $\overline{XY}$

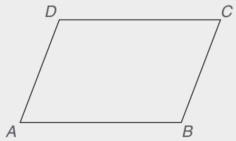


Capítulo 4 EXAMEN

1. Considere el ▱$ABCD$ como se muestra.

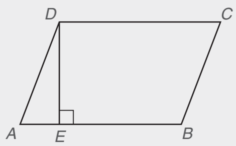
a) ¿Cómo se relacionan $\angle A$ y $\angle C$? ___________

b) ¿Cómo se relacionan $\angle A$ y $\angle B$? ___________

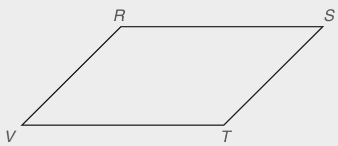


2. En el ▱$RSTV$ (no se muestra), $RS = 5.3$ cm y $ST = 4.1$ cm. Encuentre el perímetro de $RSTV$. ___________

3. En el ▱$ABCD$, $AD = 5$ y $DC = 9$. Si la altura desde el vértice D hasta $\overline{AB}$ tiene una longitud de 4 (es decir, $DE = 4$), encuentre la longitud de $\overline{EB}$. ___________



4. En el ▱$RSTV$, $m\angle S = 57°$. ¿Cuál diagonal $\overline{VS}$ o $\overline{RT}$ tendrá la longitud mayor?



Ejercicios 4, 5

5. En el ▱$RSTV$, $VT = 3x - 1$, $TS = 2x + 1$ y $RS = 4(x - 2)$. Encuentre el valor de x. ___________

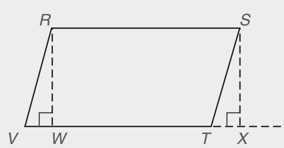
6. Complete cada enunciado:

a) Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados *adyacentes* congruentes, entonces el cuadrilátero es un(a) ___________.

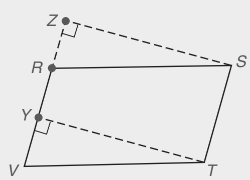
b) Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados *opuestos* congruentes, entonces el cuadrilátero es un(a) ___________.

7. Complete cada enunciado:

a) En el ▱$RSTV$, $\overline{RW}$ es ___________ desde el vértice R hasta la base $\overline{VT}$.



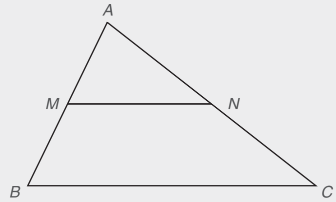
b) Si la altura $\overline{RW}$ de la figura (a) es congruente con la altura $\overline{TY}$ de la figura (b), entonces el ▱$RSTV$ también debe ser un ___________.



8. En el $\triangle ABC$, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y N es el punto medio de $\overline{AC}$.

a) ¿Cómo se relacionan los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{BC}$? ___________

b) Utilice una ecuación para establecer cómo se relacionan las longitudes MN y BC. ___________

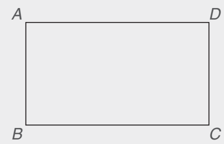


Ejercicios 8–10

9. En el $\triangle ABC$, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y N es el punto medio de $\overline{AC}$. Si $MN = 7.6$ cm, encuentre BC. ___________

10. En el $\triangle ABC$, M es el punto medio de $\overline{AB}$ y N es el punto medio de $\overline{AC}$. Si $MN = 3x - 11$ y $BC = 4x + 24$, encuentre el valor de x. ___________

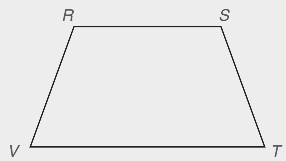
11. En el rectángulo $ABCD$, $AD = 12$ y $DC = 5$. Encuentre la longitud de la diagonal $\overline{AC}$ (que no se muestra). ___________



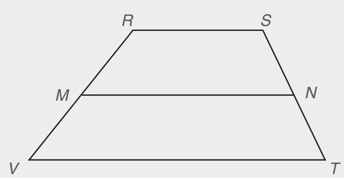
12. En el trapezoide $RSTV$, $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$.

a) ¿Cuáles lados son los catetos de $RSTV$? ___________

b) Nombre dos ángulos que son suplementarios. ___________



13. En el trapezoide $RSTV$, $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$ y $\overline{MN}$ es la mediana. Encuentre la longitud MN si $RS = 12.4$ pulg y $VT =$ 16.2 pulg.



Ejercicios 13, 14

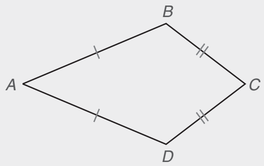
14. En el trapezoide $RSTV$ del ejercicio 13, $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$ y $\overline{MN}$ es la mediana. Encuentre x si $VT = 2x + 9$, $MN = 6x - 13$ y $RS = 15$. ___________

15. Complete la demostración del teorema siguiente:

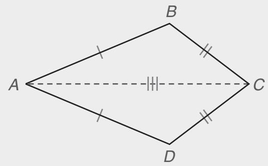
"En una cometa, un par de ángulos opuestos son congruentes".

Dado: Cometa $ABCD$; $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$

Demuestre: $\angle B \cong \angle D$



(a)



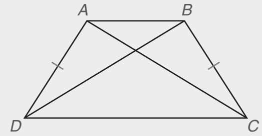
(b)

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ____________________	1. ____________________
2. Trace $\overline{AC}$.	2. A través de dos puntos hay exactamente una recta
3. ____________________	3. Identidad
4. $\triangle ACD \cong \triangle ACB$	4. ____________________
5. ____________________	5. ____________________

16. Complete la demostración del teorema siguiente:

"Las diagonales de un trapezoide de isósceles son congruentes".



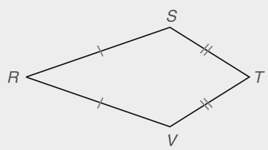
Dado: Trapezoide $ABCD$ con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

Demuestre: $\overline{AC} \cong \overline{DB}$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ____________________	1. ___________
2. $\angle ADC \cong \angle BCD$	2. Los $\angle$s base de un triángulo isósceles son ________
3. $\overline{DC} \cong \overline{DC}$	3. ____________________
4. $\triangle ADC \cong \triangle BCD$	4. ____________________
5. ____________________	5. PCTCC

17. En la cometa $RSTV$, $RS = 2x - 4$, $ST = x - 1$, $TV = y - 3$ y $RV = y$. Encuentre el perímetro de $RSTV$.



Triángulos semejantes

Capítulo 5

© Gregor Schuster/Getty Images

CONTENIDO

Hay un DVD disponible que cuenta con un video con explicación de conceptos, problemas de ejemplo y aplicaciones. Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

¡Talentoso! El trabajo manual de un hábil artesano se manifiesta en estas muñecas rusas, una dentro de otra, que tienen la misma forma pero diferentes tamaños. Debido a su diseño cada muñeca se puede colocar una dentro de otra, de manera que todas queden anidadas en conjunto. Tanto el exterior como las figuras pintadas en ellas son similares. En la naturaleza las hojas del lirio acuático tienen la misma forma pero diferentes tamaños. En el mundo cotidiano los recipientes cilíndricos que se encuentran en los anaqueles de los almacenes pueden tener la misma forma pero tamaños distintos. En todos estos casos, una figura es solamente una ampliación de la otra. En geometría se dice que las dos figuras son *semejantes*. En las secciones 5.2 y 5.3 se encuentran más ilustraciones de figuras semejantes bi y tridimensionales. Las soluciones para algunas aplicaciones en éste y en capítulos posteriores conducen a ecuaciones cuadráticas. Un repaso de los métodos que se emplean para resolver ecuaciones cuadráticas se encuentra en el apéndice A.4 de este libro.

5.1 Relaciones proporcionales, razones y proporciones

CONCEPTOS CLAVE

Relación proporcional
Razón
Proporción
Extremos
Medios
Propiedad medios-extremos
Medio geométrico
Relación proporcional extendida
Proporción extendida

Para administrar las aplicaciones de la geometría que se encuentran a lo largo de este capítulo y más adelante con frecuencia se necesitan los conceptos y técnicas estudiados en la sección 5.1.

Una **relación proporcional** es el cociente $\frac{a}{b}$ (donde $b \neq 0$) que proporciona una comparación entre los números a y b. Debido a que cada fracción indica una división, cada fracción representa una relación. Lea "a a b"; la relación proporcional en ocasiones se escribe en la forma $a{:}b$.

En general se prefiere proporcionar la relación en la forma más simplificada, así en la relación 6 a 8 se reduciría (en forma de fracción) de $\frac{6}{8}$ a $\frac{3}{4}$. Si las unidades de medida se encuentran en una relación, estas unidades deben ser **conmensurables** (convertibles a la misma unidad de medida). Cuando se simplifica la relación de dos cantidades que se expresan en la misma unidad, se elimina la unidad común en el proceso. Si dos cantidades no se pueden comparar debido a que no es posible una unidad de medida común, las cantidades son **inconmensurables**.

Recuerde

En una relación proporcional las unidades no son necesarias ni deseables.

EJEMPLO 1

Encuentre la mejor forma de cada relación proporcional:

a) 12 a 20
b) 12 pulg a 24 pulg
c) 12 pulg a 3 pies (**NOTA:** 1 pie = 12 pulg)
d) 5 lb a 20 oz (**NOTA:** 1 lb = 16 oz)
e) 5 lb a 2 pies
f) 4 m a 30 cm (**NOTA:** 1 m = 100 cm)

Solución

a) $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{12\text{ pulg}}{24\text{ pulg}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{12\text{ pulg}}{3\text{ pies}} = \frac{12\text{ pulg}}{3(12\text{ pulg})} = \frac{12\text{ pulg}}{36\text{ pulg}} = \frac{1}{3}$

d) $\frac{5\text{ lb}}{20\text{ oz}} = \frac{5(16\text{ oz})}{20\text{ oz}} = \frac{80\text{ oz}}{20\text{ oz}} = \frac{4}{1}$

e) $\frac{5\text{ lb}}{2\text{ ft}}$ ¡es inconmensurable!

f) $\frac{4\text{ m}}{30\text{ cm}} = \frac{4(100\text{ cm})}{30\text{ cm}} = \frac{400\text{ cm}}{30\text{ cm}} = \frac{40}{3}$ ■

Geometría en el mundo real

En una tienda de abarrotes el costo por unidad es una relación proporcional que permite que los clientes conozcan cuál marca es más cara.

Una **razón** es un cociente que compara dos cantidades que son inconmensurables. Si un automóvil puede viajar 300 millas a lo largo de una carretera mientras consume 10 galones de gasolina, entonces su *razón* de consumo es $\frac{300\text{ millas}}{10\text{ galones}}$. En forma simplificada, la razón de consumo es $\frac{30\text{ mi}}{\text{gal}}$, que se lee "30 millas por galón" y a menudo se abrevia 30 mpg.

EJEMPLO 2

Simplifique cada razón. En cada respuesta son necesarias las unidades.

a) $\frac{120\text{ millas}}{5\text{ galones}}$

b) $\frac{100\text{ metros}}{10\text{ segundos}}$

c) $\frac{12\text{ cucharadas}}{2\text{ cuartos}}$

d) $\frac{\$8.45}{5\text{ galones}}$

Solución

a) $\dfrac{120 \text{ mi}}{5 \text{ gal}} = \dfrac{24 \text{ mi}}{\text{gal}}$ (en ocasiones se escribe 24 mpg)

b) $\dfrac{100 \text{ m}}{10 \text{ s}} = \dfrac{10 \text{ m}}{\text{s}}$

c) $\dfrac{12 \text{ cucharadas}}{2 \text{ cuartos}} = \dfrac{6 \text{ cucharadas}}{\text{cuarto}}$

d) $\dfrac{\$8.45}{5 \text{ gal}} = \dfrac{\$1.69}{\text{gal}}$

GEE
Ejercicios 1-2

Una **proporción** es un enunciado que indica que dos relaciones son iguales. Así, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción y se lee "*a* es a *b* como *c* es a *d*". En el orden leído, *a* es el *primer término* de la proporción, *b* es el *segundo término*, *c* es el *tercer término* y *d* es el *cuarto término*. El primer y último términos (*a* y *d*) de la proporción son los **extremos**, en tanto que el segundo y tercer términos (*b* y *c*) son los **medios**.

La propiedad siguiente es muy conveniente para resolver proporciones.

PROPIEDAD 1 ▶ (Propiedad medios-extremos)

En una proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos; es decir, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$), entonces $a \cdot d = b \cdot c$.

Una proporción, al ser un enunciado, puede ser verdadera o falsa. En la proporción falsa $\frac{9}{12} = \frac{2}{3}$, es obvio que $9 \cdot 3 \neq 12 \cdot 2$; por otro lado, la veracidad del enunciado $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ es evidente frente al hecho de que $9 \cdot 4 = 12 \cdot 3$. En lo sucesivo se pretende que cualquier proporción dada en este libro sea una proporción verdadera.

EJEMPLO 3

Utilice la propiedad medios-extremos para resolver cada proporción para *x*.

a) $\dfrac{x}{8} = \dfrac{5}{12}$ c) $\dfrac{3}{x} = \dfrac{x}{2}$ e) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{4}{x-1}$

b) $\dfrac{x+1}{9} = \dfrac{x-3}{3}$ d) $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{9}{x-3}$

Solución

a) $x \cdot 12 = 8 \cdot 5$ **(Propiedad medios-extremos)**

$12x = 40$

$x = \dfrac{40}{12} = \dfrac{10}{3}$

b) $3(x+1) = 9(x-3)$ **(Propiedad medios-extremos)**

$3x + 3 = 9x - 27$

$30 = 6x$

$x = 5$

c) $3 \cdot 2 = x \cdot x$ **(Propiedad medios-extremos)**

$x^2 = 6$

$x = \pm\sqrt{6} \approx \pm 2.45$

Advertencia

Cuando resuelva una proporción tal como $\frac{x}{8} = \frac{5}{12}$, escriba $12x = 40$ en el renglón siguiente. *No* escriba $\frac{x}{8} = \frac{5}{12} = 12x = 40$, ya que implicaría que $\frac{5}{12} = 40$.

Solución

d) $(x + 3)(x - 3) = 3 \cdot 9$ **(Propiedad medios-extremos)**

$$x^2 - 9 = 27$$
$$x^2 - 36 = 0$$
$$(x + 6)(x - 6) = 0 \quad \textbf{(por factorización)}$$
$$x + 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 6 = 0$$
$$x = -6 \quad \text{o} \quad x = 6$$

e) $(x + 2)(x - 1) = 5 \cdot 4$ **(Propiedad medios-extremos)**

$$x^2 + x - 2 = 20$$
$$x^2 + x - 22 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(utilizando la fórmula cuadrática; consulte el apéndice A.4)

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-22)}}{2(1)}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 88}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{89}}{2}$$
$$\approx 4.22 \quad \text{o} \quad -5.22$$

■

Geometría en el mundo real

El automóvil descrito en el ejemplo 4 tiene una razón de consumo de 22.5 mpg (millas por galón).

En problemas prácticos que implican proporciones es esencial ordenar las cantidades relacionadas en cada relación o razón. El primer paso en la solución del ejemplo 4 ilustra el cuidado que se debe tener al formar la proporción para una aplicación. Debido a la consistencia las unidades se pueden eliminar en la proporción real.

EJEMPLO 4

Si un automóvil puede viajar 90 mi con 4 gal de gasolina, ¿qué tan lejos puede viajar con 6 gal de gasolina?

Solución Por forma,

$$\frac{\text{número de millas del primer viaje}}{\text{número de galones del primer viaje}} = \frac{\text{número de millas del segundo viaje}}{\text{número de galones del segundo viaje}}$$

Donde x representa el número de millas recorridas en el segundo viaje, se tiene

$$\frac{90}{4} = \frac{x}{6}$$
$$4x = 540$$
$$x = 135$$

Por tanto, el automóvil puede viajar 135 mi con 6 gal de gasolina. ■

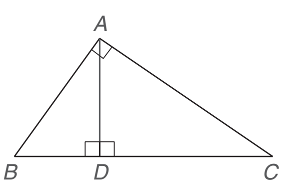


Figura 5.1

En $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, donde el segundo y el tercer términos de la proporción son idénticos, el valor de b se conoce como **media geométrica** de a y c. Por ejemplo, 6 y −6 son las medias geométricas de 4 y 9 debido a que $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ y $\frac{4}{-6} = \frac{-6}{9}$. Puesto que por lo general en las aplicaciones en geometría se requieren soluciones positivas es usual buscar sólo la media geométrica positiva de a y c.

EJEMPLO 5

En la figura 5.1, AD es la media geométrica de BD y DC. Si $BC = 10$ y $BD = 4$, determine AD.

Solución $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$. Debido a que $DC = BC - BD$, se sabe que $DC = 10 - 4 = 6$. Por tanto,

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{6}$$

en donde x es la longitud de $\overline{AD}$. Aplicando la propiedad medios-extremos,

$$x^2 = 24$$
$$x = \pm\sqrt{24} = \pm\sqrt{4 \cdot 6} = \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = \pm 2\sqrt{6}$$

GEE
Ejercicios 3-6

Para tener una longitud permisible para $\overline{AD}$, la media geométrica es la solución positiva. Por tanto, $AD = 2\sqrt{6}$ o $AD \approx 4.90$. ■

Una **relación proporcional extendida** compara más de dos cantidades y se debe expresar en una forma como *a:b:c* o *d:e:f:g*. Si se sabe que los ángulos de un triángulo son 90°, 60° y 30°, entonces la relación que compara estas medidas es 90:60:30, o 3:2:1 (ya que 90°, 60° y 30° tienen a 30 como el factor común mayor).

PROPIEDAD DE LAS RELACIONES PROPORCIONALES

Las cantidades desconocidas en la relación *a:b:c:d* se deben representar por *ax*, *bx*, *cx* y *dx*.

EJEMPLO 6

Suponga que el perímetro de un cuadrilátero es 70 y las longitudes de los lados están en la relación 2:3:4:5. Encuentre la medida de cada lado.

Solución Sea que las longitudes de los lados están representadas por $2x$, $3x$, $4x$ y $5x$. Entonces

$$2x + 3x + 4x + 5x = 70$$
$$14x = 70$$
$$x = 5$$

Puesto que $2x = 10$, $3x = 15$, $4x = 20$ y $5x = 25$, las longitudes de los lados son 10, 15, 20 y 25. ■

Es posible resolver ciertos problemas en más de una forma, como se ilustra en el ejemplo siguiente. Sin embargo, la solución es única y no se modifica por el método elegido.

EJEMPLO 7

Las medidas de dos ángulos complementarios están en la relación proporcional 2 a 3. Encuentre la medida de cada ángulo.

Solución Si el primero de los ángulos complementarios tiene una medida x; entonces el segundo mide $90 - x$. Por tanto, se tiene

$$\frac{x}{90 - x} = \frac{2}{3}$$

Utilizando la propiedad medios-extremos, se tiene

$$\begin{aligned} 3x &= 2(90 - x) \\ 3x &= 180 - 2x \\ 5x &= 180 \\ x &= 36 \\ 90 - x &= 54 \end{aligned}$$

Los ángulos miden 36 y 54°.

Solución alterna Puesto que las medidas de los ángulos están en la relación 2:3, sean sus medidas $2x$ y $3x$. Ya que los ángulos son complementarios,

$$\begin{aligned} 2x + 3x &= 90 \\ 5x &= 90 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

GEE *Ejercicios 7-9*

Ahora, $2x = 36$ y $3x = 54$, por lo que las medidas de los dos ángulos son 36° y 54°. ■

Las propiedades restantes de las proporciones son teoremas. Debido a que no se citan tan frecuentemente como la propiedad medios-extremos, no se les dan títulos. Vea los ejercicios 38 y 39.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Demostración de propiedades de proporciones

Regla general: Para demostrar estos teoremas se aplica la propiedad medios-extremos, así como las propiedades de adición, sustracción, multiplicación y división de la igualdad.

Ilustración: La demostración de la primera parte de la propiedad 3 inicia con la adición de 1 a cada lado de la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

PROPIEDAD 2

En una proporción los medios o los extremos (o ambos) se pueden intercambiar; es decir, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (donde a, b, c y d son distintos de cero), entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ y $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

En una proporción como $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, la propiedad 2 permite llegar a conclusiones como

1. $\dfrac{2}{8} = \dfrac{3}{12}$ (medios intercambiados)
2. $\dfrac{12}{3} = \dfrac{8}{2}$ (extremos intercambiados)
3. $\dfrac{3}{2} = \dfrac{12}{8}$ (ambos lados invertidos)

PROPIEDAD 3

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$), entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ y $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

Dada la proporción $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, la propiedad 3 permite llegar a conclusiones como

1. $\dfrac{2+3}{3} = \dfrac{8+12}{12}$ (**cada lado se simplifica a $\frac{5}{3}$**)

Ejercicios 10-11

2. $\dfrac{2-3}{3} = \dfrac{8-12}{12}$ (**cada lado se simplifica a $-\frac{1}{3}$**)

Así como existen relaciones proporcionales extendidas, también hay **proporciones extendidas**, como

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \cdots$$

Como se sugiere por distintos números de porciones de una receta particular, el enunciado siguiente es una proporción extendida que compara el número de huevos con el número de tazas de leche:

$$\frac{2 \text{ huevos}}{3 \text{ tazas}} = \frac{4 \text{ huevos}}{6 \text{ tazas}} = \frac{6 \text{ huevos}}{9 \text{ tazas}}$$

EJEMPLO 8

En los triángulos que se muestran en la figura 5.2, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Encuentre las longitudes de $\overline{DF}$ y $\overline{EF}$.

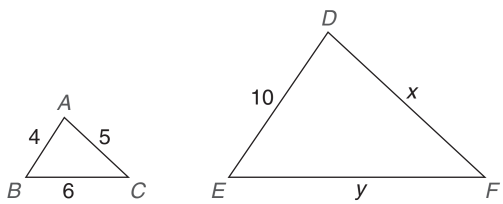


Figura 5.2

Solución Sustituyendo en la proporción $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, se tiene

$$\frac{4}{10} = \frac{5}{x} = \frac{6}{y}$$

De la ecuación

$$\frac{4}{10} = \frac{5}{x}$$

se deduce que $4x = 50$ y que $x = DF = 12.5$. Utilizando la ecuación

$$\frac{4}{10} = \frac{6}{y}$$

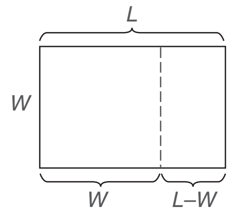
Ejercicios 12, 13

se encuentra que $4y = 60$, por tanto $y = EF = 15$. ■

Descubra

LA RELACIÓN ÁUREA

Se cree que el rectángulo "ideal" se determina cuando se puede eliminar un cuadrado de tal manera que quede un rectángulo menor con la misma forma que el rectángulo original. Como se determinará, los rectángulos se conocen como *semejantes* por su forma. Al eliminar el cuadrado, la semejanza en las formas de los rectángulos requiere que $\frac{W}{L} = \frac{L - W}{W}$. Para descubrir la relación entre L y W, se elige $W = 1$ y se resuelve la ecuación $\frac{1}{L} = \frac{L - 1}{1}$ para L. La solución es $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. La relación que compara la longitud con el ancho se conoce como *relación áurea*. Puesto que $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ cuando $W = 1$ y $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.62$, el rectángulo *ideal* tiene una longitud que es aproximadamente 1.62 veces su ancho; es decir $L \approx 1.62W$.



Ejercicios 5.1

En los ejercicios 1 al 4 proporcione las relaciones proporcionales en forma simplificada.

1. a) 12 a 15 b) 12 a 15 pulg c) 1 pie a 18 pulg d) 1 pie a 18 oz

2. a) 20 a 36 b) 24 a 54 oz c) 20 oz a 2 lb (1 lb = 16 oz) d) 2 lb a 20 oz

3. a) 15:24 b) 2 pies:2 yd (1 yd = 3 pies) c) 2 m:150 cm (1 m = 100 cm) d) 2 m:1 lb

4. a) 24:32 b) 12 pulg:2 yd c) 150 cm:2 m d) 1 gal:24 mi

En los ejercicios 5 al 14 encuentre el valor de x en cada proporción.

5. a) $\frac{x}{4} = \frac{9}{12}$ b) $\frac{7}{x} = \frac{21}{24}$

6. a) $\frac{x - 1}{10} = \frac{3}{5}$ b) $\frac{x + 1}{6} = \frac{10}{12}$

7. a) $\frac{x - 3}{8} = \frac{x + 3}{24}$ b) $\frac{x + 1}{6} = \frac{4x - 1}{18}$

8. a) $\frac{9}{x} = \frac{x}{16}$ b) $\frac{32}{x} = \frac{x}{2}$

9. a) $\frac{x}{4} = \frac{7}{x}$ b) $\frac{x}{6} = \frac{3}{x}$

10. a) $\frac{x + 1}{3} = \frac{10}{x + 2}$ b) $\frac{x - 2}{5} = \frac{12}{x + 2}$

11. a) $\frac{x + 1}{x} = \frac{10}{2x}$ b) $\frac{2x + 1}{x + 1} = \frac{14}{3x - 1}$

12. a) $\frac{x + 1}{2} = \frac{7}{x - 1}$ b) $\frac{x + 1}{3} = \frac{5}{x - 2}$

13. a) $\frac{x + 1}{x} = \frac{2x}{3}$ b) $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{2x}{5}$

14. a) $\frac{x + 1}{x} = \frac{x}{x - 1}$ b) $\frac{x + 2}{x} = \frac{2x}{x - 2}$

15. Sarah corrió los 300 m con obstáculos en 47.7 segundos. En metros por segundo, encuentre la rapidez con la que corrió Sarah. Proporcione la respuesta hasta la décima más cercana de un metro por segundo.

16. Fran ha sido contratada para cocer los vestidos de baile para el musical escolar. Si se necesitan $13\frac{1}{3}$ yardas de material para los cuatro vestidos, encuentre la razón que describe la cantidad de material necesario para cada vestido.

En los ejercicios 17 al 22 utilice proporciones para resolver cada problema.

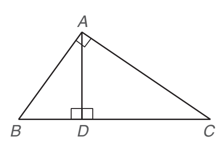
17. Una receta requiere 4 huevos y 3 tazas de leche. Con el fin de preparar para un número mayor de invitados, un cocinero utiliza 14 huevos. ¿Cuántas tazas de leche se necesitan?

18. Si la secretaria de una escuela fotocopia 168 hojas para un grupo de 28 estudiantes, ¿cuántas hojas debe fotocopiar para un grupo de 32 estudiantes?

19. Un electricista instala 20 tomacorrientes en una casa nueva de seis habitaciones. Si se supone proporcionalidad, ¿cuántos contactos eléctricos se deben instalar en una construcción nueva con siete habitaciones? (Redondee a un número entero.)

20. El grupo de secretarias (15 en total) en un piso de un complejo de oficinas tiene acceso a cuatro fotocopiadoras. Si hay 23 secretarias en un piso diferente, ¿aproximadamente cuántas fotocopiadoras deben estar disponibles? (Suponga proporcionalidad.)

21. Suponga que AD es la media geométrica de BD y DC en el $\triangle ABC$ que se muestra en el dibujo siguiente.
a) Encuentre AD si $BD = 6$ y $DC = 8$.
b) Encuentre BD si $AD = 6$ y $DC = 8$.



Ejercicios 21, 22

22. En el esquema para el ejercicio 21, suponga que AB es la media geométrica de BD y BC.
a) Encuentre AB si $BD = 6$ y $DC = 10$.
b) Encuentre DC si $AB = 10$ y $BC = 15$.

23. Los salarios de una secretaria, un vendedor y un vicepresidente para una compañía de ventas al detalle están en la razón 2:3:5. Si sus salarios anuales combinados suman $124 500, ¿cuál es el salario anual de cada uno?

24. Las medidas de los ángulos de un cuadrilátero están en la razón 2:3:4:6. Encuentre la medida de cada ángulo.

25. Las medidas de dos ángulos complementarios están en la razón 4:5. Encuentre la medida de cada ángulo utilizando los métodos que se ilustran en el ejemplo 7.

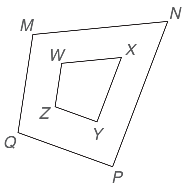
26. Las medidas de dos ángulos suplementarios están en la razón de 2:7. Encuentre la medida de cada ángulo, utilizando los dos métodos del ejemplo 7.

27. Si 1 pulg es igual a 2.54 cm, utilice una proporción para convertir 12 pulg a centímetros.

(SUGERENCIA: $\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ pulg}} = \frac{x \text{ cm}}{12 \text{ pulg}}$*)*

28. Si 1 kg es igual a 2.2 lb, utilice una proporción para convertir 12 libras a kilogramos.

29. Para los cuadriláteros que se muestran, $\frac{MN}{WX} = \frac{NP}{XY} = \frac{PQ}{YZ} = \frac{MQ}{WZ}$. Si $MN = 7$, $WX = 3$ y $PQ = 6$, encuentre YZ.



Ejercicios 29, 30

30. Para este ejercicio utilice el dibujo y una relación extendida del ejercicio 29. Si $NP = 2 \cdot XY$ y $WZ = 3\frac{1}{2}$, encuentre MQ.

31. Dos números a y b están en la relación proporcional 3:4. Si el primer número se disminuye en 2 y el segundo se disminuye en 1, están en la relación proporcional 2:3. Encuentre a y b.

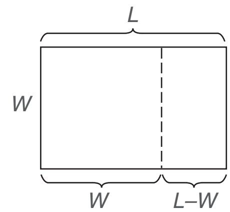
32. Dos números a y b están en la relación proporcional 2:3. Si ambos números se disminuyen en 2, la relación proporcional de los números resultantes es 3:5. Encuentre a y b.

33. Si la relación proporcional entre la medida del complemento de un ángulo y la medida de su suplemento es 1:3, encuentre la medida del ángulo.

34. Si la relación proporcional entre la medida del complemento de un ángulo y la medida de su suplemento es 1:4, encuentre la medida del ángulo.

35. En un plano, una escala de 1 pulg corresponde a 3 pies. Para mostrar una habitación con dimensiones reales de 12 pies de ancho por 14 pies de longitud, ¿qué dimensiones se deben mostrar en el plano?

36. Para encontrar la relación áurea (consulte la actividad Descubra de la página 226), resuelva la ecuación $\frac{1}{L} = \frac{L - 1}{1}$ para L.
(SUGERENCIA: Necesitará la fórmula cuadrática.)



37. Encuentre
a) La longitud exacta de un rectángulo ideal con ancho $W = 5$ resolviendo $\frac{5}{L} = \frac{L - 5}{5}$.
b) La longitud aproximada de un rectángulo ideal con ancho $W = 5$ utilizando $L \approx 1.62W$.

38. *Demuestre:* Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (donde a, b, c y d son distintos de cero), entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

39. *Demuestre:* Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$), entonces $\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$.

5.2 Polígonos semejantes

CONCEPTOS CLAVE
- Polígonos semejantes
- Polígonos congruentes
- Vértices, ángulos y lados correspondientes

Cuando dos figuras geométricas tienen exactamente la misma forma, son **semejantes**; el símbolo para "es semejante a" es $\sim$. Cuando dos figuras tienen la misma forma ($\sim$) y todas las partes correspondientes tienen medidas iguales ($=$), las dos figuras son **congruentes** ($\cong$). Observe que el símbolo para congruencia combina los símbolos para semejanza e igualdad. De hecho, para dar mayor énfasis se incluye la propiedad siguiente:

Dos polígonos congruentes también son polígonos semejantes.

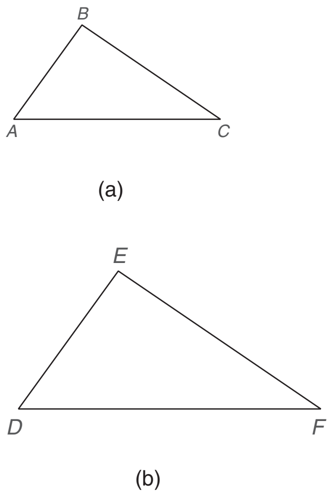


Figura 5.3

Dos figuras bidimensionales como el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ en la figura 5.3 pueden ser semejantes, pero también es posible que las figuras tridimensionales sean semejantes. En las figuras 5.4(a) y 5.4(b) se muestran envases de jugo de naranja. De manera informal, dos figuras son "semejantes" si una es una ampliación de la otra. Así pues, una lata de atún y una de jugo de naranja *no* son semejantes, aun si ambas son cilindros rectos [vea las figuras 5.4(b) y 5.4(c)]. En el capítulo 9 se consideran los cilindros con más detalle.

Figura 5.4

Nuestro estudio de la semejanza por lo general estará limitado a figuras planas.

Para que dos polígonos sean semejantes se necesita que cada ángulo de un polígono sea congruente con el ángulo correspondiente del otro. Sin embargo, la congruencia de los ángulos no es suficiente para establecer la semejanza de polígonos. Los vértices de los ángulos congruentes son **vértices correspondientes** de los polígonos semejantes. Si el $\angle A$ en un polígono es congruente con el $\angle M$ en el segundo polígono, entonces el vértice A corresponde al vértice M y esto se simboliza $A \leftrightarrow M$: se puede indicar que el $\angle A$ corresponde al $\angle M$ escribiendo $\angle A \leftrightarrow \angle M$. Un par de ángulos como el $\angle A$ y el $\angle M$ son **ángulos correspondientes** y los lados determinados por vértices consecutivos y correspondientes son **lados correspondientes** de los polígonos semejantes. Por ejemplo, si $A \leftrightarrow M$ y $B \leftrightarrow N$, entonces $\overline{AB}$ corresponde a $\overline{MN}$.

Descubra

Cuando se proyecta una diapositiva en una pantalla, la imagen que se crea es semejante a la figura que se proyecta.

EJEMPLO 1

Dados los cuadriláteros semejantes $ABCD$ y $HJKL$ con ángulos congruentes, como se indica en la figura 5.5, nombre los vértices, ángulos y lados que corresponden a cada uno.

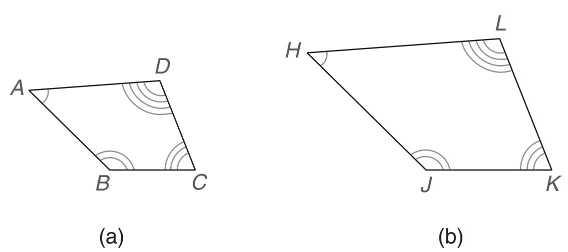


Figura 5.5

Solución Como $\angle A \cong \angle H$, se deduce que

$$A \leftrightarrow H \quad \text{y} \quad \angle A \leftrightarrow \angle H$$

De manera similar,

$$B \leftrightarrow J \quad \text{y} \quad \angle B \leftrightarrow \angle J$$
$$C \leftrightarrow K \quad \text{y} \quad \angle C \leftrightarrow \angle K$$
$$D \leftrightarrow L \quad \text{y} \quad \angle D \leftrightarrow \angle L$$

Geometría en la naturaleza

Los segmentos de la concha del nautilo son semejantes (no congruentes) por su forma.

Cuando se asocian pares de vértices consecutivos y correspondientes los lados correspondientes se incluyen entre los ángulos correspondientes (o vértices).

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{HJ}, \quad \overline{BC} \leftrightarrow \overline{JK}, \quad \overline{CD} \leftrightarrow \overline{KL} \quad \text{y} \quad \overline{AD} \leftrightarrow \overline{HL}$$

Entendiendo los ángulos correspondientes y los lados correspondientes, se pueden definir polígonos semejantes. ■

DEFINICIÓN

Dos polígonos son **semejantes** si y sólo si se satisfacen dos condiciones:

1. Todos los pares de ángulos correspondientes son congruentes.
2. Todos los pares de lados correspondientes son proporcionales.

La segunda condición para la semejanza requiere que exista la proporción extendida siguiente para los lados de los cuadriláteros semejantes del ejemplo 1.

$$\frac{AB}{HJ} = \frac{BC}{JK} = \frac{CD}{KL} = \frac{AD}{HL}$$

¡Observe que son necesarias *ambas* condiciones para la semejanza! Aunque la condición 1 se satisface para el cuadrado *EFGH* y el rectángulo *RSTU* [vea las figuras 5.6(a) y (b)], las figuras no son semejantes; es decir, una no es una ampliación de la otra debido a que la proporción extendida no es verdadera. Por otro lado, la condición 2 se satisface para el cuadrado *EFGH* y el rombo *WXYZ* [vea las figuras 5.6(a) y 5.6(c)], pero las figuras no son semejantes ya que los pares de ángulos correspondientes no son congruentes.

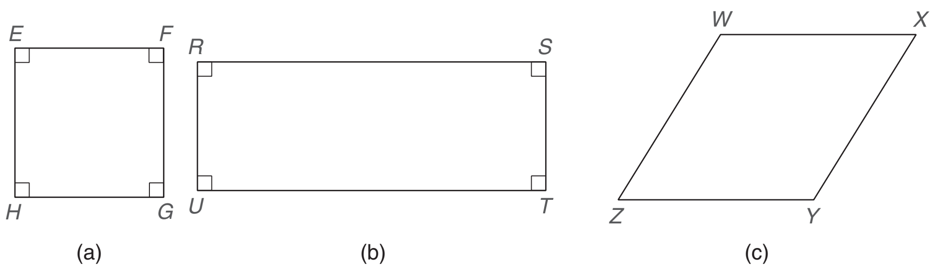


Figura 5.6

EJEMPLO 2

¿Cuáles figuras deben ser semejantes?

a) Cualesquiera dos triángulos isósceles
b) Cualesquiera dos pentágonos regulares
c) Cualesquiera dos rectángulos
d) Cualesquiera dos cuadrados

Solución

a) No; los $\angle$s pares no necesitan ser $\cong$ ni los pares de los lados necesitan ser proporcionales.
b) Sí; todos los ángulos son congruentes (miden 108° cada uno) y todos los pares de los lados son proporcionales.
c) No; todos los ángulos miden 90°, pero los pares de lados no son necesariamente proporcionales.
d) Sí; todos los ángulos miden 90° y todos los pares de lados son proporcionales. ■

GEE *Ejercicios 1-4*

Se acostumbra nombrar los vértices correspondientes de polígonos semejantes en el mismo orden. Por ejemplo, $ABCDE$ es semejante al pentágono $MNPQR$, entonces se sabe que $A \leftrightarrow M$, $B \leftrightarrow N$, $C \leftrightarrow P$, $D \leftrightarrow Q$, $E \leftrightarrow R$, $\angle A \cong \angle M$, $\angle B \cong \angle N$, $\angle C \cong \angle P$, $\angle D \cong \angle Q$ y $\angle E \cong \angle R$. Debido a la correspondencia indicada de los vértices también se sabe que

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \frac{DE}{QR} = \frac{EA}{RM}$$

EJEMPLO 3

Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ en la figura 5.7, utilice las medidas indicadas para encontrar las medidas de las partes restantes de cada uno de los triángulos.

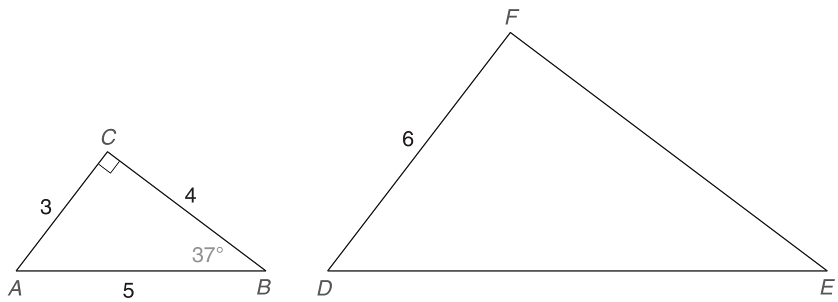


Figura 5.7

Solución Puesto que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°,

$$m\angle A = 180 - (90 + 37) = 53°$$

Y debido a la semejanza y correspondencia de vértices

$$m\angle D = 53°, \qquad m\angle E = 37° \qquad \text{y} \qquad m\angle F = 90°$$

La proporción que relaciona las longitudes de los lados es

$$\frac{AC}{DF} = \frac{CB}{FE} = \frac{AB}{DE} \qquad \text{por tanto} \qquad \frac{3}{6} = \frac{4}{FE} = \frac{5}{DE}$$

De $\frac{3}{6} = \frac{4}{FE}$, se observa que $3 \cdot FE = 6 \cdot 4$ de manera que $3 \cdot FE = 24$

$$FE = 8$$

De $\frac{3}{6} = \frac{5}{DE}$, se observa que $3 \cdot DE = 6 \cdot 5$ de manera que $3 \cdot DE = 30$

$$DE = 10$$

En una proporción todas las relaciones proporcionales se pueden invertir; por lo que el ejemplo 3 se podría haber resuelto empleando la proporción

$$\frac{DF}{AC} = \frac{FE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

En una proporción extendida todas las relaciones deben ser iguales al mismo valor constante. Designando este número (que con frecuencia se denomina "constante de proporcionalidad") con k, se tiene que

$$\frac{DF}{AC} = k, \quad \frac{FE}{CB} = k \quad \text{y} \quad \frac{DE}{AB} = k$$

GEE
Ejercicios 5-10

Se deduce que $DF = k \cdot AC$, $FE = k \cdot CB$ y $DE = k \cdot AB$. En el ejemplo 3 esta constante de proporcionalidad tendría el valor $k = 2$, lo que significa que la longitud de cada lado del triángulo más grande es el doble de la longitud del lado correspondiente del triángulo más pequeño.

Si $k > 1$, la semejanza conduce a una ampliación, o *estiramiento*. Si $0 < k < 1$, la semejanza resulta en una *contracción*.

La constante de proporcionalidad también se utiliza para hacer a *escala* un mapa, un diagrama o un plano. Como consecuencia, los problemas de escala se pueden resolver empleando proporciones.

EJEMPLO 4

En un mapa, una longitud de 1 pulg representa una distancia de 30 mi. En el mapa, ¿qué tan apartadas deberían aparecer dos ciudades si en realidad están separadas 140 mi a lo largo de una recta?

Solución Donde x = la distancia deseada en el mapa (en pulgadas),

$$\frac{1}{30} = \frac{x}{140}$$

Entonces $30x = 140$ y $x = 4\frac{2}{3}$ pulg. ■

EJEMPLO 5

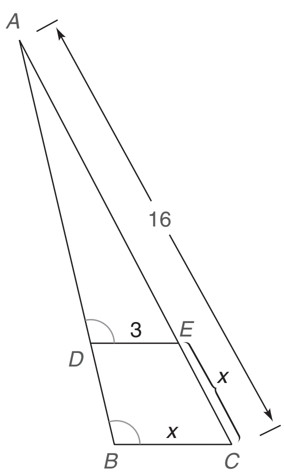


Figura 5.8

En la figura 5.8, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ con $\angle ADE \cong \angle B$. Si $DE = 3$, $AC = 16$ y $EC = BC$, encuentre la longitud BC.

Solución De los triángulos semejantes se tiene $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$. Con $AC = AE + EC$ y representadas por x las longitudes de los segmentos congruentes ($\overline{EC}$ y $\overline{BC}$), se tiene

$$16 = AE + x \quad \text{por tanto} \quad AE = 16 - x$$

Sustituyendo en la proporción, se obtiene

$$\frac{3}{x} = \frac{16 - x}{16}$$

De donde se deduce

$$\begin{aligned} x(16 - x) &= 3 \cdot 16 \\ 16x - x^2 &= 48 \\ x^2 - 16x + 48 &= 0 \\ (x - 4)(x - 12) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora x (o BC) es igual a 4 o 12. Cada longitud es aceptable, pero los dibujos a escala difieren, como se ilustra en la figura 5.9 de la página siguiente.

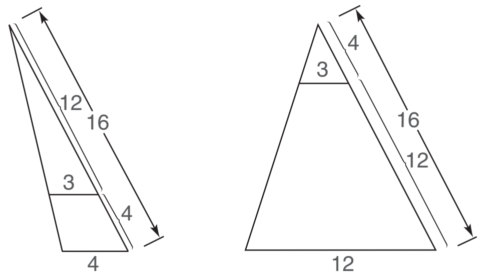


Figura 5.9

En el ejemplo siguiente se utiliza un método denominado *cálculo de la sombra*. Este método para calcular la longitud, data de hace más de 2 500 años, cuando el matemático griego Tales lo utilizó para calcular la altura de las pirámides de Egipto. En la figura 5.10, en el método se supone (correctamente) que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Observe que $\angle A \cong \angle D$ y $\angle C \cong \angle F$.

EJEMPLO 6

Darnell tiene curiosidad respecto a la altura del asta bandera que se encuentra enfrente a su escuela. Darnell, quien mide 6 pies, proyecta una sombra, que mide en pasos, y es de 9 pies. Él camina la longitud de la sombra hasta el asta bandera una distancia de 30 pies. ¿Cuál es la altura del asta bandera?

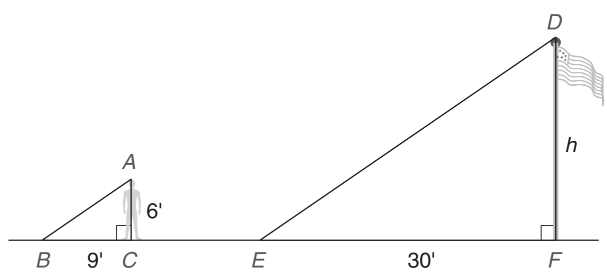


Figura 5.10

Solución En la figura 5.10, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. De triángulos semejantes se sabe que $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ o $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$ intercambiando los medios.

Si h es la altura del asta bandera, la sustitución en la segunda proporción conduce a

$$\frac{6}{9} = \frac{h}{30} \rightarrow 9h = 180 \rightarrow h = 20$$

GEE *Ejercicios 11-13*

La altura del asta bandera es 20 pies.

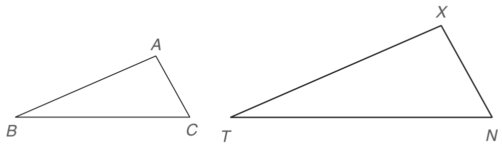
Ejercicios 5.2

1. a) ¿Qué es verdad de cualquier par de ángulos correspondientes de dos polígonos semejantes?
   b) ¿Qué es verdad de cualesquiera pares de lados correspondientes de dos polígonos semejantes?
2. a) ¿Son semejantes cualesquiera dos cuadriláteros?
   b) ¿Son semejantes cualesquiera dos cuadrados?
3. a) ¿Son semejantes cualesquiera dos pentágonos regulares?
   b) ¿Son semejantes cualesquiera dos pentágonos equiángulos?
4. a) ¿Son semejantes cualesquiera dos hexágonos equiláteros?
   b) ¿Son semejantes cualesquiera dos hexágonos regulares?

En los ejercicios 5 y 6 refiérase al dibujo.

5. a) Dado que $A \leftrightarrow X$, $B \leftrightarrow T$ y $C \leftrightarrow N$, escriba un enunciado afirmando que los triángulos que se muestran son semejantes.

b) Dado que $A \leftrightarrow N$, $C \leftrightarrow X$ y $B \leftrightarrow T$, escriba un enunciado afirmando que los triángulos que se muestran son semejantes.

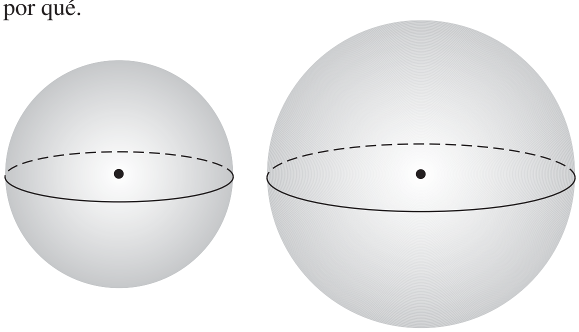


Ejercicios 5, 6

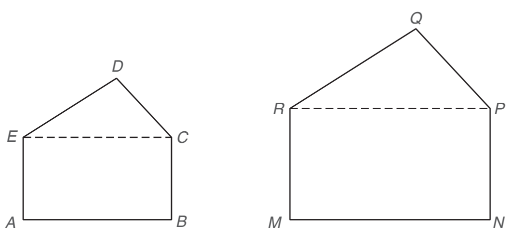
6. a) Si $\triangle ABC \sim \triangle XTN$, ¿qué ángulo del $\triangle ABC$ corresponde a $\angle N$ del $\triangle XTN$?

b) Si $\triangle ABC \sim \triangle XTN$, ¿qué lado del $\triangle XTN$ corresponde al lado $\overline{AC}$ del $\triangle ABC$?

7. Una **esfera** es una superficie tridimensional que contiene todos los puntos en el espacio que se encuentran a una distancia fija de un punto conocido como centro de la esfera. Considere las dos esferas que se muestran. ¿Son semejantes? ¿Son semejantes dos esferas cualesquiera? Explique por qué.

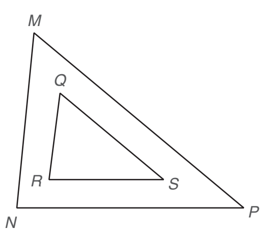


8. Dado que el rectángulo *ABCE* es semejante al rectángulo *MNPR* y que el $\triangle CDE \sim \triangle PQR$, ¿qué puede concluir respecto al pentágono *ABCDE* y al pentágono *MNPQR*?



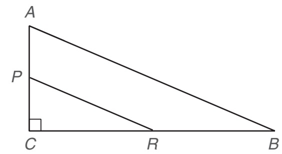
9. *Dado:* $\triangle MNP \sim \triangle QRS$, $m\angle M = 56°$, $m\angle R = 82°$, $MN = 9$, $QR = 6$, $RS = 7$, $MP = 12$

Encuentre: a) $m\angle N$ b) $m\angle P$ c) NP d) QS



10. *Dado:* $\triangle ABC \sim \triangle PRC$, $m\angle A = 67°$, $PC = 5$, $CR = 12$, $PR = 13$, $AB = 26$

Encuentre: a) $m\angle B$
b) $m\angle RPC$
c) AC
d) CB



11. a) ¿Tiene una propiedad **reflexiva** la relación de semejanza para triángulos (y polígonos en general)?

b) ¿Existe una propiedad **simétrica** para la semejanza de triángulos (y polígonos)?

c) ¿Existe una propiedad **transitiva** para la semejanza de triángulos (y polígonos)?

12. Utilizando los nombres de las propiedades del ejercicio 11, identifique la propiedad ilustrada por cada enunciado:

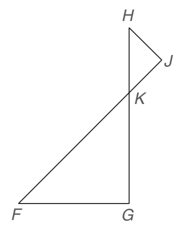
a) Si $\triangle 1 \sim \triangle 2$, entonces $\triangle 2 \sim \triangle 1$.

b) Si $\triangle 1 \sim \triangle 2$, $\triangle 2 \sim \triangle 3$ y $\triangle 3 \sim \triangle 4$, entonces $\triangle 1 \sim \triangle 4$.

c) $\triangle 1 \sim \triangle 1$

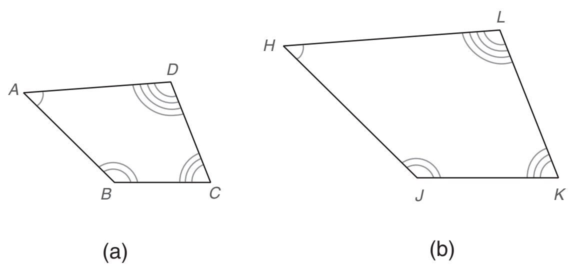
13. En el esquema, $\triangle HJK \sim \triangle FGK$. Si $HK = 6$, $KF = 8$ y $HJ = 4$, encuentre FG.

14. En el esquema, $\triangle HJK \sim \triangle FGK$. Si $HK = 6$, $KF = 8$ y $FG = 5$, encuentre HJ.



Ejercicios 13, 14

15. El cuadrilátero *ABCD* ~ cuadrilátero *HJKL*. Si $m\angle A = 55°$, $m\angle J = 128°$ y $m\angle D = 98°$, encuentre $m\angle K$.



Ejercicios 15–20

16. El cuadrilátero *ABCD* ~ al cuadrilátero *HJKL*. Si $m\angle A = x$, $m\angle J = x + 50$, $m\angle D = x + 35$ y $m\angle K = 2x - 45$, encuentre x.

17. El cuadrilátero *ABCD* ~ al cuadrilátero *HJKL*. Si $AB = 5$, $BC = n$, $HJ = 10$ y $JK = n + 3$, encuentre n.

18. El cuadrilátero *ABCD* ~ al cuadrilátero *HJKL*. Si $m\angle D = 90°$, $AD = 8$, $DC = 6$ y $HL = 12$, encuentre la longitud de la diagonal $\overline{HK}$ (que no se muestra).

19. El cuadrilátero *ABCD* ~ al cuadrilátero *HJKL*. Si $m\angle A = 2x + 4$, $m\angle H = 68°$ y $m\angle D = 3x - 6$, encuentre $m\angle L$.

20. El cuadrilátero *ABCD* ~ al cuadrilátero *HJKL*. Si $m\angle A = m\angle K = 70°$ y $m\angle B = 110°$, ¿qué tipos de cuadriláteros son *ABCD* y *HJKL*?

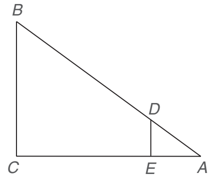
En los ejercicios 21 al 24 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

21. *Dado:* $DE = 4$, $AE = 6$, $EC = BC$
Encuentre: BC

22. *Dado:* $DE = 5$, $AD = 8$, $DB = BC$
Encuentre: AB
(SUGERENCIA: Encuentre primero DB.)

23. *Dado:* $DE = 4$, $AC = 20$, $EC = BC$
Encuentre: BC

24. *Dado:* $AD = 4$, $AC = 18$, $DB = AE$
Encuentre: AE



Ejercicios 21–24

25. El pentágono $ABCDE \sim$ al pentágono $GHJKL$ (que no se muestra), $AB = 6$, $GH = 9$. Si el perímetro de $ABCDE$ es 50, encuentre el perímetro de $GHJKL$.

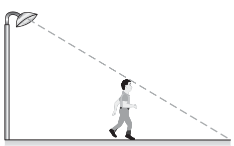
26. El cuadrilátero $MNPQ \sim$ al cuadrilátero $WXYZ$ (que no se muestra), $PQ = 5$ y $YZ = 7$. Si el lado más largo de $MNPQ$ tiene una longitud de 8, encuentre la longitud del lado más largo de $WXYZ$.

27. Un plano representa la longitud de 72 pies de un edificio con un segmento de recta de longitud 6 pulg. ¿Qué longitud se usaría en el plano para representar la altura de este edificio de 30 pies de altura?

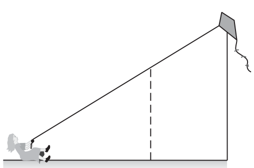
28. En un dibujo técnico se muestran las longitudes de $3\frac{1}{2}$ pies de las patas de una mecedora para bebé con segmentos de recta de 3 pulg de longitud. Si el diagrama debe indicar que las patas están separadas $2\frac{1}{2}$ pies en la base, ¿qué longitud representa esta distancia en el diagrama?

En los ejercicios 29 al 32, utilice el hecho de que los triángulos son semejantes.

29. Una persona camina alejándose de un poste de alumbrado de 10 pies que proyecta una sombra de 6 pies de longitud. Si la persona está a una distancia de 10 pies del poste en ese instante, ¿cuál es la altura de la persona?

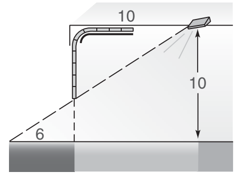


30. Con una longitud de 100 pies una cometa se encuentra 64 pies arriba del nivel del suelo. Cuando la niña que vuela la cometa jala 40 pies de cuerda, el ángulo formado por la cuerda y el suelo no cambia. ¿Cuál es la altura de la cometa por encima del suelo después de jalar los 40 pies de cuerda?



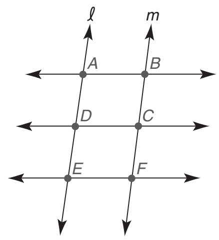
31. Mientras observa un árbol muy alto, Fred nota que la sombra de su cuerpo de 6 pies tiene una longitud de 3 pasos. Él camina sobre la sombra que se proyecta en el suelo 37 pasos. ¿Cuál es la altura del árbol?

32. Conforme se cierra la puerta de una cochera la luz se proyecta 6 pies más allá de la base de la puerta (como se muestra en el dibujo adjunto) por una lámpara que está colocada en el cielo raso de la cochera a 10 pies de la parte superior de la puerta. Si el techo de la cochera tiene una altura de 10 pies, ¿a qué altura desde el suelo está la puerta de la cochera en el instante en que la luz se proyecta 6 pies más allá de la puerta?



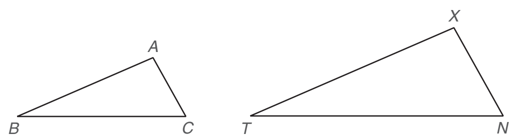
33. En el dibujo, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ con transversales ℓ y m. Si D y C son los puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$, respectivamente, ¿entonces será semejante el trapezoide $ABCD$ al trapezoide $DCFE$?

34. En el dibujo, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{EF}$. Suponga que las transversales ℓ y m son paralelas. D y C son los puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$, respectivamente. ¿Es semejante el paralelogramo $ABCD$ al paralelogramo $DCFE$?

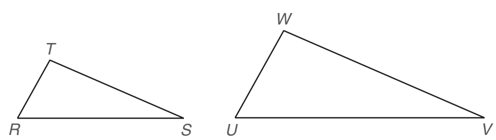


Ejercicios 33, 34

35. Dado el $\triangle ABC$, un segundo triángulo ($\triangle XTN$) se construye de manera que $\angle X \cong \angle A$ y $\angle N \cong \angle C$.
a) ¿Es $\angle T$ congruente con $\angle B$?
b) Utilizando intuición (apariencia), ¿parece que el $\triangle XTN$ es semejante al $\triangle ABC$?

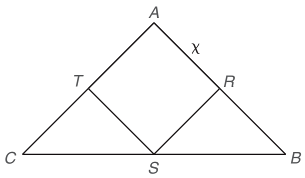


36. Dado el $\triangle RST$, un segundo triángulo ($\triangle UVW$) se construye de manera que $UV = 2(RS)$, $VW = 2(ST)$ y $WU = 2(RT)$.
a) ¿Cuál es el valor constante de las razones $\frac{UV}{RS}$, $\frac{VW}{ST}$ y $\frac{WU}{RT}$?
b) Utilizando la intuición (apariencia), ¿parece que $\triangle UVW$ es semejante al $\triangle RST$?

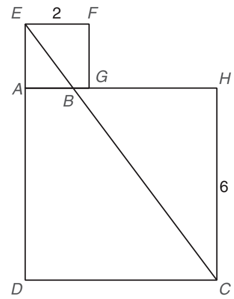


Para los ejercicios 37 y 38 utilice su intuición para formar una proporción con base en el dibujo que se muestra.

***37.** El $\triangle ABC$ tiene un rombo inscrito $ARST$. Si $AB = 10$ y $AC = 6$, encuentre la longitud x de cada lado del rombo.



***38.** Un cuadrado con lados de longitud igual a 2 pulg reposa (como se muestra) en un cuadrado con lados de longitud de 6 pulg. Encuentre el perímetro del trapezoide $ABCD$.



5.3 Demostración de la semejanza de triángulos

CONCEPTOS CLAVE

AAA	LCTSP	LAL~
AA	ACTSC	LLL~

Debido a la dificultad de establecer lados proporcionales, la definición de polígonos semejantes (y por tanto de triángulos semejantes) es casi imposible de emplear como método de demostración. Por fortuna, están disponibles algunos métodos para la demostración de la semejanza de triángulos. Si dos triángulos se bosquejan o construyen con cuidado, de modo que sus ángulos sean congruentes, parecerán ser semejantes, como se muestra en la figura 5.11.

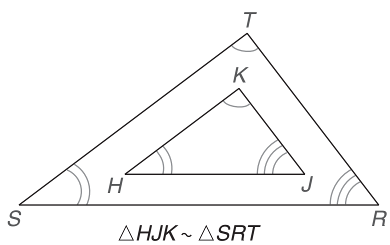


Figura 5.11

Exploración tecnológica

Utilice una calculadora, si dispone de ella. En una hoja de papel trace dos triángulos semejantes, $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$. Para lograr esto utilice un transportador y forme tres pares de ángulos correspondientes congruentes. Con una regla mida $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{DF}$. Demuestre que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

NOTA: Las respuestas no son "perfectas".

POSTULADO 15

Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos de un segundo triángulo, entonces los triángulos son semejantes (AAA).

El corolario 5.3.1 del postulado 15 se deduce al saber que si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los terceros ángulos también *deben* ser congruentes. Consulte el corolario 2.4.4.

COROLARIO 5.3.1

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes (AA).

En vez de utilizar AAA para demostrar la semejanza de triángulos, se utilizará AA ya que requiere menos pasos.

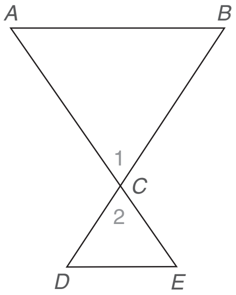


Figura 5.12

EJEMPLO 1

Proporcione una demostración de dos columnas del problema siguiente.

DADO: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ en la figura 5.12

DEMUESTRE: $\triangle ABC \sim \triangle EDC$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$	1. Dado
2. $\angle A \cong \angle E$	2. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, los ángulos internos alternos son $\cong$
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Los ángulos verticales son $\cong$
4. $\triangle ABC \sim \triangle EDC$	4. AA

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Demostración de que dos triángulos son semejantes

Regla general: Aunque *habrá* tres métodos de demostración (AA, LAL~ y LLL~) para triángulos semejantes, utilizaremos AA cuando sea posible. Esto conduce a una demostración más eficiente.

Ilustración: Consulte los renglones 1 y 2 de la demostración del ejemplo 2. Observe que el renglón 3 se deduce de la razón AA.

En algunos casos se quiere demostrar una relación que va más allá de la semejanza de triángulos. Las consecuencias siguientes de la definición de semejanza con frecuencia se citan como razones en una demostración. El primer hecho, abreviado LCTSP, se emplea en el ejemplo 2. Aunque el enunciado LCTSP implica triángulos, los lados correspondientes de *cualesquiera* dos polígonos semejantes son proporcionales. Es decir, la relación proporcional de cualquier par de lados correspondientes es igual a la relación proporcional de otro par de lados correspondientes. El segundo hecho, abreviado ACTSC, se utiliza en el ejemplo 4.

GEE
Ejercicios 1-4

LCTSP

Los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales.

ACTSC

Los ángulos correspondientes de triángulos semejantes son congruentes.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Demostración de una proporción

Regla general: Primero demuestre que los triángulos son semejantes. Luego aplique LCTSP.

Ilustración: Consulte los enunciados 3 y 4 del ejemplo 2.

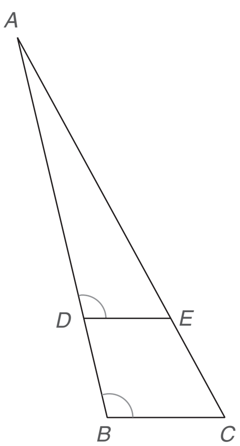


Figura 5.13

EJEMPLO 2

Complete la demostración siguiente de dos columnas.

DADO: $\angle ADE \cong \angle B$ en la figura 5.13

DEMUESTRE: $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AE}{AC}$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle ADE \cong \angle B$	1. Dado
2. $\angle A \cong \angle A$	2. Identidad
3. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$	3. AA
4. $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$	4. LCTSP

NOTA: En esta demostración DE se ubica arriba de BC ya que los lados con estos nombres se encuentran opuestos al $\angle A$ en los dos triángulos semejantes. AE y AC son las longitudes de los lados opuestos a los ángulos congruentes y correspondientes $\angle ADE$ y $\angle B$. Es decir, los lados correspondientes de triángulos semejantes siempre se encuentran opuestos a los ángulos correspondientes. ■

TEOREMA 5.3.2

Las longitudes de las alturas correspondientes de triángulos semejantes tienen la misma razón que las longitudes de cualquier par de lados correspondientes.

La demostración de este teorema se le deja al estudiante; consulte el ejercicio 33. Observe que esta demostración también requiere que se utilice LCTSP.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Demostración de productos de longitudes iguales

Regla general: Primero demuestre que dos triángulos son semejantes. Luego forme una proporción que comprenda las longitudes de los lados correspondientes. Por último, aplique la propiedad medios-extremos.

Ilustración: Vea la demostración siguiente y el ejemplo 3 (una forma de demostración alterna).

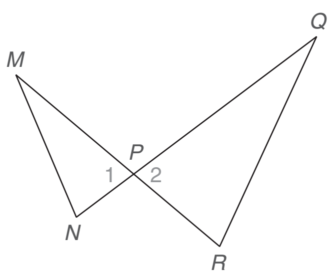


Figura 5.14

El estilo de párrafo de demostración por lo general se utiliza en clases de matemáticas de nivel superior. Estas demostraciones en párrafos no son otra cosa que demostraciones de dos columnas modificadas. Compare la demostración siguiente de dos columnas con la demostración en párrafo que se encuentra en el ejemplo 3.

DADO: $\angle M \cong \angle Q$ en la figura 5.14

DEMUESTRE: $NP \cdot QR = RP \cdot MN$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle M \cong \angle Q$	1. Dado (hipótesis)
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. Los ángulos verticales son $\cong$
3. $\triangle MPN \sim \triangle QPR$	3. AA
4. $\frac{NP}{RP} = \frac{MN}{QR}$	4. LCTSP
5. $NP \cdot QR = RP \cdot MN$	5. Propiedad medios-extremos

EJEMPLO 3

Utilice una demostración en párrafo para completar este problema.

DADO: $\angle M \cong \angle Q$ en la figura 5.14

DEMUESTRE: $NP \cdot QR = RP \cdot MN$

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis, $\angle M \cong \angle Q$. Además, $\angle 1 \cong \angle 2$ por el hecho de que los ángulos verticales son congruentes. Ahora $\triangle MNP \sim \triangle QPR$ por AA. Utilizando LCTSP, $\frac{NP}{RP} = \frac{MN}{QR}$. Entonces $NP \cdot QR = RP \cdot MN$ por la propiedad medios-extremos.

GEE
Ejercicios 5-7

NOTA: En la demostración, los lados seleccionados para la proporción se eligieron con cuidado. El enunciado que se debe demostrar sugiere que en la proporción se incluya NP, QR, RP y MN. ■

Además de AA existen otros métodos que se pueden emplear para establecer la semejanza de triángulos. Con la finalidad de distinguir las técnicas siguientes para demostrar la semejanza de triángulos de los métodos para demostrar la congruencia de triángulos se utiliza LAL~ y LLL~ para identificar los teoremas de semejanza. Se demostrará LAL~ en el ejemplo 6 y LLL en el sitio web.

TEOREMA 5.3.3 (LAL~)

Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de un segundo triángulo y los pares de lados que incluyen los ángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Considere esta aplicación del teorema 5.3.3.

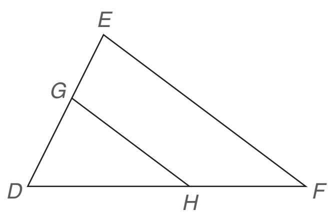


Figura 5.15

EJEMPLO 4

En la figura 5.15, $\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}$. Además, $m\angle E = x$, $m\angle D = x + 22$ y $m\angle DHG = x - 10$. Encuentre el valor de x y la medida de cada ángulo.

Solución Con $\angle D \cong \angle D$ (identidad) y $\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}$ (dado), $\triangle DGH \sim \triangle DEF$ por LAL~. Por ACTSC, $\angle F \cong \angle DGH$, por tanto $m\angle F = x - 10$. La suma de los ángulos en el $\triangle DEF$ es $x + x + 22 + x - 10 = 180$, por lo que $3x + 12 = 180$. Entonces $3x = 168$ y $x = 56$. A su vez, $m\angle E = \angle DGH = 56°$, $m\angle F = m\angle DHG = 46°$ y $m\angle D = 78°$. ■

Advertencia

LLL y LAL demuestran que los triángulos son congruentes. LLL~ y LAL~ demuestran que los triángulos son semejantes.

TEOREMA 5.3.4 (LLL~)

Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados correspondientes de un segundo triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

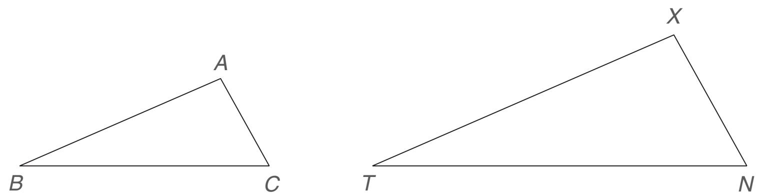
Junto con AA y LAL~, el teorema 5.3.4 (LLL~) proporciona el tercer método (y final) para establecer que los triángulos son semejantes.

EJEMPLO 5

¿Cuál método (AA, LAL~ o LLL~) establece que $\triangle ABC \sim \triangle XTN$? Vea la figura 5.16.

a) $\angle A \cong \angle X$, $AC = 6$, $XN = 9$, $AB = 8$ y $XT = 12$
b) $AB = 6$, $AC = 4$, $BC = 8$, $XT = 9$, $XN = 6$ y $TN = 12$

Solución
a) LAL~; $\frac{AC}{XN} = \frac{AB}{XT}$ b) LLL~; $\frac{AB}{XT} = \frac{AC}{XN} = \frac{BC}{TN}$



Ejercicios 8-10

Figura 5.16 ■

Esta sección finaliza demostrando el teorema 5.3.3 (LAL~). Para lograr este objetivo, se demuestra un teorema auxiliar por el método indirecto. En la figura 5.17 se dice que los lados $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ están divididos proporcionalmente por $\overline{DE}$ si $\frac{DA}{CD} = \frac{EB}{CE}$.

LEMA 5.3.5

Si un segmento de recta divide dos lados de un triángulo proporcionalmente, entonces dicho segmento de recta es paralelo al tercer lado del triángulo.

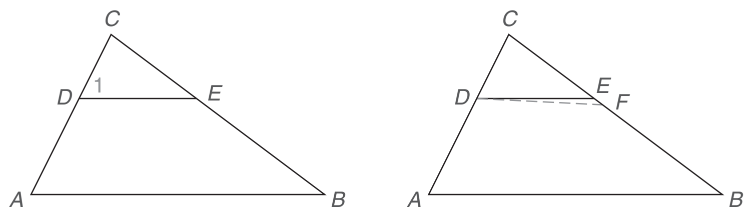


Figura 5.17

DADO: $\triangle ABC$ con $\frac{DA}{CD} = \frac{EB}{CE}$

DEMUESTRE: $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

DEMOSTRACIÓN: $\frac{DA}{CD} = \frac{EB}{CE}$ en $\triangle ABC$. Aplicando la propiedad 3 de la sección 5.1, se tiene $\frac{CD + DA}{CD} = \frac{CE + EB}{CE}$ por lo que $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$(*).

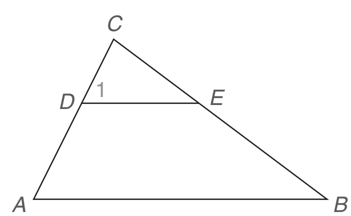
Ahora suponga que $\overline{DE}$ no es paralelo a $\overline{AB}$. A través de D se traza $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$. Se deduce que $\angle CDF \cong \angle A$. Con $\angle C \cong \angle C$ se deduce que $\triangle CDF \sim \triangle CAB$ por la razón AA. Por LCTSP, $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CF}$(**). Utilizando los enunciados con asteriscos y la sustitución, $\frac{CB}{CE} = \frac{CB}{CF}$ $\left(\text{las dos razones son iguales a } \frac{CA}{CD}\right)$. Aplicando la propiedad medios-extremos $CB \cdot CF = CB \cdot CE$. Dividiendo cada lado de la última ecuación entre CB, se encuentra que $CF = CE$. Es decir, F debe coincidir con E; se deduce que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. ■

En el ejemplo 6 se utiliza el lema 5.3.5 para demostrar el teorema LAL~.

EJEMPLO 6

DADO: $\triangle ABC$ y $\triangle DEC$; $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CB}{CE}$

DEMUESTRE: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$



Enunciados	Razones
1. $\triangle ABC$ y $\triangle DEC$; $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$	1. Dado
2. $\frac{CA - CD}{CD} = \frac{CB - CE}{CE}$	2. Propiedad 3 de la sección 5.1
3. $\frac{DA}{CD} = \frac{EB}{CE}$	3. Sustitución
4. $\therefore \overline{DE} \parallel \overline{AB}$	4. Lema 5.3.5
5. $\angle 1 \cong \angle A$	5. Si 2 rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, los $\angle$s correspondientes son $\cong$
6. $\angle C \cong \angle C$	6. Identidad
7. $\triangle ABC \sim \triangle DEC$	7. AA

GEE
Ejercicios 11, 12

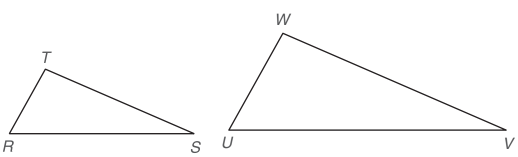
■

Ejercicios 5.3

1. ¿Cuál es el acrónimo que se utiliza para representar el enunciado "Ángulos correspondientes de triángulos semejantes son congruentes"?
2. ¿Cuál es el acrónimo que se utiliza para representar el enunciado "Lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales"?
3. Clasifique como verdadero o falso:
   a) Si los ángulos del vértice de dos triángulos isósceles son congruentes, los triángulos son semejantes.
   b) Cualesquiera dos triángulos equiláteros son semejantes.
4. Clasifique como verdadero o falso:
   a) Si los puntos medios de dos lados de un triángulo se unen, el triángulo formado es semejante al triángulo original.
   b) Cualesquiera dos triángulos isósceles son semejantes.

En los ejercicios 5 al 8 mencione el método (AA, LLL~ o LAL~) que se utiliza para demostrar que los triángulos son semejantes.

5. $WU = \frac{3}{2} \cdot TR$, $WV = \frac{3}{2} \cdot TS$ y $UV = \frac{3}{2} \cdot RS$

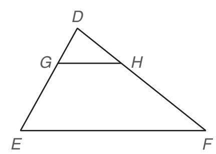


Ejercicios 5–8

6. $\angle T \cong \angle W$ y $\angle R \cong \angle U$
7. $\angle T \cong \angle W$ y $\frac{TR}{WU} = \frac{TS}{WV}$
8. $\frac{TR}{WU} = \frac{TS}{WV} = \frac{RS}{UV}$

En los ejercicios 9 y 10 mencione el método que explica por qué $\triangle DGH \sim \triangle DEF$.

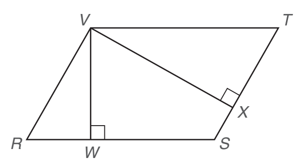
9. $\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}$
10. $DE = 3 \cdot DG$ y $DF = 3 \cdot DH$



Ejercicios 9, 10

En los ejercicios 11 al 14 proporcione las razones faltantes.

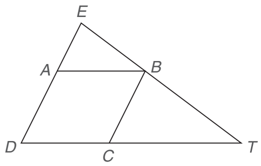
11. *Dado:* $\square RSTV$; $\overline{VW} \perp \overline{RS}$; $\overline{VX} \perp \overline{TS}$
    Demuestre: $\triangle VWR \sim \triangle VXT$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\square RSTV$; $\overline{VW} \perp \overline{RS}$; $\overline{VX} \perp \overline{TS}$	1. ?
2. $\angle VWR$ y $\angle VXT$ son $\angle$s rectos	2. ?
3. $\angle VWR \cong \angle VXT$	3. ?
4. $\angle R \cong \angle T$	4. ?
5. $\triangle VWR \sim \triangle VXT$	5. ?

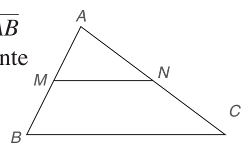
12. *Dado:* $\triangle DET$ y $\square ABCD$
Demuestre: $\triangle ABE \sim \triangle CTB$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\triangle DET$ y $\square ABCD$	1. ?
2. $\overline{AB} \parallel \overline{DT}$	2. Los lados opuestos de un $\square$ son $\parallel$
3. $\angle EBA \cong \angle T$	3. ?
4. $\overline{ED} \parallel \overline{CB}$	4. ?
5. $\angle E \cong \angle CBT$	5. ?
6. $\triangle ABE \sim \triangle CTB$	6. ?

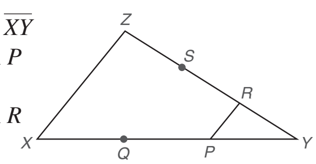
13. *Dado:* $\triangle ABC$; M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente
Demuestre: $\triangle AMN \sim \triangle ABC$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\triangle ABC$; M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente	1. ?
2. $AM = \frac{1}{2}(AB)$ y $AN = \frac{1}{2}(AC)$	2. ?
3. $MN = \frac{1}{2}(BC)$	3. ?
4. $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$, $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$ y $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$	4. ?
5. $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$	5. ?
6. $\triangle AMN \sim \triangle ABC$	6. ?

14. *Dado:* $\triangle XYZ$ con $\overline{XY}$ trisecada en P y Q y $\overline{YZ}$ trisecada en R y S
Demuestre: $\triangle XYZ \sim \triangle PYR$

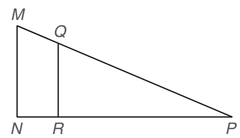


DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\triangle XYZ$; $\overline{XY}$ trisecada en P y Q; $\overline{YZ}$ trisecada en R y S	1. ?
2. $\frac{YR}{YZ} = \frac{1}{3}$ y $\frac{YP}{YX} = \frac{1}{3}$	2. Definición de trisección
3. $\frac{YR}{YZ} = \frac{YP}{YX}$	3. ?
4. $\angle Y \cong \angle Y$	4. ?
5. $\triangle XYZ \sim \triangle PYR$	5. ?

En los ejercicios 15 al 22 complete cada demostración.

15. *Dado:* $\overline{MN} \perp \overline{NP}$, $\overline{QR} \perp \overline{RP}$
Demuestre: $\triangle MNP \sim \triangle QRP$



Ejercicios 15, 16

DEMOSTRACIÓN

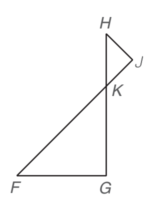
Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. $\angle$s N y QRP son $\angle$s rectos	2. ?
3. ?	3. Todos los $\angle$s rectos son $\cong$
4. $\angle P \cong \angle P$	4. ?
5. ?	5. ?

16. *Dado:* $\overline{MN} \parallel \overline{QR}$ (vea la figura para el ejercicio 15).
Demuestre: $\triangle MNP \sim \triangle QRP$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. $\angle M \cong \angle RQP$	2. ?
3. ?	3. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, los $\angle$s correspondientes son $\cong$
4. ?	4. ?

17. *Dado:* $\angle H \cong \angle F$
Demuestre: $\triangle HJK \sim \triangle FGK$



Ejercicios 17, 18

DEMOSTRACIÓN

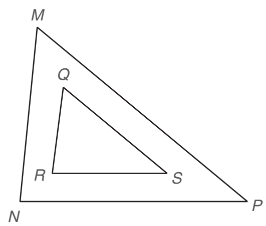
Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. $\angle HKJ \cong \angle FKG$	2. ?
3. ?	3. ?

18. *Dado:* $\overline{HJ} \perp \overline{JF}$, $\overline{HG} \perp \overline{FG}$ (Vea la figura para el ejercicio 17.)
Demuestre: $\triangle HJK \sim \triangle FGK$

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. $\angle$s G y J son $\angle$s rectos	2. ?
3. $\angle G \cong \angle J$	3. ?
4. $\angle HKJ \cong \angle GKF$	4. ?
5. ?	5. ?

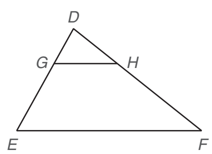
19. *Dado:* $\frac{RQ}{NM} = \frac{RS}{NP} = \frac{QS}{MP}$
Demuestre: $\angle N \cong \angle R$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. ?	2. LLL ~
3. ?	3. ACTSC

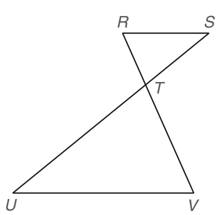
20. *Dado:* $\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}$
Demuestre: $\angle DGH \cong \angle E$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. ?
2. $\angle D \cong \angle D$	2. ?
3. $\triangle DGH \sim \triangle DEF$	3. ?
4. ?	4. ?

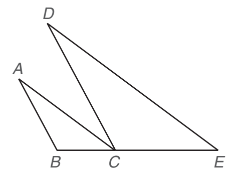
21. *Dado:* $\overline{RS} \parallel \overline{UV}$
Demuestre: $\frac{RT}{VT} = \frac{RS}{VU}$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. ?
2. $\angle R \cong \angle V$ y $\angle S \cong \angle U$	2. ?
3. ?	3. AA
4. ?	4. ?

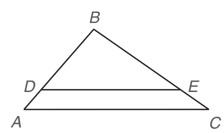
22. *Dado:* $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$
Demuestre: $\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CE}$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	1. ?
2. ?	2. Si 2 rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, los $\angle$s correspondientes son $\cong$
3. ?	3. Dado
4. $\angle ACB \cong \angle E$	4. ?
5. $\triangle ACB \sim \triangle DEC$	5. ?
6. ?	6. ?

En los ejercicios 23 al 26, $\triangle ABC \sim \triangle DBE$.



Ejercicios 23-26

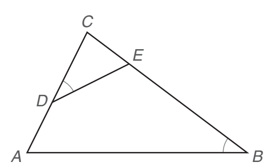
23. *Dado:* $AC = 8$, $DE = 6$, $CB = 6$
Encuentre: EB
(SUGERENCIA: Sea $EB = x$, y resuelva una ecuación.)

24. *Dado:* $AC = 10$, $CB = 12$
E es el punto medio $\overline{CB}$
Encuentre: DE

25. *Dado:* $AC = 10$, $DE = 8$, $AD = 4$
Encuentre: DB

26. *Dado:* $CB = 12$, $CE = 4$, $AD = 5$
Encuentre: DB

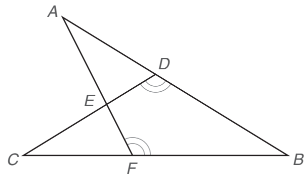
27. $\triangle CDE \sim \triangle CBA$ con $\angle CDE \cong \angle B$. Si $CD = 10$, $DA = 8$ y $CE = 6$, encuentre EB.



Ejercicios 27, 28

28. $\triangle CDE \sim \triangle CBA$ con $\angle CDE \cong \angle B$. Si $CD = 10$, $CA = 16$ y $EB = 12$, encuentre CE. (Vea la figura para el ejercicio 27.)

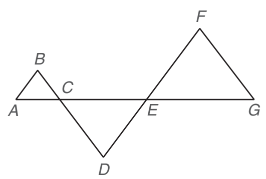
29. $\triangle ABF \sim \triangle CBD$ con ángulos obtusos en los vértices D y F como se indica. Si $m\angle B = 45°$, $m\angle C = x$ y $m\angle AFB = 4x$, encuentre x.



30. $\triangle ABF \sim \triangle CBD$ con ángulos obtusos en los vértices D y F. Si $m\angle B = 44°$ y $m\angle A : m\angle CDB = 1{:}3$, encuentre $m\angle A$.

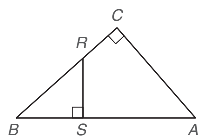
En el ejercicio 31 proporcione una demostración en dos columnas.

31. *Dado:* $\overline{AB} \parallel \overline{DF}$, $\overline{BD} \parallel \overline{FG}$
Demuestre: $\triangle ABC \sim \triangle EFG$

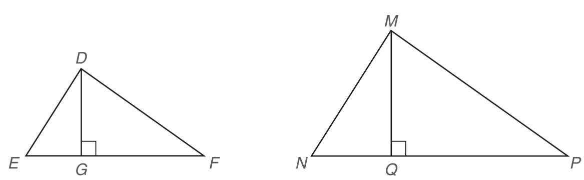


En el ejercicio 32 proporcione una demostración en párrafo.

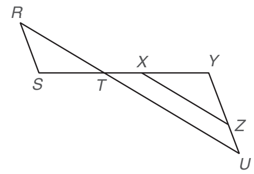
32. *Dado:* $\overline{RS} \perp \overline{AB}$, $\overline{CB} \perp \overline{AC}$
Demuestre: $\triangle BSR \sim \triangle BCA$



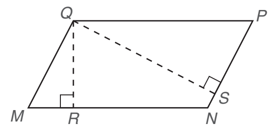
33. Utilice una demostración en dos columnas para demostrar el teorema siguiente: "Las longitudes de las alturas correspondientes de triángulos semejantes tienen la misma relación proporcional que las longitudes de cualquier par de lados correspondientes."
Dado: $\triangle DEF \sim \triangle MNP$; $\overline{DG}$ y $\overline{MQ}$ son alturas
Demuestre: $\dfrac{DG}{MQ} = \dfrac{DE}{MN}$



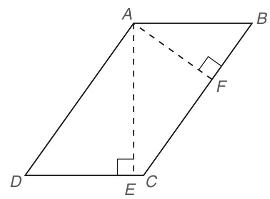
34. Proporcione una demostración en párrafo para el problema siguiente.
Dado: $\overline{RS} \parallel \overline{YZ}$, $\overline{RU} \parallel \overline{XZ}$
Demuestre: $RS \cdot ZX = ZY \cdot RT$



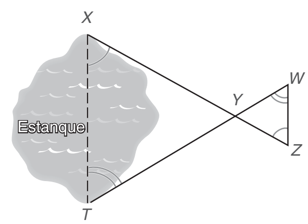
35. Utilice el resultado del ejercicio 11 para resolver el problema siguiente. En $\square MNPQ$, $QP = 12$ y $QM = 9$. La longitud de la altura $\overline{QR}$ (hasta el lado $\overline{MN}$) es 6. Encuentre la longitud de la altura $\overline{QS}$ de Q a $\overline{PN}$.



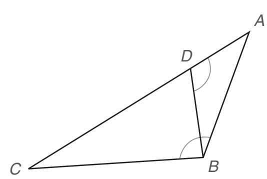
36. Utilice el resultado del ejercicio 11 para resolver el problema siguiente. En el $\square ABCD$, $AB = 7$ y $BC = 12$. La longitud de la altura $\overline{AF}$ (hasta el lado $\overline{BC}$) es 5. Encuentre la longitud de la altura $\overline{AE}$ de A a $\overline{DC}$.



37. La distancia a través de un estanque se medirá de manera indirecta utilizando triángulos semejantes. Si $XY = 160$ pies, $YW = 40$ pies, $TY = 120$ pies y $WZ = 50$ pies, encuentre XT.



38. En la figura, $\angle ABC \cong \angle ADB$. Encuentre AB si $AD = 2$ y $DC = 6$.



39. Demuestre que la altura trazada hasta la hipotenusa de un triángulo rectángulo separa el triángulo rectángulo en dos triángulos rectángulos que son semejantes entre sí y al triángulo rectángulo original.

40. Demuestre que el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo determina un triángulo que es semejante al triángulo original.

5.4 Teorema de Pitágoras

CONCEPTOS CLAVE

Teorema de Pitágoras
Recíproco del teorema de Pitágoras
Tripleta pitagórica

El teorema siguiente, el cual se demostró en el ejercicio 39 de la sección 5.3, permitirá demostrar el bien conocido teorema de Pitágoras.

TEOREMA 5.4.1

La altura trazada hasta la hipotenusa de un triángulo rectángulo separa el triángulo rectángulo en dos triángulos rectángulos que son semejantes entre sí y al triángulo rectángulo original.

El teorema 5.4.1 se ilustra en la figura 5.18, en donde el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ tiene su ángulo recto en el vértice C de manera que $\overline{CD}$ es la altura de la hipotenusa $\overline{AB}$. Los triángulos menores se muestran en las figuras 5.18(b) y (c), y el triángulo original se muestra en la figura 5.18(d). Observe que los arcos dobles indican ángulos congruentes.

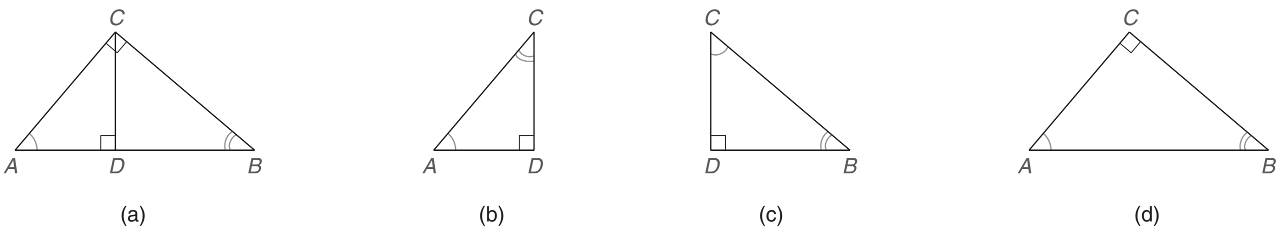


Figura 5.18

Recuerde

LCTSP significa "Lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales".

En la figura 5.18(a), $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ se conocen como *segmentos* (partes) de la hipotenusa $\overline{AB}$. Además, $\overline{AD}$ es el segmento de la hipotenusa *adyacente* a (al lado) del cateto $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ es el segmento de la hipotenusa *adyacente* al cateto $\overline{BC}$. La demostración del teorema siguiente se deja como ejercicio. Compare el enunciado del teorema 5.4.2 con el enunciado "Demuestre" que sigue.

TEOREMA 5.4.2

La longitud de la altura hasta la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la media geométrica de las longitudes de los segmentos de la hipotenusa.

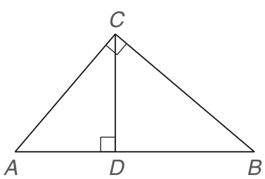


Figura 5.19

DADO: $\triangle ABC$ en la figura 5.19, con $\angle ACB$ recto; $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

DEMUESTRE: $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{DB}$

PLAN PARA LA DEMOSTRACIÓN: Demuestre que $\triangle ADC \sim \triangle CDB$. Luego utilice LCTSP.

En la proporción $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, recuerde que CD es una media geométrica debido a que el segundo y el tercer términos son idénticos.

La demostración del lema siguiente se deja como ejercicio. Compare el enunciado del lema 5.4.3 con el enunciado "Demuestre" que le sigue.

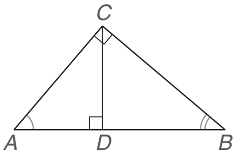


Figura 5.20

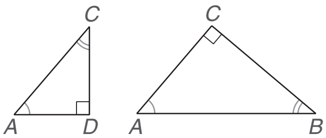


Figura 5.21

LEMA 5.4.3

La longitud de cada cateto de un triángulo rectángulo es la media geométrica de la longitud de la hipotenusa y la longitud del segmento de la hipotenusa adyacente a ese cateto.

DADO: $\triangle ABC$ con $\angle ACB$ rectángulo; $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (Vea la figura 5.20.)

DEMUESTRE: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$

PLAN: Demuestre que $\triangle ADC \sim \triangle ACB$ en la figura 5.21. Luego utilice LCTSP.

NOTA: Aunque $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ son segmentos de la hipotenusa, $\overline{AD}$ es el segmento adyacente a $\overline{AD}$.

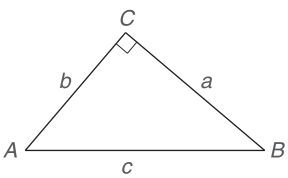
GEE
Ejercicios 1, 2

El lema 5.4.3 abre las puertas para una demostración del famoso teorema de Pitágoras, una de las relaciones más aplicadas en la geometría. Si bien el título del teorema da crédito al geómetra griego Pitágoras, se conocen muchas otras demostraciones y los antiguos chinos tenían conocimiento de la relación antes de la época de Pitágoras.

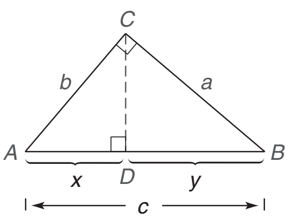
TEOREMA 5.4.4 ▶ (Teorema de Pitágoras)

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Por tanto, si c es la longitud de la hipotenusa y a y b son las longitudes de los catetos, $c^2 = a^2 + b^2$.



(a)



(b)

Figura 5.22

DADO: En la figura 5.22(a), $\triangle ABC$ con $\angle C$ recto

DEMUESTRE: $c^2 = a^2 + b^2$

DEMOSTRACIÓN: Trace $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, como se muestra en la figura 5.22(b).

Denote $AD = x$ y $DB = y$. Por el lema 5.4.3,

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{x} \quad \text{y} \quad \frac{c}{a} = \frac{a}{y}$$

Por tanto, $b^2 = cx$ y $a^2 = cy$

Utilizando la propiedad de adición de la igualdad, se tiene

$$a^2 + b^2 = cy + cx = c(y + x)$$

Pero $y + x = x + y = AD + DB = AB = c$. Por tanto, $a^2 + b^2 = c(c) = c^2$

EJEMPLO 1

Dado el $\triangle RST$ con $\angle S$ recto en la figura 5.23, encuentre:

a) RT si $RS = 3$ y $ST = 4$
b) RT si $RS = 4$ y $ST = 6$
c) RS si $RT = 13$ y $ST = 12$
d) ST si $RS = 6$ y $RT = 9$

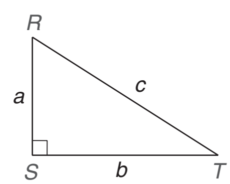


Figura 5.23

Solución En el $\angle S$ recto la hipotenusa es $\overline{RT}$. Entonces $RT = c$, $RS = a$ y $ST = b$.

Descubra

Está disponible un video titulado "La regla de Pitágoras" del Project Mathematics de la Cal Tech University en Pasadena, CA. ¡Vale la pena verlo!

a) $3^2 + 4^2 = c^2 \rightarrow 9 + 16 = c^2$
$c^2 = 25$
$c = 5; RT = 5$

b) $4^2 + 6^2 = c^2 \rightarrow 16 + 36 = c^2$
$c^2 = 52$
$c = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$
$RT = 2\sqrt{13} \approx 7.21$

c) $a^2 + 12^2 = 13^2 \rightarrow a^2 + 144 = 169$
$a^2 = 25$
$a = 5; RS = 5$

d) $6^2 + b^2 = 9^2 \rightarrow 36 + b^2 = 81$
$b^2 = 45$
$b = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
$ST = 3\sqrt{5} \approx 6.71$ ■

Ejercicios 3, 4

El recíproco del teorema de Pitágoras también es verdadero.

TEOREMA 5.4.5 ▶ (Recíproco del teorema de Pitágoras)

Si a, b y c son las longitudes de los tres lados de un triángulo, con c como la longitud del lado más largo y si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo con el ángulo recto opuesto al lado de longitud c.

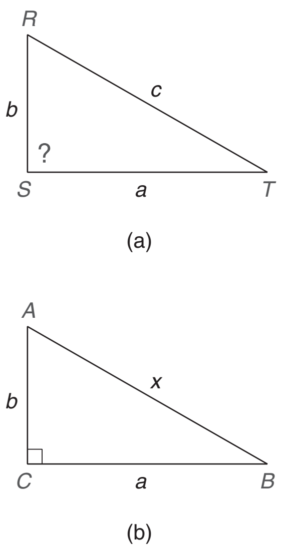


Figura 5.24

DADO: $\triangle RST$ [figura 5.24(a)] con lados a, b y c tal que $c^2 = a^2 + b^2$

DEMUESTRE: $\triangle RST$ es un triángulo rectángulo.

DEMOSTRACIÓN: Se da $\triangle RST$ para el cual $c^2 = a^2 + b^2$. Construya el $\triangle ABC$, que tiene catetos de longitud a y b y una hipotenusa de longitud x. [Vea la figura 5.24(b).] Por el teorema de Pitágoras, $x^2 = a^2 + b^2$. Por sustitución, $x^2 = c^2$ y $x = c$. Por tanto, $\triangle RST \cong \triangle ABC$ por LLL. Entonces el $\angle S$ (opuesto al lado de longitud c) debe ser $\cong$ a $\angle C$, el ángulo recto del $\triangle ABC$. Entonces el $\angle S$ es un ángulo recto y el $\triangle RST$ es un triángulo rectángulo.

EJEMPLO 2

¿Cuáles de las siguientes expresiones representan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo?

a) $a = 5, b = 12, c = 13$
b) $a = 15, b = 8, c = 17$
c) $a = 7, b = 9, c = 10$
d) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{5}$

Solución

a) Sí. Debido a que $5^2 + 12^2 = 13^2$ (es decir, $25 + 144 = 169$) este triángulo es un triángulo rectángulo.
b) Sí. Ya que $15^2 + 8^2 = 17^2$ (es decir, $225 + 64 = 289$), este triángulo es un triángulo rectángulo.
c) No. $7^2 + 9^2 = 49 + 81 = 130$, lo cual no es 10^2 (es decir, 100), por tanto este triángulo no es un triángulo rectángulo.
d) Sí. Debido a que $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2$ conduce a $2 + 3 = 5$, este triángulo es un triángulo rectángulo. ■

Ejercicios 5, 6

EJEMPLO 3

Una escalera de 12 pies de longitud se apoya contra un muro de tal manera que su base queda a 4 pies del muro en el nivel del suelo (vea la figura 5.25). ¿Qué altura del muro alcanza la escalera?

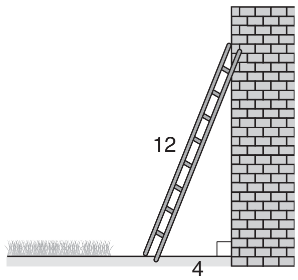


Figura 5.25

Solución La altura deseada está representada por h, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} 4^2 + h^2 &= 12^2 \\ 16 + h^2 &= 144 \\ h^2 &= 128 \\ h &= \sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

La altura es exactamente $h = 8\sqrt{2}$, lo que es aproximadamente 11.31 pies. ■

Descubra

Construya un triángulo de lados de longitudes de 3, 4 y 5 pulg. Mida los ángulos del triángulo ¿Hay un ángulo recto?

RESPUESTA

Sí, opuesto al lado de 5 pulg.

Recuerde

Las diagonales de un rombo se bisecan perpendicularmente entre sí.

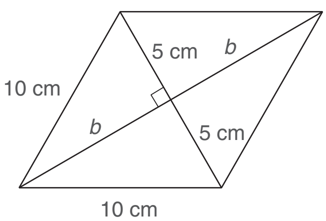


Figura 5.26

EJEMPLO 4

Una diagonal de un rombo tiene la misma longitud, 10 cm, al igual que cada lado (vea la figura 5.26). ¿Cuánto mide la otra diagonal?

Solución Debido a que las diagonales se bisecan perpendicularmente entre sí, se forman cuatro $\triangle$s rectángulos. Para cada $\triangle$ rectángulo un lado del rombo es la hipotenusa. La mitad de la longitud de cada diagonal es la longitud de un cateto de cada triángulo rectángulo. Por tanto,

$$\begin{aligned} 5^2 + b^2 &= 10^2 \\ 25 + b^2 &= 100 \\ b^2 &= 75 \\ b &= \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Entonces la longitud de la diagonal completa es $10\sqrt{3}\,\text{cm} \approx 17.32\,\text{cm}$. ■

En el ejemplo 5 también se utiliza el teorema de Pitágoras, pero es mucho más complicado que el ejemplo 4. En efecto, es una de esas situaciones que pueden requerir cierta visión para ser resueltas. Observe que el triángulo descrito en el ejemplo 5 *no* es un triángulo rectángulo ya que $4^2 + 5^2 \neq 6^2$.

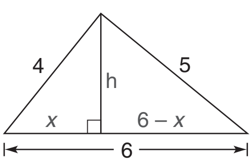


Figura 5.27

EJEMPLO 5

Un triángulo tiene lados de longitudes 4, 5 y 6, como se muestra en la figura 5.27. Encuentre la longitud de la altura hasta el lado de longitud 6.

Solución La altura hasta el lado de longitud 6 separa este lado en dos partes cuyas longitudes están dadas por x y $6 - x$. Utilizando los dos triángulos rectángulos que se formaron se aplica dos veces el teorema de Pitágoras.

$$x^2 + h^2 = 4^2 \quad \text{y} \quad (6 - x)^2 + h^2 = 5^2$$

Sustrayendo la primera ecuación de la segunda, se puede calcular x.

$$\begin{array}{rcl} 36 - 12x + x^2 + h^2 &=& 25 \\ x^2 + h^2 &=& 16 \\ \hline 36 - 12x \qquad\qquad &=& 9 \qquad\qquad \textbf{(sustracción)} \\ -12x &=& -27 \\ x &=& \dfrac{27}{12} = \dfrac{9}{4} \end{array}$$

Ahora se utiliza $x = \frac{9}{4}$ para encontrar h.

$$\begin{aligned} x^2 + h^2 &= 4^2 \\ \left(\frac{9}{4}\right)^2 + h^2 &= 4^2 \\ \frac{81}{16} + h^2 &= 16 \\ \frac{81}{16} + h^2 &= \frac{256}{16} \\ h^2 &= \frac{175}{16} \\ h &= \frac{\sqrt{175}}{4} = \frac{\sqrt{25 \cdot 7}}{4} = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{7}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \approx 3.31 \end{aligned}$$

■

Ahora es posible comprobar el método HC para comprobar la congruencia de triángulos, un método que se introdujo en la sección 3.2.

TEOREMA 5.4.6

Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un cateto de un segundo triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes (HC).

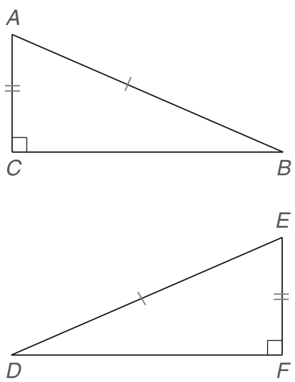


Figura 5.28

Ejercicios 7, 8

DADO: $\triangle ABC$ recto con $\angle C$ recto y $\triangle DEF$ rectángulo con $\angle F$ recto (vea la figura 5.28); $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{EF}$

DEMUESTRE: $\triangle ABC \cong \triangle EDF$

DEMOSTRACIÓN: Con el $\angle C$ recto la hipotenusa del $\triangle ABC$ es $\overline{AB}$; de manera similar, $\overline{DE}$ es la hipotenusa del $\triangle EDF$ rectángulo. Debido a que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, se denota la longitud común por c; es decir, $AB = DE = c$. Debido a que $\overline{AC} \cong \overline{EF}$, también se tiene $AC = EF = a$. Entonces

$$a^2 + (BC)^2 = c^2 \quad \text{y} \quad a^2 + (DF)^2 = c^2 \text{ lo que conduce a}$$
$$BC = \sqrt{c^2 - a^2} \quad \text{y} \quad DF = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Entonces $BC = DF$ de manera que $\overline{BC} \cong \overline{DF}$. De aquí, el $\triangle ABC \cong \triangle EDF$ por LLL. ■

El trabajo con el teorema de Pitágoras estaría incompleto si no se abordaran dos cuestiones. La primera, las tripletas pitagóricas, que implican números naturales (o contables) como elecciones posibles para a, b y c. La segunda conduce a la clasificación de los triángulos de acuerdo con las longitudes de sus lados, como se encuentra en el teorema 5.4.7 de la página 250.

TRIPLETAS PITAGÓRICAS

DEFINICIÓN

Una **tripleta pitagórica** es un conjunto de números naturales (a, b, c) para los cuales $a^2 + b^2 = c^2$.

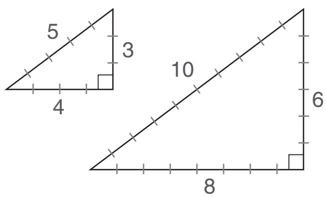


Figura 5.29

Los tres conjuntos de tripletas pitagóricas que se encuentran en esta sección son (3, 4, 5), (5, 12, 13) y (8, 15, 17). Estos números siempre se adjuntan a los lados de un triángulo rectángulo.

Los múltiplos de números naturales de cualquiera de estas tripletas también constituirán las tripletas pitagóricas. Por ejemplo, al duplicar (3, 4, 5) se obtiene (6, 8, 10), lo que también es una tripleta pitagórica. En la figura 5.29 los triángulos son semejantes por LLL~.

La tripleta pitagórica (3, 4, 5) también conduce a (9, 12, 15), (12, 16, 20) y (15, 20, 25). La tripleta pitagórica (5, 12, 13) conduce a tripletas como (10, 24, 26) y (15, 36, 39). Las tripletas pitagóricas básicas que se emplean con menos frecuencia incluyen (7, 24, 25), (9, 40, 41) y (20, 21, 29).

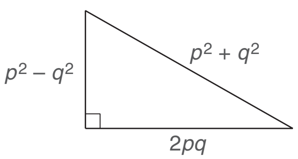


Figura 5.30

Las tripletas pitagóricas se pueden generar utilizando fórmulas selectas. Cuando p y q son números naturales y $p > q$, una fórmula utiliza $2pq$ para la longitud de un cateto, $p^2 - q^2$ para la longitud del otro cateto y $p^2 + q^2$ para la longitud de la hipotenusa. (Vea la figura 5.30.)

En la tabla 5.1 se enlistan algunas tripletas pitagóricas correspondientes a las elecciones para p y q. Las tripletas impresas en negritas son *tripletas básicas*, también conocidas como *tripletas primitivas.* En la práctica, el conocimiento de las tripletas primitivas y sus múltiplos le ahorrará tiempo y esfuerzo considerables. En la última columna se proporciona la tripleta resultante en el orden de a (menor) a c (mayor).

TABLA 5.1
Tripletas pitagóricas

p	q	a (o b) $p^2 - q^2$	b (o a) $2pq$	c $p^2 + q^2$	(a, b, c)
2	1	3	4	5	**(3, 4, 5)**
3	1	8	6	10	(6, 8, 10)
3	2	5	12	13	**(5, 12, 13)**
4	1	15	8	17	**(8, 15, 17)**
4	3	7	24	25	**(7, 24, 25)**
5	1	24	10	26	(10, 24, 26)
5	2	21	20	29	**(20, 21, 29)**
5	3	16	30	34	(16, 30, 34)
5	4	9	40	41	**(9, 40, 41)**

GEE
Ejercicios 9-11

EL RECÍPROCO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

El recíproco del teorema de Pitágoras permite reconocer un triángulo rectángulo conociendo las longitudes de sus lados. Una variación del recíproco permite determinar si un triángulo es agudo u obtuso. Este teorema se enuncia sin demostración.

TEOREMA 5.4.7

Sean a, b y c las longitudes de los tres lados de un triángulo, siendo c la longitud del lado más largo.

1. Si $c^2 > a^2 + b^2$, entonces el triángulo es obtuso y el ángulo obtuso se encuentra opuesto al lado de longitud c.
2. Si $c^2 < a^2 + b^2$, entonces el triángulo es agudo.

EJEMPLO 6

Determine el tipo de triángulo que se representa si las longitudes de sus lados son las siguientes:

a) 4, 5, 7
b) 6, 7, 8
c) 9, 12, 15
d) 3, 4, 9

Solución

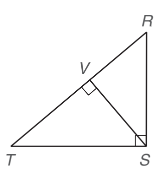
a) Eligiendo $c = 7$, se tiene $7^2 > 4^2 + 5^2$, o $49 > 16 + 25$; el triángulo es obtuso.
b) Eligiendo $c = 8$, se tiene $8^2 < 6^2 + 7^2$, o $64 < 36 + 49$; el triángulo es agudo.
c) Eligiendo $c = 15$, se tiene $15^2 = 9^2 + 12^2$, o $225 = 81 + 144$; el triángulo es un triángulo rectángulo.
d) Debido a que $9 > 3 + 4$ ningún triángulo es posible. (Recuerde que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo debe ser mayor que la longitud del tercer lado.) ■

GEE *Ejercicios 12, 13*

Ejercicios 5.4

1. Nombrando los vértices en orden, enuncie tres triángulos diferentes que sean semejantes uno con otro.
2. Utilice el teorema 5.4.2 para formar una proporción en la que SV sea una media geométrica.

   (SUGERENCIA: $\triangle SVT \sim \triangle RVS$)

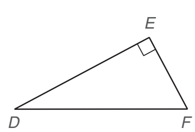


Ejercicios 1-6

3. Utilice el lema 5.4.3 para formar una proporción en la que RS sea una media geométrica.

   (SUGERENCIA: $\triangle RVS \sim \triangle RST$)
4. Utilice el lema 5.4.3 para formar una proporción en la que TS sea una media geométrica.

   (SUGERENCIA: $\triangle TVS \sim \triangle TSR$)
5. Utilice el teorema 5.4.2 para encontrar RV si $SV = 6$ y $VT = 8$.
6. Utilice el lema 5.4.3 para encontrar RT si $RS = 6$ y $VR = 4$.
7. Encuentre la longitud de $\overline{DF}$ si:
   a) $DE = 8$ y $EF = 6$
   b) $DE = 5$ y $EF = 3$
8. Encuentre la longitud de $\overline{DE}$ si:
   a) $DF = 13$ y $EF = 5$
   b) $DF = 12$ y $EF = 6\sqrt{3}$

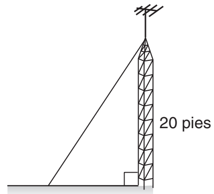


Ejercicios 7-10

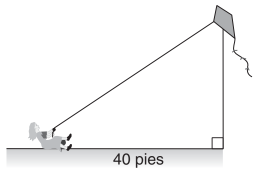
9. Encuentre EF si:
   a) $DF = 17$ y $DE = 15$
   b) $DF = 12$ y $DE = 8\sqrt{2}$
10. Encuentre DF si:
    a) $DE = 12$ y $EF = 5$
    b) $DE = 12$ y $EF = 6$
11. Determine si cada tripleta (a, b, c) es una tripleta pitagórica.
    a) (3, 4, 5)
    b) (4, 5, 6)
    c) (5, 12, 13)
    d) (6, 13, 15)
12. Determine si cada tripleta (a, b, c) es una tripleta pitagórica.
    a) (8, 15, 17)
    b) (10, 13, 19)
    c) (6, 8, 10)
    d) (11, 17, 20)
13. Determine el tipo de triángulo que se representa si las longitudes de sus lados son:
    a) $a = 4$, $b = 3$ y $c = 5$
    b) $a = 4$, $b = 5$ y $c = 6$
    c) $a = 2$, $b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{7}$
    d) $a = 3$, $b = 8$ y $c = 15$

14. Determine el tipo de triángulo que se representa si las longitudes de sus lados son:
a) $a = 1.5$, $b = 2$ y $c = 2.5$
b) $a = 20$, $b = 21$ y $c = 29$
c) $a = 10$, $b = 12$ y $c = 16$
d) $a = 5$, $b = 7$ y $c = 9$

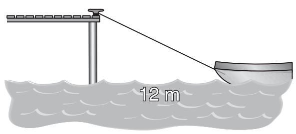
15. Un asta de 25 pies soporta una antena en un punto que está 20 pies arriba de la base de la antena. ¿A qué distancia de la base de la antena está anclada el asta?



16. Un viento fuerte mantiene elevada una cometa 30 pies por encima del suelo una distancia de 40 pies sobre el suelo. ¿Cuánta cuerda ha soltado la niña (hasta la cometa)?



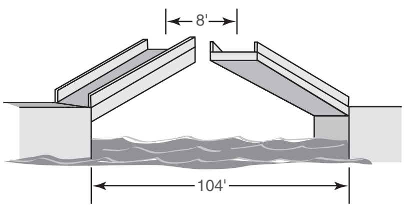
17. Un bote está a 6 m abajo del nivel del muelle y a 12 m de distancia del muelle sobre la superficie del agua. ¿Cuánta cuerda se necesita para alcanzar el bote?



18. La tripulación de tierra mantiene elevado un globo aerostático en un punto que está a 21 pies de un punto directamente debajo de la góndola del globo. Si la cuerda tiene una longitud de 29 pies, ¿qué tan arriba del suelo está el globo?

© Sonya Etchison/Shutterstock

19. Un puente levadizo de 104 pies de longitud se levanta en su punto medio de tal manera que los puntos superiores están separados 8 pies. ¿Cuánto se ha elevado cada una de las secciones medias?



20. Un puente levadizo de 136 pies de longitud se levanta en su punto medio de tal manera que los puntos superiores están separados 16 pies. ¿Cuánto se ha elevado cada una de las secciones medias?

(SUGERENCIA: Considere el dibujo para el ejercicio 19.)

21. Un rectángulo tiene un ancho de 16 cm y una diagonal de 20 cm de longitud. ¿Cuánto mide el rectángulo?

22. Un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes x y $2x + 2$ y una hipotenusa de longitud $2x + 3$. ¿Cuáles son las longitudes de sus lados?

23. Un rectángulo tiene una longitud base $x + 3$, una longitud de su altura $x + 1$ y diagonales de longitud $2x$ cada una. ¿Cuáles son las longitudes de su base, su altura y sus diagonales?

24. Las diagonales de un rombo miden 6 y 8 m. ¿Cuánto mide cada uno de los lados congruentes?

25. Cada lado de un rombo mide 12 pulg. Si una diagonal tiene una longitud de 18 pulg, ¿cuánto mide la otra diagonal?

26. Un triángulo rectángulo isósceles tiene una hipotenusa con una longitud de 10 cm. ¿Cuánto mide cada cateto?

27. Cada cateto de un triángulo rectángulo isósceles tiene una longitud de $6\sqrt{2}$ pulg. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

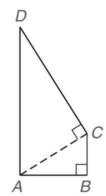
28. En el $\triangle ABC$ rectángulo con $\angle C$ recto, $AB = 10$ y $BC = 8$. Encuentre la longitud de $\overline{MB}$ si M es el punto medio de $\overline{AC}$.

29. En el $\triangle ABC$ rectángulo con $\angle C$ recto, $AB = 17$ y $BC = 15$. Encuentre la longitud de $\overline{MN}$ si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.

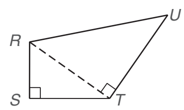
30. Encuentre la longitud de la altura del lado de 10 pulg de un triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 10 pulgadas

31. Encuentre la longitud de la altura del lado de 26 pulg de un triángulo cuyos lados miden 10, 24 y 26 pulgadas.

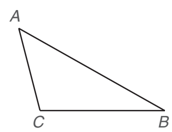
32. En el cuadrilátero $ABCD$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ y $\overline{DC} \perp$ a la diagonal $\overline{AC}$. Si $AB = 4$, $BC = 3$ y $DC = 12$, determine DA.



33. En el cuadrilátero $RSTU$, $\overline{RS} \perp \overline{ST}$ y $\overline{UT} \perp$ a la diagonal $\overline{RT}$. Si $RS = 6$, $ST = 8$ y $RU = 15$, encuentre UT.

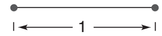


34. *Dado:* $\triangle ABC$ no es un $\triangle$ rectángulo
Demuestre: $a^2 + b^2 \neq c^2$
[**NOTA:** $AB = c$, $AC = b$ y $CB = a$.]



***35.** Si $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ y $c = p^2 + q^2$, demuestre que $c^2 = a^2 + b^2$.

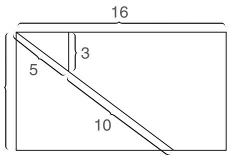
36. Dado que el segmento de recta que se muestra tiene longitud 1, construya un segmento de recta cuya longitud sea $\sqrt{2}$.



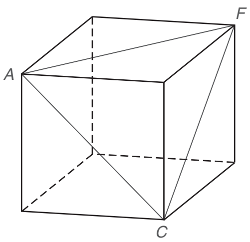
Ejercicios 36, 37

37. Utilizando el segmento de recta del ejercicio 36, construya un segmento de recta de longitud 2 y luego un segundo segmento de recta de longitud $\sqrt{5}$.

38. Cuando el rectángulo en el dibujo siguiente (cuyas dimensiones son 16 por 9) se corta en partes y se reacomoda, se puede formar un cuadrado. ¿Cuál es el perímetro de este cuadrado?



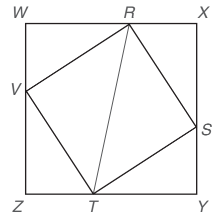
39. A, C y F son tres de los vértices del cubo que se muestra en la figura siguiente. Dado que cada cara del cubo es un cuadrado, ¿cuál es la medida del ángulo ACF?



***40.** Encuentre la longitud de la altura para el lado de 8 pulg de un triángulo cuyos lados miden 4, 6 y 8 pulgadas.

(SUGERENCIA: Consulte el ejemplo 5.)

41. En la figura, el cuadrado $RSTV$ tiene vértices en los lados del cuadrado $WXYZ$ como se muestra. Si $ZT = 5$ y $TY = 12$, encuentre TS. También encuentre RT.



42. Demuestre que si (a, b, c) es una tripleta pitagórica y n es un número natural, entonces (na, nb, nc) también es una tripleta pitagórica.

43. Utilice la figura 5.19 para demostrar el teorema 5.4.2.

44. Utilice las figuras 5.20 y 5.21 para demostrar el lema 5.4.3.

5.5 Triángulos rectángulos especiales

CONCEPTOS CLAVE Triángulo 45°-45°-90° Triángulo 30°-60°-90°

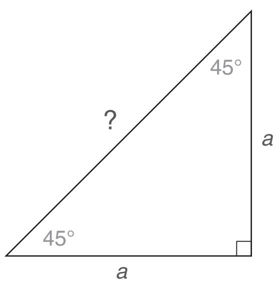


Figura 5.31

Muchos de los cálculos que se realizan en esta sección involucran raíces cuadradas. Para comprender mejor algunos de los cálculos puede ser necesario repasar las propiedades de las raíces cuadradas en el apéndice A.4.

Ciertos triángulos rectángulos ocurren con tal frecuencia que merecen más atención que otros. Los dos triángulos rectángulos especiales que se consideran en esta sección tienen medidas angulares de 45°, 45° y 90° o de 30°, 60° y 90°.

TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE 45°-45°-90°

En el triángulo 45°-45°-90° los catetos son opuestos a los ángulos congruentes y también son congruentes. En vez de utilizar a y b para representar las longitudes de los catetos se emplea a para las dos longitudes, como se muestra en la figura 5.31. Por el teorema de Pitágoras, se deduce que

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + a^2 \\ c^2 &= 2a^2 \\ c &= \sqrt{2a^2} \\ c &= \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2} \\ c &= a\sqrt{2} \end{aligned}$$

TEOREMA 5.5.1 ▶ (Teorema 45-45-90)

En un triángulo cuyos ángulos miden 45°, 45° y 90° la hipotenusa tiene una longitud igual al producto de $\sqrt{2}$ y la longitud de cualquier cateto.

GEE *Ejercicios 1-3*

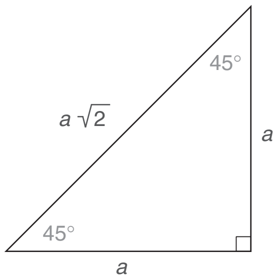


Figura 5.32

Es mejor memorizar el bosquejo de la figura 5.32 que repetir los pasos de la “demostración” que preceden al teorema 45-45-90.

EJEMPLO 1

Encuentre las longitudes de los lados faltantes en cada triángulo de la figura 5.33.

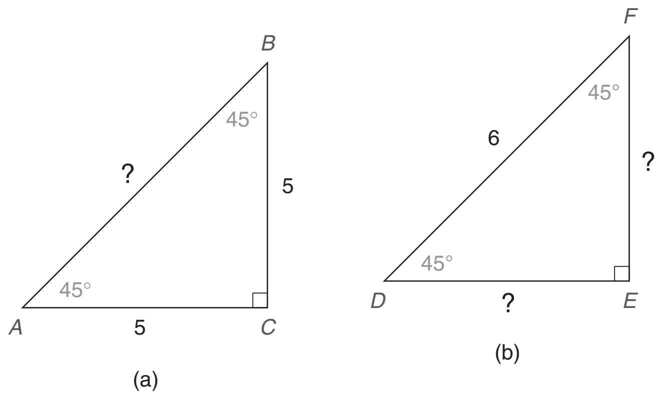


Figura 5.33

Recuerde

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a esos ángulos son congruentes.

Solución

a) La longitud de la hipotenusa $\overline{AB}$ es $5\sqrt{2}$, el producto de $\sqrt{2}$ y la longitud de cualquiera de los catetos iguales.

b) Sea que a denote la longitud de $\overline{DE}$ y de $\overline{EF}$. La longitud de la hipotenusa $\overline{DF}$ es $a\sqrt{2}$.

Entonces $a\sqrt{2} = 6$, por tanto $a = \frac{6}{\sqrt{2}}$. Simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} a &= \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{6\sqrt{2}}{2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Por tanto, $DE = EF = 3\sqrt{2} \approx 4.24$.

NOTA: Si se utiliza el teorema de Pitágoras para resolver el ejemplo 1, la solución en el inciso (a) se puede encontrar resolviendo la ecuación $5^2 + 5^2 = c^2$ y la solución en el inciso (b) se puede encontrar resolviendo $a^2 + a^2 = 6^2$. ■

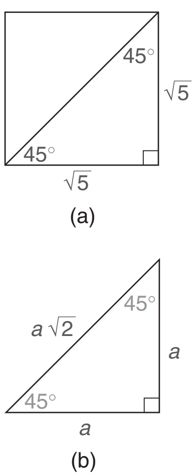


Figura 5.34

GEE *Ejercicios 4-7*

EJEMPLO 2

Cada lado de un cuadrado tiene una longitud de $\sqrt{5}$. Encuentre la longitud de una diagonal.

Solución El cuadrado que se muestra en la figura 5.34(a) está separado en dos triángulos 45°-45°-90°. Con cada uno de los catetos congruentes representado por a en la figura 5.34(b) se observa que $a = \sqrt{5}$ y la longitud de la diagonal (hipotenusa) es $a \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$, por tanto $a = \sqrt{10} \approx 3.16$. ■

TRIÁNGULO RECTÁNGULO 30°-60°-90°

El segundo triángulo rectángulo especial es el triángulo 30°-60°-90°.

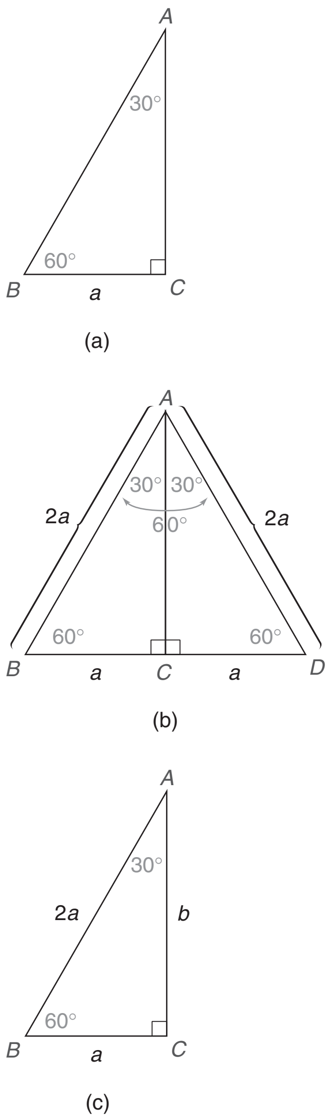


Figura 5.35

TEOREMA 5.5.2 ▶ (Teorema 30-60-90)

En un triángulo cuyos ángulos miden 30°, 60° y 90° la hipotenusa tiene una longitud igual al doble de la longitud del cateto menor, y la longitud del cateto mayor es el producto de $\sqrt{3}$ y la longitud del cateto menor.

EJEMPLO 3

Estudie la demostración gráfica del teorema 5.5.2. Vea la figura 5.35(a).

DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA 5.5.2

DADO: $\triangle ABC$ con $m\angle A = 30°$, $m\angle B = 60°$ y $m\angle C = 90°$ y $BC = a$

DEMUESTRE: $AB = 2a$ y $AC = a\sqrt{3}$

DEMOSTRACIÓN: Se refleja el $\triangle ABC$ a través de $\overline{AC}$ para formar un triángulo equiángulo y por tanto equilátero $\triangle ABD$. Como se muestra en las figuras 5.35(b) y 5.35(c) se tiene que $AB = 2a$. Para encontrar b en la figura 5.35(c) se aplica el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ (2a)^2 &= a^2 + b^2 \\ 4a^2 &= a^2 + b^2 \\ 3a^2 &= b^2, \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} b^2 &= 3a^2 \\ b &= \sqrt{3a^2} \\ b &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2} \\ b &= a\sqrt{3} \end{aligned}$$

Es decir, $AC = a\sqrt{3}$. ■

Sería mejor memorizar el bosquejo en la figura 5.36. Así recordará más fácilmente qué expresión se utiliza para cada lado; recuerde que las longitudes de los lados siguen el mismo orden que el de los ángulos opuestos a ellos. Por tanto,

GEE *Ejercicios 8-10*

> Opuesta al $\angle$ de 30° (ángulo menor) es a (longitud del lado menor).
> Opuesta al $\angle$ de 60° (ángulo medio) es $a\sqrt{3}$ (longitud del lado medio).
> Opuesto al $\angle$ de 90° (ángulo mayor) es $2a$ (longitud del lado mayor).

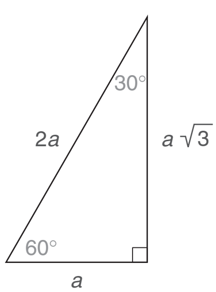


Figura 5.36

EJEMPLO 4

Encuentre las longitudes de los lados faltantes de cada triángulo en la figura 5.37.

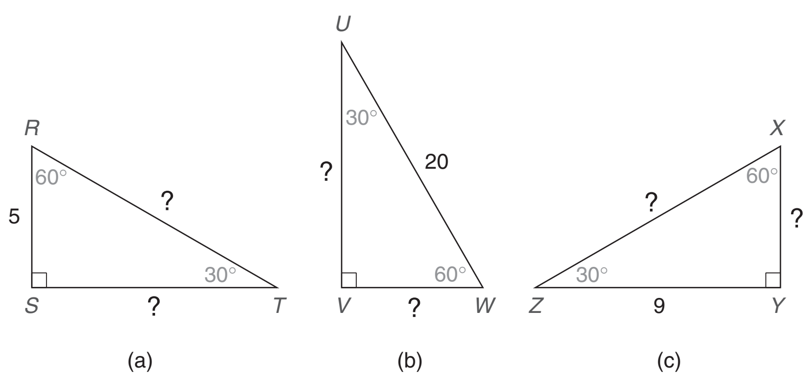


Figura 5.37

Solución

a) $RT = 2 \cdot RS = 2 \cdot 5 = 10$
$ST = RS\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \approx 8.66$

b) $UW = 2 \cdot VW \rightarrow 20 = 2 \cdot VW \rightarrow VW = 10$
$UV = VW\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \approx 17.32$

c) $ZY = XY\sqrt{3} \rightarrow 9 = XY \cdot \sqrt{3} \rightarrow XY = \dfrac{9}{\sqrt{3}} = \dfrac{9}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} \approx 5.20$$

$XZ = 2 \cdot XY = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \approx 10.39$ ■

EJEMPLO 5

Cada lado de un triángulo equilátero mide 6 pulg. Encuentre la longitud de una altura del triángulo.

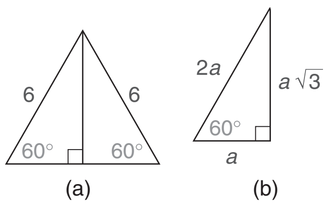


Figura 5.38

Solución El triángulo equilátero que se muestra en la figura 5.38(a) está separado en dos triángulos 30°-60°-90° por la altura. En el triángulo 30°-60°-90° de la figura 5.38(b), el lado del triángulo equilátero se convierte en la hipotenusa, por tanto $2a = 6$ y $a = 3$. La altura se encuentra opuesta al ángulo de 60° del triángulo 30°-60°-90°, por lo que su longitud es $a\sqrt{3}$ o $3\sqrt{3}$ pulg $\approx$ 5.20 pulg. ■

El recíproco del teorema 5.5.1 es verdadero y se describe en el teorema siguiente.

TEOREMA 5.5.3

Si la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al producto de $\sqrt{2}$ y la longitud de cualquier cateto, entonces los ángulos del triángulo miden 45°, 45° y 90°.

GEE
Ejercicios 11-13

DADO: El triángulo rectángulo con longitudes de lados a, a y $a\sqrt{2}$**.** (Vea la figura 5.39.)

DEMUESTRE: El triángulo es un triángulo 45°-45°-90°

Demostración

En la figura 5.39 la longitud de la hipotenusa es $a\sqrt{2}$, donde a es la longitud de cualquier cateto. En un triángulo rectángulo los ángulos que se encuentran opuestos a los catetos congruentes también son congruentes. En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos son complementarios, por lo que cada uno de los ángulos agudos congruentes mide 45°.

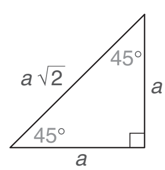


Figura 5.39 ■

EJEMPLO 6

En el $\triangle RST$ rectángulo, $RS = ST$. (Vea la figura 5.40.) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos del triángulo? Si $RT = 12\sqrt{2}$, ¿cuál es la longitud de $\overline{RS}$ (o $\overline{ST}$)?

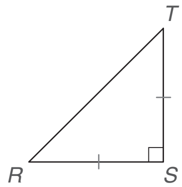


Figura 5.40

Solución El lado mayor es la hipotenusa $\overline{RT}$, por tanto el ángulo recto es $\angle S$ y $m\angle S = 90°$. Debido a que $\overline{RS} \cong \overline{ST}$, los ángulos agudos congruentes son los $\angle$s R y T y $m\angle R = m\angle T = 45°$. Dado que $RT = 12\sqrt{2}$, $RS = ST = 12$. ■

El recíproco del teorema 5.5.2 también es verdadero y se puede demostrar mediante el método indirecto. En vez de construir la demostración se enuncia y se aplica este teorema. Vea la figura 5.41.

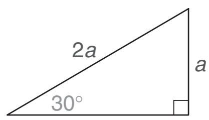


Figura 5.41

TEOREMA 5.5.4

Si la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es el doble de la longitud de un cateto del triángulo, entonces el ángulo del triángulo opuesto a ese cateto mide 30°.

A continuación se enuncia una forma equivalente de este teorema:

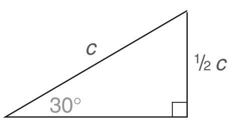


Figura 5.42

Si un cateto de un triángulo rectángulo tiene una longitud igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa, entonces el ángulo del triángulo opuesto a ese cateto mide 30° (vea la figura 5.42).

EJEMPLO 7

En el $\triangle ABC$ rectángulo con $\angle C$ recto, $AB = 24.6$ y $BC = 12.3$ (vea la figura 5.43). ¿Cuáles son las medidas de los ángulos del triángulo? Además ¿cuál es la longitud de $\overline{AC}$?

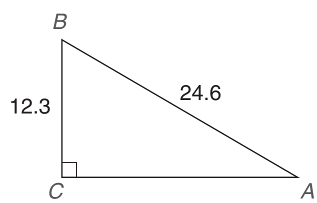


Figura 5.43

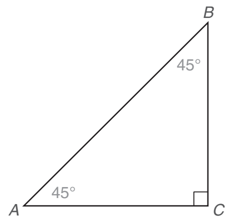
Solución Debido a que el $\angle C$ es un ángulo recto, $m\angle C = 90°$ y $\overline{AB}$ es la hipotenusa. Dado que $BC = \frac{1}{2}(AB)$, el ángulo opuesto a $\overline{BC}$ mide 30°. Por tanto, $m\angle A = 30°$ y $m\angle B = 60°$.

Puesto que $\overline{AC}$ se encuentra opuesto al ángulo de 60°, $AC = (12.3)\sqrt{3} \approx 21.3$. ■

Ejercicios 5.5

1. Para el triángulo 45°-45°-90° que se muestra, suponga que $AC = a$.
Encuentre:
a) BC b) AB

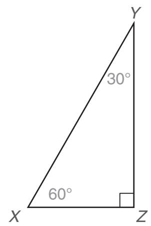
2. Para el triángulo 45°-45°-90° que se muestra suponga que $AB = a\sqrt{2}$.
Encuentre:
a) AC b) BC



Ejercicios 1, 2

3. Para el triángulo 30°-60°-90° que se muestra suponga que $XZ = a$.
Encuentre:
a) YZ b) XY

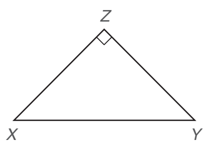
4. Para el triángulo 30°-60°-90° que se muestra suponga que $XY = 2a$.
Encuentre:
a) XZ b) YZ



Ejercicios 3, 4

En los ejercicios 5 al 22 encuentre las longitudes que faltan. Proporcione sus respuestas en forma radical más simple y como aproximación a dos puntos decimales.

5. *Dado:* El $\triangle XYZ$ rectángulo con $m\angle X = 45°$ y $XZ = 8$
Encuentre: YZ y XY



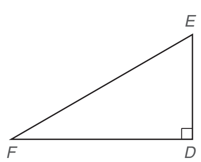
Ejercicios 5-8

6. *Dado:* El $\triangle XYZ$ rectángulo con $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$ y $XY = 10$
Encuentre: XZ y YZ

7. *Dado:* El $\triangle XYZ$ rectángulo con $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$ y $XY = 10\sqrt{2}$
Encuentre: XZ y YZ

8. *Dado:* El $\triangle XYZ$ rectángulo con $m\angle X = 45°$ y $XY = 12\sqrt{2}$
Encuentre: XZ y YZ

9. *Dado:* El $\triangle DEF$ rectángulo con $m\angle E = 60°$ y $DE = 5$
Encuentre: DF y FE



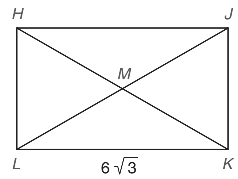
Ejercicios 9-12

10. *Dado:* El $\triangle DEF$ rectángulo con $m\angle F = 30°$ y $FE = 12$
Encuentre: DF y DE

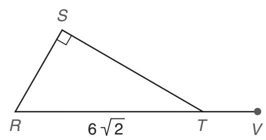
11. *Dado:* El $\triangle DEF$ con $m\angle E = 60°$ y $FD = 12\sqrt{3}$
Encuentre: DE y FE

12. *Dado:* El $\triangle DEF$ rectángulo con $m\angle E = 2 \cdot m\angle F$ y $EF = 12\sqrt{3}$
Encuentre: DE y DF

13. *Dado:* El rectángulo $HJKL$ con diagonales $\overline{HK}$ y $\overline{JL}$
$m\angle HKL = 30°$
Encuentre: HL, HK y MK



14. *Dado:* El $\triangle RST$ rectángulo con $RT = 6\sqrt{2}$ y $m\angle STV = 150°$
Encuentre: RS y ST



En los ejercicios 15-19 hago los trazos necesarios.

15. *Dado:* El $\triangle ABC$ con $m\angle A = m\angle B = 45°$ y $BC = 6$
Encuentre: AC y AB

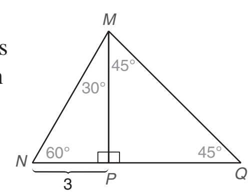
16. *Dado:* $\triangle MNP$ rectángulo con $MP = PN$ y $MN = 10\sqrt{2}$
Encuentre: PM y PN

17. *Dado:* $\triangle RST$ con $m\angle T = 30°$, $m\angle S = 60°$ y $ST = 12$
Encuentre: RS y RT

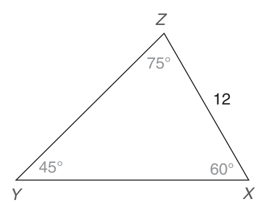
18. *Dado:* $\triangle XYZ$ con $\overline{XY} \cong \overline{XZ} \cong \overline{YZ}$
$\overline{ZW} \perp \overline{XY}$ con W en $\overline{XY}$
$YZ = 6$
Encuentre: ZW

19. *Dado:* El cuadrado $ABCD$ con diagonales $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$ que se intersecan en E
$DC = 5\sqrt{3}$
Encuentre: DB

20. *Dado:* $\triangle NQM$ con ángulos como se muestra en el dibujo
$\overline{MP} \perp \overline{NQ}$
Encuentre: NM, MP, MQ, PQ y NQ



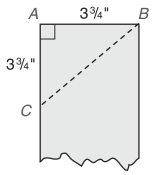
21. *Dado:* $\triangle XYZ$ con ángulos como se muestra en el dibujo
Encuentre: XY



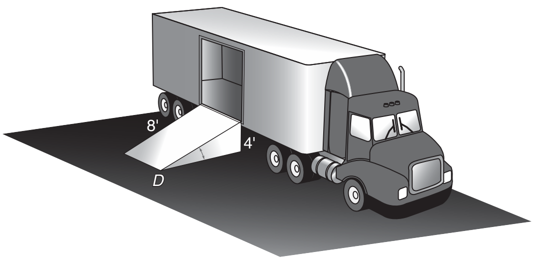
(SUGERENCIA: Compare este dibujo con el correspondiente al ejercicio 20.)

22. *Dado:* Rombo $ABCD$ en el cual las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ se intersecan en el punto E; $DB = AB = 8$
Encuentre: AC

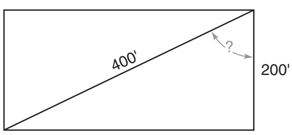
23. Un carpintero trabaja con una tabla que mide $3\frac{3}{4}$ pulg de ancho. Después de marcar un punto hacia abajo a $3\frac{3}{4}$ pulg en un lado, el carpintero hace un corte a lo largo de $\overline{BC}$ con una sierra. ¿Cuál es la medida del ángulo ($\angle ACB$) que se forma?



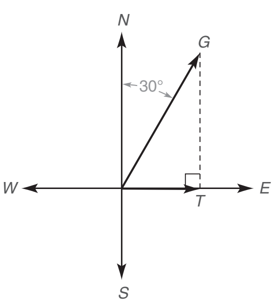
24. Para descargar abarrotes de un camión de suministro en el mercado Piggly Wiggly se utiliza una rampa de 8 pies que sube 4 pies hasta la puerta del camión. ¿Cuál es la medida del ángulo indicado ($\angle D$)?



25. Una persona trota a lo largo de dos lados de un lote rectangular abierto. Si el primer lado del lote tiene una longitud de 200 pies y la distancia diagonal a través del lote es de 400 pies, ¿cuál es la medida del ángulo formado por las dimensiones de 200 pies y 400 pies? Redondeando a pies, ¿cuánto más trota la persona recorriendo los dos lados del lote en vez de la distancia diagonal a través del lote?



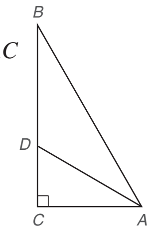
26. El bote de Mara deja el muelle al mismo tiempo que el bote de Meg. El bote de Mara viaja hacia el Este a 12 mph y el de Meg viaja a 24 mph en dirección 30° NE. Redondeando a décimas de milla, ¿qué tan separados estarán los botes en media hora?



En los ejercicios 27 al 33 proporcione soluciones exactas y aproximadas hasta dos lugares decimales.

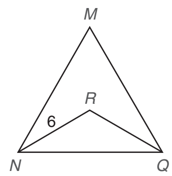
27. *Dado:* en el $\triangle ABC$, $\overrightarrow{AD}$ biseca $\angle BAC$
$m\angle B = 30°$ y $AB = 12$
Encuentre: DC y DB

28. *Dado:* en el $\triangle ABC$, $\overrightarrow{AD}$ biseca $\angle BAC$
$AB = 20$ y $AC = 10$
Encuentre: DC y DB

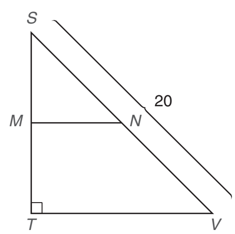


Ejercicios 27, 28

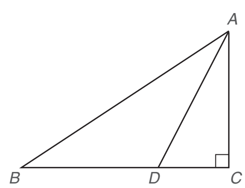
29. *Dado:* $\triangle MNQ$ es equiángulo y $NR = 6$
$\overrightarrow{NR}$ biseca $\angle MNQ$
$\overrightarrow{QR}$ biseca $\angle MQN$
Encuentre: NQ



30. *Dado:* $\triangle STV$ es un triángulo rectángulo isósceles
M y N son los puntos medios de $\overline{ST}$ y $\overline{SV}$
Encuentre: MN



31. *Dado:* $\triangle ABC$ rectángulo con $m\angle C = 90°$ y $m\angle BAC = 60°$; el punto D en $\overline{BC}$; $\overrightarrow{AD}$ biseca $\angle BAC$ y $AB = 12$
Encuentre: BD



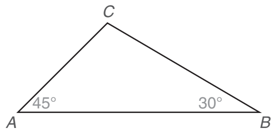
Ejercicios 31, 32

32. *Dado:* $\triangle ABC$ rectángulo con $m\angle C = 90°$ y $m\angle BAC = 60°$; el punto D en $\overline{BC}$; $\overrightarrow{AD}$ biseca $\angle BAC$ y $AC = 2\sqrt{3}$
Encuentre: BD

33. *Dado:* $\triangle ABC$ con $m\angle A = 45°$, $m\angle B = 30°$ y $BC = 12$

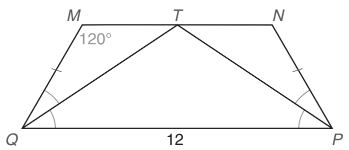
Encuentre: AB

(SUGERENCIA: Utilice la altura $\overline{CD}$ de C a $\overline{AB}$ como una recta auxiliar.)



***34.** *Dado:* trapezoide isósceles $MNPQ$ con $QP = 12$ y $m\angle M = 120°$; los bisectores de los $\angle$s MQP y NPQ convergen en el punto T en $\overline{MN}$

Encuentre: el perímetro de $MNPQ$



35. En el hexágono regular $ABCDEF$, $AB = 6$ pulgadas. Encuentre la longitud exacta de:

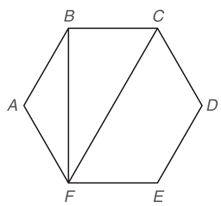
a) La diagonal $\overline{BF}$

b) La diagonal $\overline{CF}$

36. En el hexágono regular $ABCDEF$, la longitud de AB es x centímetros. En términos de x, encuentre la longitud de:

a) La diagonal $\overline{BF}$

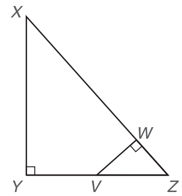
b) La diagonal $\overline{CF}$



Ejercicios 35-36

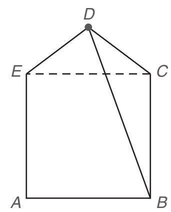
***37.** En el triángulo rectángulo XYZ, $XY = 3$ y $YZ = 4$. Donde V es el punto medio de $\overline{YZ}$ y $m\angle VWZ = 90°$, encuentre VW.

(SUGERENCIA: Trace $\overline{XV}$)



***38.** La diagonal $\overline{EC}$ separa el pentágono $ABCDE$ en el cuadrado $ABCE$ y el triángulo isósceles DEC. Si $AB = 8$ y $DC = 5$, encuentre la longitud de la diagonal $\overline{DB}$.

(SUGERENCIA: Trace $\overline{DF} \perp \overline{AB}$)



5.6 Segmentos divididos proporcionalmente

CONCEPTOS CLAVE

Segmentos divididos proporcionalmente	Teorema ángulo-bisector	Teorema de Ceva

En esta sección se inicia con una descripción formal de la frase *dividido proporcionalmente*. Suponga que se les abre una cuenta de ahorros a tres niños mancomunada por sus padres. Se han hecho depósitos mensuales para cada niño desde su nacimiento. Si las edades de los niños son 2, 4 y 6 (suponga exactitud de las edades por simplicidad) y el total en la cuenta es de \$7200, entonces la cantidad que cada niño debe recibir puede determinarse resolviendo la ecuación

$$2x + 4x + 6x = 7200$$

Resolver esta ecuación conduce a la solución \$1200 para el niño de 2 años, \$2400 para el de 4 y \$3600 para el de 6. Se dice que la cantidad se ha dividido proporcionalmente. Expresada la cantidad como una proporción es

$$\frac{1200}{2} = \frac{2400}{4} = \frac{3600}{6}$$

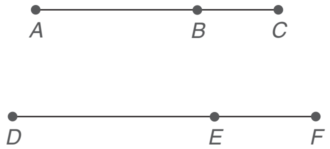


Figura 5.44

En la figura 5.44, $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ están divididas proporcionalmente en los puntos B y E si

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \qquad \text{o} \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

Por supuesto, un par de segmentos puede estar dividido proporcionalmente por varios puntos, como se muestra en la figura 5.45. En este caso, $\overline{RW}$ y $\overline{HM}$ están divididos proporcionalmente cuando

$$\frac{RS}{HJ} = \frac{ST}{JK} = \frac{TV}{KL} = \frac{VW}{LM} \qquad \left(\text{observe que } \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10} = \frac{9}{6}\right)$$

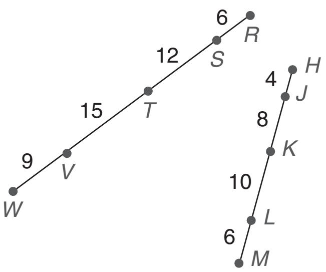


Figura 5.45

EJEMPLO 1

En la figura 5.46, los puntos D y E dividen $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ proporcionalmente. Si $AD = 4$, $DB = 7$ y $EC = 6$, encuentre AE.

Solución $\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC}$, por tanto $\frac{4}{x} = \frac{7}{6}$, donde $x = AE$. Entonces $7x = 24$, por lo que $x = AE = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$. ■

Una propiedad que se demostrará en el ejercicio 31 de esta sección es

$$\boxed{\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } \frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

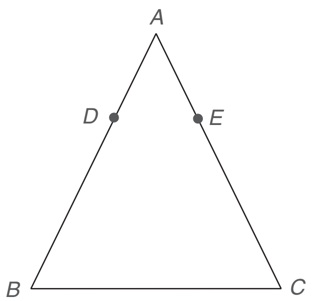


Figura 5.46

En palabras se puede reescribir esta propiedad como sigue:

> La fracción cuyo numerador y denominador están determinados, respectivamente, por la adición de numeradores y denominadores de fracciones iguales es igual a cada una de dichas fracciones iguales.

El siguiente es un ejemplo numérico de esta afirmación:

$$\text{Si } \frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \qquad \text{entonces} \qquad \frac{2 + 4}{3 + 6} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

En el ejemplo 2, la propiedad anterior es necesariamente una razón.

EJEMPLO 2

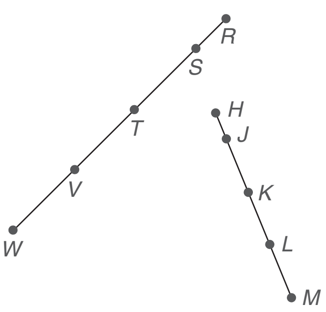


Figura 5.47

DADO: $\overline{RW}$ y $\overline{HM}$ están divididos proporcionalmente en los puntos que se muestran en la figura 5.47.

DEMUESTRE: $\dfrac{RT}{HK} = \dfrac{TW}{KM}$

DEMOSTRACIÓN: $\overline{RW}$ y $\overline{HM}$ están divididos proporcionalmente de manera que

$$\frac{RS}{HJ} = \frac{ST}{JK} = \frac{TV}{KL} = \frac{VW}{LM}$$

Utilizando la propiedad de que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se tiene

$$\frac{RS}{HJ} = \frac{RS + ST}{HJ + JK} = \frac{TV + VW}{KL + LM} = \frac{TV}{KL}$$

Debido a que $RS + ST = RT$, $HJ + JK = HK$, $TV + VW = TW$ y $KL + LM = KM$,

$$\frac{RT}{HK} = \frac{TW}{KM}$$ ■

GÉE

Ejercicios 1, 2

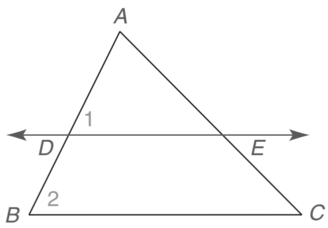


Figura 5.48

Las dos propiedades que se introdujeron antes (propiedad 3 de la sección 5.1) ahora se vuelven a utilizar.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

La operación de sustracción de la propiedad se necesita para la demostración del teorema 5.6.1.

TEOREMA 5.6.1

Si una recta es paralela a un lado de un triángulo e interseca los otros dos lados, entonces los divide proporcionalmente.

DADO: En la figura 5.48, $\triangle ABC$ con $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$ y con $\overleftrightarrow{DE}$ intersecando $\overline{AB}$ en D y $\overline{AC}$ en E

DEMUESTRE: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

DEMOSTRACIÓN: Puesto que $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$, $\angle 1 \cong \angle 2$. Con $\angle A$ como un ángulo común para el $\triangle ADE$ y $\triangle ABC$, se deduce por AA que estos triángulos son semejantes. Ahora

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \qquad \textbf{(por LCTSP)}$$

Por la propiedad 3 de la sección 5.1,

$$\frac{AB - AD}{AD} = \frac{AC - AE}{AE}$$

Como $AB - AD = DB$ y $AC - AE = EC$, la proporción se convierte en

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

Utilizando la propiedad 2 de la sección 5.1, se pueden invertir las dos fracciones para obtener la conclusión deseada:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ ■

GEE
Ejercicios 3-6

COROLARIO 5.6.2

Cuando tres (o más) rectas paralelas se cortan por un par de transversales, éstas se dividen proporcionalmente por las rectas paralelas.

DADO: $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3$ en la figura 5.49 de la página 262

DEMUESTRE: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL COROLARIO 5.6.2

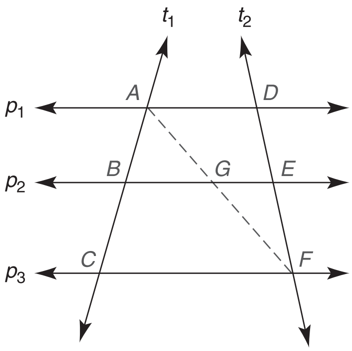


Figura 5.49

En la figura 5.49 trace $\overline{AF}$ como segmento de recta auxiliar.

Con base en el teorema 5.6.1, se observa que $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF}$ en $\triangle ACF$ y que $\frac{AG}{GF} = \frac{DE}{EF}$ en $\triangle ADF$.

Por la propiedad transitiva de la igualdad, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

NOTA: Intercambiando los medios se puede escribir la última proporción en la forma $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.

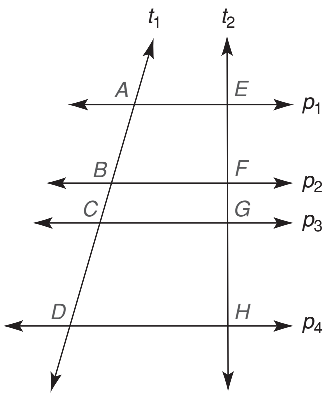


Figura 5.50

EJEMPLO 3

Dadas las rectas paralelas p_1, p_2, p_3 y p_4 cortadas por t_1 y t_2 de manera que $AB = 4$, $EF = 3$, $BC = 2$ y $GH = 5$, encuentre FG y CD. (Vea la figura 5.50.)

Solución Como las transversales están divididas proporcionalmente,

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}$$

por tanto

$$\frac{4}{3} = \frac{2}{FG} = \frac{CD}{5}$$

Entonces

$$4 \cdot FG = 6 \quad \text{y} \quad 3 \cdot CD = 20$$

$$FG = \frac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad CD = \frac{20}{3} = 6\tfrac{2}{3}$$

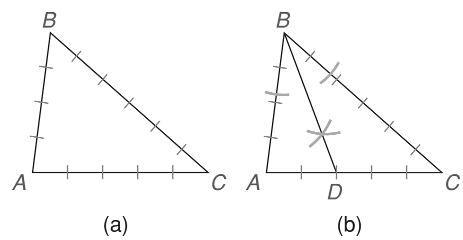
GEE

Ejercicios 7, 8

La actividad siguiente conduce a la relación descrita en el teorema 5.6.3.

Descubra

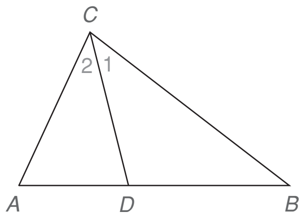
En una hoja de papel trace o construya el $\triangle ABC$ cuyos lados midan $AB = 4$, $BC = 6$ y $AC = 5$. Luego construya el bisector de ángulo $\overrightarrow{BD}$ del $\angle B$. ¿Cómo es $\frac{AB}{AD}$ comparada con $\frac{BC}{DC}$?



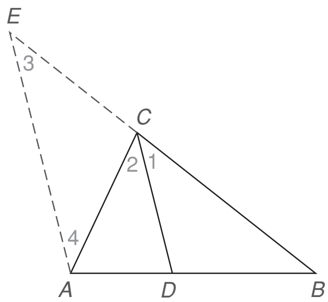
RESPUESTA

Aunque no por casualidad, puede sorprender que $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$ $\left(\text{es decir, } \frac{4}{2} = \frac{6}{3}\right)$ y $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ $\left(\frac{4}{6} = \frac{2}{3}\right)$. Parece que el bisector de un ángulo incluido por dos lados de un triángulo separa el tercer lado en segmentos cuyas longitudes son proporcionales a las longitudes de los dos lados que forman el ángulo.

La demostración del teorema 5.6.3 requiere el uso del teorema 5.6.1.



(a)



(b)

Figura 5.51

TEOREMA 5.6.3 ▶ (Teorema ángulo-bisector)

Si un rayo biseca un ángulo de un triángulo, entonces divide el lado opuesto en segmentos cuyas longitudes son proporcionales a las longitudes de los dos lados que forman el ángulo bisecado.

DADO: $\triangle ABC$ en la figura 5.51(a), en el cual $\overrightarrow{CD}$ biseca $\angle ACB$

DEMUESTRE: $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DB}{CB}$

DEMOSTRACIÓN: Se inicia extendiendo $\overline{BC}$ más allá de C (sólo hay una recta a través de B y C) para coincidir con la recta que pasa por A trazada paralela a $\overline{DC}$. [Vea la figura 5.51(b).] Sea E el punto de intersección. (Estas rectas se deben intersecar; de lo contrario, $\overline{AE}$ tendría dos paralelas, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, a través del punto C.)

Debido a que $\overline{CD} \parallel \overline{EA}$, se tiene

$$\frac{EC}{AD} = \frac{CB}{DB}\ (*)$$

por el teorema 5.6.1. Ahora $\angle 1 \cong \angle 2$ ya que $\overrightarrow{CD}$ biseca $\angle ACB$, $\angle 1 \cong \angle 3$ (ángulos correspondientes para rectas paralelas) y $\angle 2 \cong \angle 4$ (ángulos internos alternos para rectas paralelas). Por la propiedad transitiva, $\angle 3 \cong \angle 4$, por tanto el $\triangle ACE$ es isósceles con $\overline{EC} \cong \overline{AC}$. Utilizando la sustitución, la proporción marcada con (*) se vuelve

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CB}{DB} \quad \text{o} \quad \frac{AD}{AC} = \frac{DB}{CB} \qquad \textbf{(por inversión)}$$ ■

El enunciado "Demuestre" del teorema anterior indica que una forma de la proporción descrita se da comparando longitudes como se muestra:

$$\frac{\text{segmento a la izquierda}}{\text{lado a la izquierda}} = \frac{\text{segmento a la derecha}}{\text{lado a la derecha}}$$

De forma equivalente, la proporción podría comparar longitudes así:

$$\frac{\text{segmento a la izquierda}}{\text{segmento a la derecha}} = \frac{\text{lado a la derecha}}{\text{lado a la derecha}}$$

¡Otras formas de la proporción también son posibles!

EJEMPLO 4

Para el $\triangle XYZ$ en la figura 5.52, $XY = 3$ y $YZ = 5$. Si $\overrightarrow{YW}$ biseca $\angle XYZ$ y $XW = 2$, encuentre XZ.

Solución Sea $WZ = x$. Se sabe que $\frac{YX}{XW} = \frac{YZ}{WZ}$ entonces $\frac{3}{2} = \frac{5}{x}$.

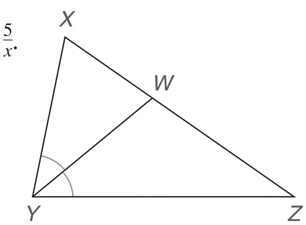


Figura 5.52

Por tanto,

$$3x = 10$$
$$x = \frac{10}{3} = 3\tfrac{1}{3}$$

Entonces $WZ = 3\frac{1}{3}$.

GEE
Ejercicios 9-13

Como $XZ = XW + WZ$, se tiene $XZ = 2 + 3\frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$. ■

EJEMPLO 5

En la figura 5.52 (que se muestra en el ejemplo 6), suponga que el $\triangle XYZ$ tiene lados de longitudes $XY = 3$, $YZ = 4$ y $XZ = 5$. Si $\overrightarrow{YW}$ biseca $\angle XYZ$, encuentre XW y WZ.

Solución Sea $XW = y$; entonces $WZ = 5 - y$ y $\frac{XY}{YZ} = \frac{XW}{WZ}$ se vuelve $\frac{3}{4} = \frac{y}{5 - y}$.
De esta proporción se puede encontrar y como sigue:

$$\begin{aligned} 3(5 - y) &= 4y \\ 15 - 3y &= 4y \\ 15 &= 7y \\ y &= \frac{15}{7} \end{aligned}$$

Entonces $XW = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$ y $WZ = 5 - 2\frac{1}{7} = 2\frac{6}{7}$. ■

En el ejemplo siguiente, se proporciona una solución alterna para un problema del tipo encontrado en el ejemplo 5.

EJEMPLO 6

En la figura 5.52, el $\triangle XYZ$ es isósceles con $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$. Si $XY = 3$ y $YZ = 6$, encuentre XW y WZ.

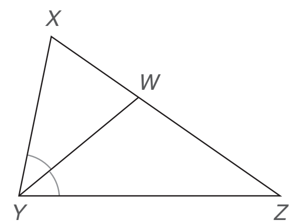


Figura 5.52

Solución Debido a que la razón $XY{:}YZ$ es 3:6, o 1:2, la razón $XW{:}WZ$ también es 1:2. Por tanto, estas longitudes se pueden representar con

$$XW = a \qquad \text{y} \qquad WZ = 2a$$

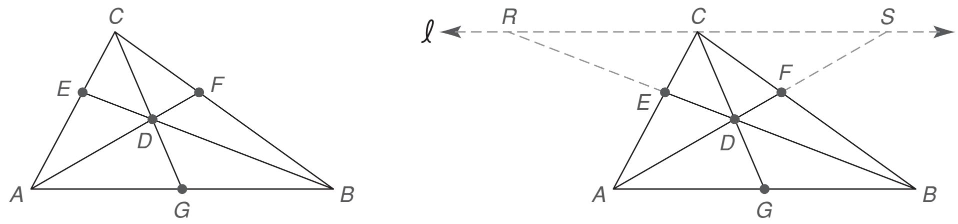
Con $XZ = 6$ en el triángulo isósceles, el enunciado $XW + WZ = XZ$ se vuelve $a + 2a = 6$, por tanto $3a = 6$, y $a = 2$. Ahora $XW = 2$ y $WZ = 4$. ■

La demostración del teorema siguiente se encuentra en la sección de perspectiva histórica al final de este capítulo. En el teorema de Ceva, el punto D es *cualquier* punto en el interior del triángulo. Vea la figura 5.53(a). Las rectas auxiliares necesarias para completar la demostración del teorema de Ceva se muestran en la figura 5.53(b). En la figura, la recta ℓ se traza a través del vértice C de manera que sea paralela a $\overline{AB}$. Luego $\overline{BE}$ y $\overline{AF}$ se extienden para coincidir con ℓ en R y S, respectivamente.

TEOREMA 5.6.4 ▶ (Teorema de Ceva)

Sea el punto D cualquier punto en el interior del $\triangle ABC$ y sean $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ y $\overline{CG}$ los segmentos de recta determinados por D y los vértices del $\triangle ABC$. Entonces el producto de las razones de las longitudes de los segmentos de cada uno de los tres lados (tomados en orden desde un vértice dado del triángulo) es igual a 1; es decir,

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$



(a) (b)

Figura 5.53

De la figura 5.53 el teorema de Ceva se puede enunciar de muchas formas equivalentes:

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BG}{GA} = 1, \qquad \frac{CF}{FB}\cdot\frac{BG}{GA}\cdot\frac{AE}{EC} = 1, \qquad \text{etc.}$$

En cada caso se selecciona un vértice y se forman razones de las longitudes de segmentos de los lados en un orden fijo.

En el ejemplo 7 se aplica el teorema de Ceva.

EJEMPLO 7

En el $\triangle RST$ con punto interior D, $RG = 6$, $GS = 4$, $SH = 4$, $HT = 3$ y $KR = 5$. Encuentre TK. Vea la figura 5.54.

Solución Sea $TK = a$. Aplicando el teorema de Ceva y siguiendo una ruta en sentido contrario al de las manecillas del reloj iniciando en el vértice R, se tiene $\frac{RG}{GS}\cdot\frac{SH}{HT}\cdot\frac{TK}{KR} = 1$. Entonces $\frac{6}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{a}{5} = 1$ y por tanto $\frac{\cancel{6}^2}{\cancel{4}_1}\cdot\frac{\cancel{4}^1}{\cancel{3}_1}\cdot\frac{a}{5} = 1$ se vuelve $\frac{2a}{5} = 1$. Luego $2a = 5$ y $a = 2.5$; por lo que, $TK = 2.5$.

GEE

Ejercicio 14

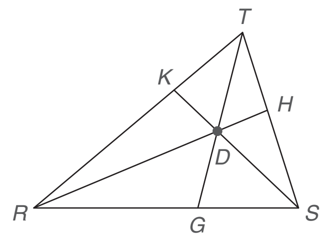


Figura 5.54

Ejercicios 5.6

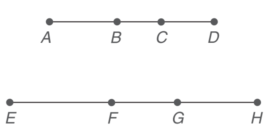
1. Al preparar una cierta receta, un chef utiliza 5 oz del ingrediente A, 4 oz del ingrediente B y 6 oz del ingrediente C. Si se necesitan 90 oz de este platillo, ¿cuántas onzas de cada producto debe utilizar?

2. En una mezcla química se utilizan 2 g del químico A por cada gramo del químico B y se necesitan 3 g del químico C por cada gramo del químico B. Si se preparan 72 g de la mezcla, ¿qué cantidad se necesita (en gramos) de cada químico?

3. Dado que $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}$, ¿son verdaderas las proporciones siguientes?

   a) $\dfrac{AC}{EG} = \dfrac{CD}{GH}$

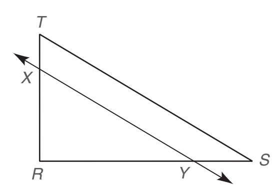
   b) $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{BD}{FH}$



4. Dado que $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{TS}$, ¿son verdaderas las proporciones siguientes?

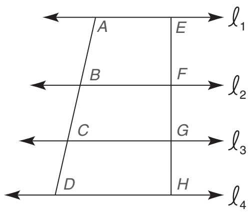
   a) $\dfrac{TX}{XR} = \dfrac{RY}{YS}$

   b) $\dfrac{TR}{XR} = \dfrac{SR}{YR}$



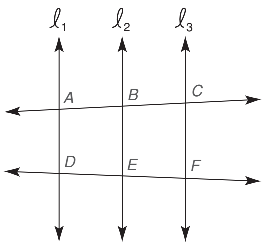
5. *Dado:* $\ell_1 \| \ell_2 \| \ell_3 \| \ell_4$,
   $AB = 5$, $BC = 4$, $CD = 3$, $EH = 10$
   Encuentre: EF, FG, GH
   (Vea la figura para el ejercicio 6.)

6. *Dado:* $\ell_1 \| \ell_2 \| \ell_3 \| \ell_4$, $AB = 7$, $BC = 5$, $CD = 4$
$EF = 6$
Encuentre: FG, GH, EH



Ejercicios 5, 6

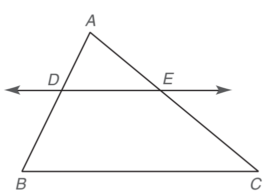
7. *Dado:* $\ell_1 \| \ell_2 \| \ell_3$, $AB = 4$, $BC = 5$, $DE = x$,
$EF = 12 - x$
Encuentre: x, DE, EF



Ejercicios 7, 8

8. *Dado:* $\ell_1 \| \ell_2 \| \ell_3$, $AB = 5$, $BC = x$, $DE = x - 2$
$EF = 7$
Encuentre: x, BC, DE

9. *Dado:* $\overleftrightarrow{DE} \| \overline{BC}$, $AD = 5$, $DB = 12$, $AE = 7$
Encuentre: EC



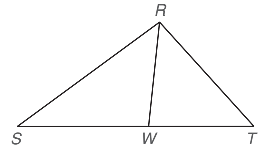
Ejercicios 9–12

10. *Dado:* $\overleftrightarrow{DE} \| \overline{BC}$, $AD = 6$, $DB = 10$, $AC = 20$
Encuentre: EC

11. *Dado:* $\overleftrightarrow{DE} \| \overline{BC}$, $AD = a - 1$, $DB = 2a + 2$,
$AE = a$, $EC = 4a - 5$
Encuentre: a y AD

12. *Dado:* $\overleftrightarrow{DE} \| \overline{BC}$, $AD = 5$, $DB = a + 3$, $AE = a + 1$,
$EC = 3(a - 1)$
Encuentre: a y EC

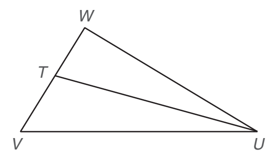
13. *Dado:* $\overrightarrow{RW}$ biseca $\angle SRT$
¿Se cumplen las igualdades siguientes?
a) $SW = WT$
b) $\dfrac{RS}{RT} = \dfrac{SW}{WT}$



Ejercicios 13, 14

14. *Dado:* $\overrightarrow{RW}$ biseca $\angle SRT$
¿Se cumplen las igualdades siguientes?
a) $\dfrac{RS}{SW} = \dfrac{RT}{WT}$
b) $m\angle S = m\angle T$

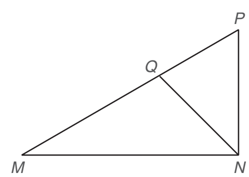
15. *Dado:* $\overrightarrow{UT}$ biseca $\angle WUV$, $WU = 8$, $UV = 12$,
$WT = 6$
Encuentre: TV



Ejercicios 15, 16

16. *Dado:* $\overrightarrow{UT}$ biseca $\angle WUV$, $WU = 9$, $UV = 12$,
$WV = 9$
Encuentre: WT

17. *Dado:* $\overrightarrow{NQ}$ biseca $\angle MNP$, $NP = MQ$, $QP = 8$,
$MN = 12$
Encuentre: NP



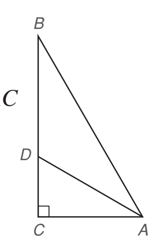
Ejercicios 17–19

Los ejercicios 18 y 19 se basan en un teorema (que no se enuncia) que es el recíproco del teorema 5.6.3.

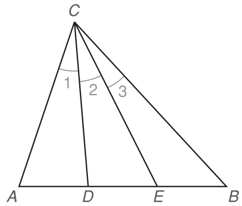
18. *Dado:* $NP = 4$, $MN = 8$, $PQ = 3$ y $MQ = 6$;
$m\angle P = 63°$ y $m\angle M = 27°$
Encuentre: $m\angle PNQ$
(SUGERENCIA: $\frac{NP}{MN} = \frac{PQ}{MQ}$.)

19. *Dado:* $NP = 6$, $MN = 9$, $PQ = 4$ y $MQ = 6$;
$m\angle P = 62°$ y $m\angle M = 36°$
Encuentre: $m\angle QNM$
(SUGERENCIA: $\frac{NP}{MN} = \frac{PQ}{MQ}$.)

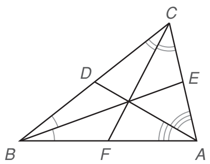
20. *Dado:* en el $\triangle ABC$, $\overrightarrow{AD}$ biseca $\angle BAC$
$AB = 20$ y $AC = 16$
Encuentre: DC y DB



21. En el $\triangle ABC$, el $\angle ACB$ se triseca por $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CE}$ de manera que $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3$. Escriba dos proporciones diferentes que se deduzcan de esta información.

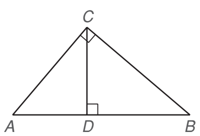


22. En el $\triangle ABC$, $m\angle CAB = 80°$, $m\angle ACB = 60°$ y $m\angle ABC = 40°$. Con los bisectores de ángulo como se muestran, ¿cuál segmento de recta es más largo?
a) $\overline{AE}$ o $\overline{EC}$? b) $\overline{CD}$ o $\overline{DB}$? c) $\overline{AF}$ o $\overline{FB}$?



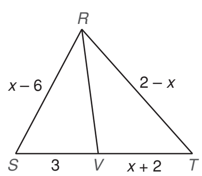
23. En el $\triangle RST$ rectángulo (que no se muestra) con $\angle S$ recto, $\overrightarrow{RV}$ biseca $\angle SRT$ de manera que V se encuentra en el lado $\overline{ST}$. Si $RS = 6$, $ST = 6\sqrt{3}$, y $RT = 12$, encuentre SV y VT.

24. *Dado:* AC es la media geométrica entre AD y AB.
$AD = 4$ y $DB = 6$
Encuentre: AC

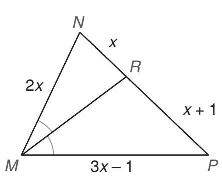


25. *Dado:* $\overrightarrow{RV}$ biseca $\angle SRT$,
$RS = x - 6$, $SV = 3$,
$RT = 2 - x$, y
$VT = x + 2$
Encuentre: x

(SUGERENCIA: Necesitará aplicar la fórmula cuadrática.)



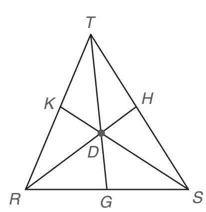
26. *Dado:* $\overrightarrow{MR}$ biseca $\angle NMP$, $MN = 2x$, $NR = x$, $RP = x + 1$ y $MP = 3x - 1$
Encuentre: x



27. Dado el punto D en el interior del $\triangle RST$, ¿cuál(es) enunciado(s) es (son) verdadero(s)?

a) $\frac{RK}{KT} \cdot \frac{TH}{HS} \cdot \frac{GS}{RG} = 1$

b) $\frac{TK}{KR} \cdot \frac{RG}{GS} \cdot \frac{SH}{HT} = 1$



Ejercicios 27–30

28. En el $\triangle RST$ que se muestra en el ejercicio 27 suponga que $\overline{RH}$, $\overline{TG}$ y $\overline{SK}$ son medianas. Encuentre el valor de:
a) $\frac{RK}{KT}$ a) $\frac{TH}{HS}$

29. Dado el punto D en el interior del $\triangle RST$, suponga que $RG = 3$, $GS = 4$, $SH = 4$, $HT = 5$ y $KT = 3$. Encuentre RK.

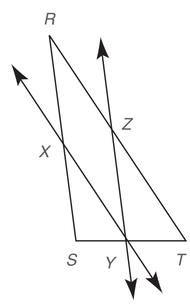
30. Dado el punto D en el interior del $\triangle RST$, suponga que $RG = 2$, $GS = 3$, $SH = 3$ y $HT = 4$. Encuentre $\frac{KT}{KR}$.

31. Complete la demostración de esta propiedad:
Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b}$ y $\frac{a + c}{b + d} = \frac{c}{d}$

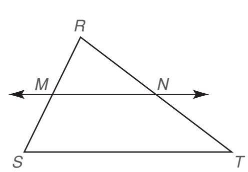
DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	1. ?
2. $b \cdot c = a \cdot d$	2. ?
3. $ab + bc = ab + ad$	3. ?
4. $b(a + c) = a(b + d)$	4. ?
5. $\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b}$	5. Propiedad medios-extremos (forma simétrica)
6. $\frac{a + c}{b + d} = \frac{c}{d}$	6. ?

32. *Dado:* $\triangle RST$, con $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{RT}$, $\overleftrightarrow{YZ} \parallel \overline{RS}$
Demuestre: $\frac{RX}{XS} = \frac{ZT}{RZ}$



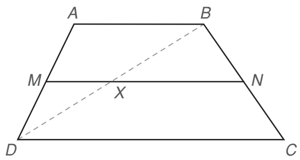
33. Utilice el teorema 5.6.1 y el esquema para completar la demostración de este teorema: "Si una recta es paralela a un lado de un triángulo y pasa por el punto medio de un segundo lado, entonces pasará por el punto medio del tercer lado".
Dado: $\triangle RST$ con M el punto medio de $\overline{RS}$; $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overline{ST}$
Demuestre: N es el punto medio de $\overline{RT}$



34. Utilice el ejercicio 33 y el dibujo siguiente para completar la demostración de este teorema: “La longitud de la mediana de un trapezoide es la mitad de la suma de las longitudes de las dos bases.”

Dado: Trapezoide $ABCD$ con mediana $\overline{MN}$

Demuestre: $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$

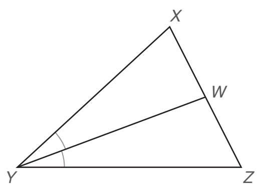


35. Utilice el teorema 5.6.3 para completar la demostración de este teorema: “Si el bisector de un ángulo de un triángulo también biseca el lado opuesto, entonces el triángulo es un triángulo isósceles.”

Dado: $\triangle XYZ$; $\overrightarrow{YW}$ biseca $\angle XYZ$; $\overline{WX} \cong \overline{WZ}$

Demuestre: $\triangle XYZ$ es isósceles

(SUGERENCIA: Utilice una proporción para demostrar que $XY = YZ$.)



***36.** En el $\triangle ABC$ rectángulo (que no se muestra) con $\angle C$ recto, $\overrightarrow{AD}$ biseca $\angle BAC$ de manera que D se encuentra en el lado $\overline{CB}$. Si $AC = 6$ y $DC = 3$, encuentre BD y AB.

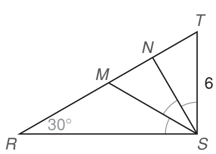
(SUGERENCIA: Sea $BD = x$ y $AB = 2x$. Luego utilice el teorema de Pitágoras.)

***37.** *Dado:* $\triangle ABC$ (que no se muestra) es isósceles con $m\angle ABC = m\angle C = 72°$; $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$ y $AB = 1$

Encuentre: BC

***38.** *Dado:* $\triangle RST$ con $\angle RST$ recto; $m\angle R = 30°$ y $ST = 6$; $\angle RST$ se triseca por $\overrightarrow{SM}$ y $\overrightarrow{SN}$

Encuentre: TN, NM y MR



***39.** En la figura los bisectores de ángulo de $\triangle ABC$ se intersecan en un punto en el interior del triángulo. Si $BC = 5$, $BA = 6$ y $CA = 4$, encuentre:

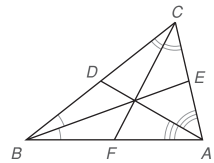
a) CD y DB

(SUGERENCIA: Utilice el teorema 5.6.3.)

b) CE y EA

c) BF y FA

d) Utilice los resultados de los incisos (a), (b) y (c) para demostrar que $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$.



***40.** En el $\triangle RST$ las alturas del triángulo se intersecan en un punto en el interior del triángulo. Las longitudes de los lados del $\triangle RST$ son $RS = 12$, $ST = 15$ y $TR = 13$.

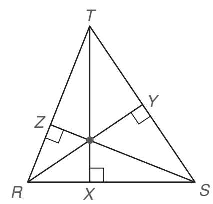
a) Si $TX = 12$, encuentre RX y XS.

(SUGERENCIA: Utilice el teorema de Pitágoras.)

b) Si $RY = \frac{168}{15}$, encuentre TY y YS.

c) Si $SZ = \frac{168}{13}$, encuentre ZR y TZ.

d) Utilice los resultados de los incisos (a), (b) y (c) para demostrar que $\frac{RX}{XS} \cdot \frac{SY}{YT} \cdot \frac{TZ}{ZR} = 1$.



PERSPECTIVA HISTÓRICA

Demostración de Ceva

Giovanni Ceva (1647-1736) fue un matemático italiano por quien recibió su nombre el teorema de Ceva. Aunque el teorema es difícil de creer, su demostración no es extensa. La demostración es la siguiente:

TEOREMA 5.6.4 ▶ (Teorema de Ceva)

Sea el punto D cualquier punto en el interior del $\triangle ABC$ y sean $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ y $\overline{CG}$ los segmentos de recta determinados por D y los vértices del $\triangle ABC$. Entonces el producto de las razones de los segmentos de cada uno de los tres lados (tomados en orden desde un vértice dado del triángulo) es igual a 1; es decir, $\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

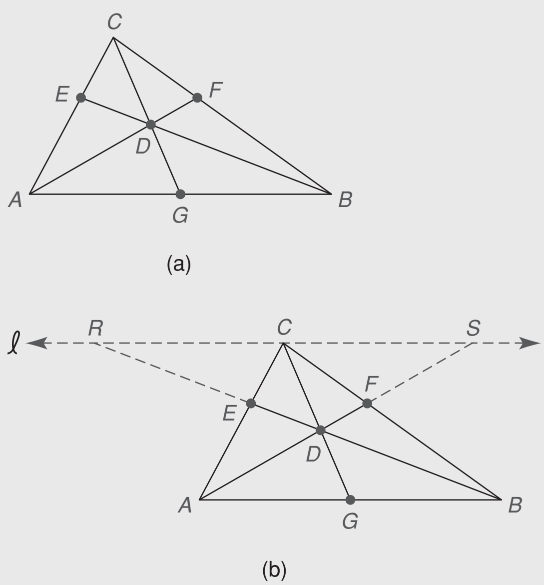


Figura 5.55

Demostración

Dado el $\triangle ABC$ con punto interior D [vea la figura 5.55(a)] trace una recta l a través del punto C que sea paralela a $\overline{AB}$. Ahora extienda $\overline{BE}$ para coincidir con l en el punto R. De manera similar, extienda $\overline{AF}$ para coincidir con l en el punto S. Vea la figura 5.55(b). Con triángulos semejantes se podrán sustituir las relaciones proporcionales deseadas en el enunciado obvio $\frac{CS}{CR} \cdot \frac{AB}{CS} \cdot \frac{CR}{AB} = 1(*)$, en el que cada numerador tiene un denominador equivalente. Debido a que $\triangle AGB \sim \triangle SCD$ por AA, se tiene $\frac{AG}{CS} = \frac{GD}{CD}$. Además con $\triangle DGB \sim \triangle DCR$, se tiene $\frac{GD}{CD} = \frac{GB}{CR}$. Por la propiedad transitiva de la igualdad $\frac{AG}{CS} = \frac{GB}{CR}$, y al intercambiar los medios, se observa que $\frac{AG}{BG} = \frac{CS}{CR}$. [La primera relación proporcional, $\frac{AG}{BG}$, de esta proporción reemplazará a la relación proporcional $\frac{CS}{CR}$ en el enunciado marcado con un asterisco (*).]

Del hecho de que $\triangle CSF \sim \triangle BAF$, $\frac{AB}{SC} = \frac{BF}{FC}$. [La segunda relación proporcional, $\frac{BF}{FC}$, de esta proporción reemplazará la relación proporcional $\frac{AB}{CS}$ en el enunciado marcado con un asterisco (*).]

Con $\triangle RCE \sim \triangle BAE$, $\frac{CE}{EA} = \frac{CR}{AB}$. [La primera relación proporcional, $\frac{CE}{EA}$, de esta proporción reemplaza a $\frac{CR}{AB}$ en el enunciado marcado con un asterisco (*).] Haciendo las sustituciones que se indican en el enunciado marcado con un asterisco se tiene

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

■

PERSPECTIVA DE APLICACIÓN

Una aplicación inusual de triángulos semejantes

El siguiente problema se puede resolver de muchas maneras. Si se aplican métodos de cálculo la solución se encuentra mediante muchos cálculos complicados y tediosos. En la solución más simple, que se da a continuación, se utilizan geometría y triángulos semejantes.

Problema: Un excursionista se encuentra a 450 pies corriente abajo de su campamento. Está a 200 pies en línea recta del río y su tienda se ubica a 100 pies, como se muestra en la figura 5.56(a) de la página 270. A través del campo llano, el excursionista se da cuenta de que una chispa de la fogata ha incendiado su tienda. Toma el balde vacío que lleva cargando, corre hacia el río para recoger agua y luego hacia la tienda. ¿Hacia qué punto en el río debe correr para recorrer la menor distancia?

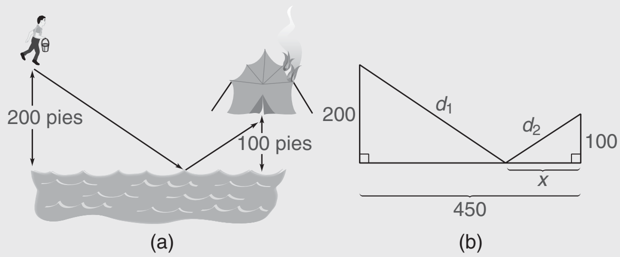


Figura 5.56

Se quiere determinar x en la figura 5.56(b) de tal modo que la distancia total $D = d_1 + d_2$ sea tan pequeña como sea posible. Considere tres posibles de este punto en el río. Éstas se sugieren por las rectas discontinuas, punteadas y continuas en la figura 5.57(a). También considere las reflexiones de los triángulos a través del río. [Vea la figura 5.57(b).]

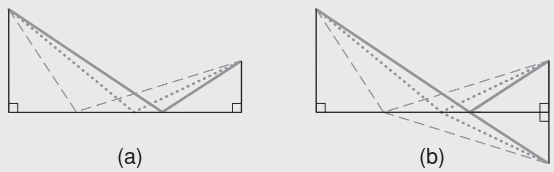


Figura 5.57

La distancia mínima D se tiene donde los segmentos de longitudes d_1 y d_2 forman una línea recta. Es decir, la configuración con los segmentos de recta continuos minimiza la distancia. En ese caso, el triángulo a la izquierda y el triángulo reflejado a la derecha son semejantes. Vea la figura 5.58.

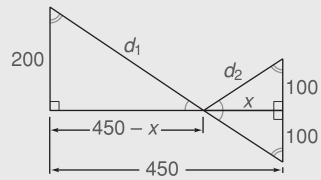


Figura 5.58

Por tanto

$$\frac{200}{100} = \frac{450 - x}{x}$$
$$200x = 100(450 - x)$$
$$200x = 45\,000 - 100x$$
$$300x = 45\,000$$
$$x = 150$$

En consecuencia, el punto deseado en el río está a 300 pies (determinado por $450 - x$) corriente arriba de la ubicación del excursionista. ■

Resumen

UNA VISTA RETROSPECTIVA AL CAPÍTULO 5

Un objetivo de este capítulo fue definir la semejanza de dos polígonos. Se postuló un método para demostrar la semejanza de triángulos, y se demostró que las proporciones son consecuencia de triángulos semejantes de una recta paralela a un lado del triángulo y de un rayo que biseca un ángulo de un triángulo. Se demostró el teorema de Pitágoras y su recíproco. Se estudiaron los triángulos 30°-60°-90°, 45°-45°-90° y otros triángulos rectángulos especiales con lados que forman tripletas pitagóricas. En la sección final se desarrolló el concepto de segmentos divididos proporcionalmente.

UNA VISTA PRELIMINAR DEL CAPÍTULO 6

En el capítulo siguiente se inicia el trabajo con el círculo. Se definirán los segmentos y las rectas del círculo, así como los ángulos especiales en un círculo. Se demostrarán varios teoremas relacionados con las mediciones de dichos ángulos y segmentos de recta. El trabajo con construcciones permitirá abordar el lugar geométrico de puntos y la concurrencia de rectas que se encuentran en el capítulo 7.

CONCEPTOS CLAVE

5.1

Relación proporcional • Razón • Proporción • Extremos • Propiedad medios-extremos • Media geométrica • Relación proporcional extendida • Proporción extendida

5.2

Polígonos semejantes • Polígonos congruentes • Vértices, ángulos y lados correspondientes

5.3

AAA • AA • LCTSP • ACTSC • LAL~ y LLL~

5.4

Teorema de Pitágoras • Recíproco del teorema de Pitágoras • Tripleta pitagórica

5.5

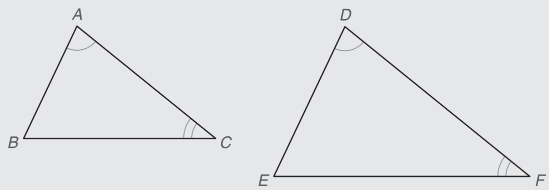
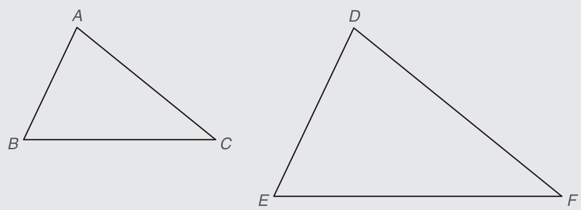
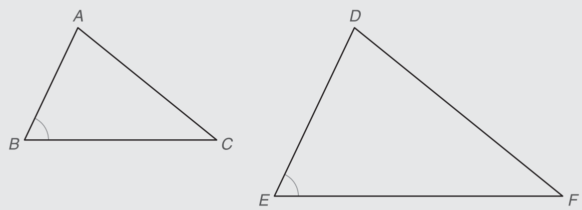
Triángulo 45°-45°-90° • Triángulo 30°-60°-90°

5.6

Segmentos divididos proporcionalmente • Teorema ángulo-bisector • Teorema de Ceva

TABLA 5.2 Una vista general del capítulo 5

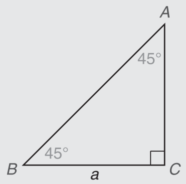
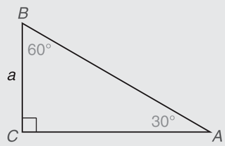
▶ Métodos para demostrar la semejanza de triángulos ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$)

FIGURA (OBSERVE LAS MARCAS)	MÉTODO	PASOS NECESARIOS EN LA DEMOSTRACIÓN
	AA	$\angle A \cong \angle D$; $\angle C \cong \angle F$
	LLL~	$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$ (k es una constante.)
	LAL~	$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = k$ $\angle B \cong \angle E$

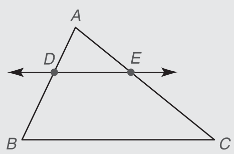
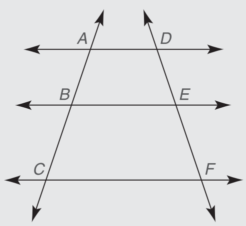
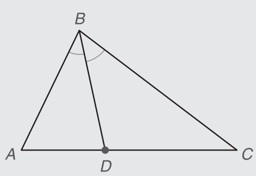
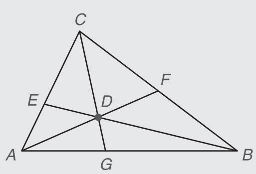
(continúa)

TABLA 5.2 *(continuación)*

▶ Relaciones especiales

FIGURA	RELACIÓN	CONCLUSIÓN(ES)
	$45°$-$45°$-$90°$ $\triangle$ Nota: $BC = a$	$AC = a$ $AB = a\sqrt{2}$
	$30°$-$60°$-$90°$ $\triangle$ Nota: $BC = a$	$AC = a\sqrt{3}$ $AB = 2a$

▶ Segmentos divididos proporcionalmente

FIGURA	RELACIÓN	CONCLUSIÓN
	$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$	$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ o $\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC}$
	$\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$	$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ o $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$
	$\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$	$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ o $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$
	Teorema de Ceva (D es cualquier punto en el interior del $\triangle ABC$)	$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ o equivalente

Capítulo 5 EJERCICIOS DE REPASO

Responda verdadero o falso para los ejercicios de repaso 1 al 7.

1. La relación proporcional de 12 hr a 1 día es 2 a 1.

2. Si el numerador y el denominador de una relación proporcional se multiplican por 4, la nueva relación proporcional es igual a la relación proporcional dada.

3. El valor de una relación proporcional debe ser menor que 1.

4. Los tres números 6, 14 y 22 están en una relación proporcional de 3:7:11.

5. Para expresar una relación proporcional de manera correcta, los términos deben tener la misma unidad de medición.

6. La relación proporcional 3:4 es igual a la relación proporcional 4:3.

7. Si el segundo y el tercer términos de una proporción son iguales, entonces cualquiera es la media geométrica del primer y el cuarto términos.

8. Encuentre el o los valores de x en cada proporción:

a) $\frac{x}{6} = \frac{3}{x}$

b) $\frac{x-5}{3} = \frac{2x-3}{7}$

c) $\frac{6}{x+4} = \frac{2}{x+2}$

d) $\frac{x+3}{5} = \frac{x+5}{7}$

e) $\frac{x-2}{x-5} = \frac{2x+1}{x-1}$

f) $\frac{x(x+5)}{4x+4} = \frac{9}{5}$

g) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{10}{3x-2}$

h) $\frac{x+7}{2} = \frac{x+2}{x-2}$

Utilice proporciones para resolver los ejercicios 9 al 11.

9. Cuatro envases de jugo de fruta cuestan \$2.52. ¿Cuánto cuestan seis envases?

10. Dos paquetes de chocolates M&M cuestan 69¢ de dólar. ¿Cuántos paquetes puede comprar con \$2.25?

11. Una alfombra que mide 20 metros cuadrados cuesta \$132. ¿Cuánto costará una alfombra de 12 metros cuadrados del mismo material?

12. La relación proporcional de las medidas de los lados de un cuadrilátero es 2:3:5:7. Si el perímetro es 68, encuentre la longitud de cada lado.

13. La longitud y el ancho de un rectángulo son 18 y 12, respectivamente. Un rectángulo semejante tiene una longitud de 27. ¿Cuál es su ancho?

14. Los lados de un triángulo son 6, 8 y 9. El lado más corto de un triángulo similar es 15. ¿Cuál es la longitud de los otros lados?

15. La razón de la medida del suplemento de un ángulo a la del complemento del ángulo es 5:2. Encuentre la medida del suplemento.

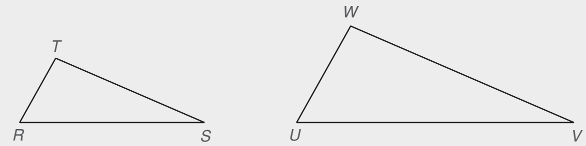
16. Mencione el método (*AA, LLL~,* o *LAL~*) que se utiliza para demostrar que los triángulos son semejantes. Utilice la figura siguiente.

a) $WU = 2 \cdot TR$, $WV = 2 \cdot TS$, y $UV = 2 \cdot RS$

b) $\angle T \cong \angle W$ y $\angle S \cong \angle V$

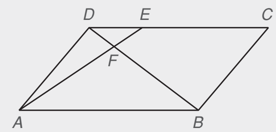
c) $\angle T \cong \angle W$ y $\frac{TR}{WU} = \frac{TS}{WV}$

d) $\frac{TR}{WU} = \frac{TS}{WV} = \frac{RS}{UV}$



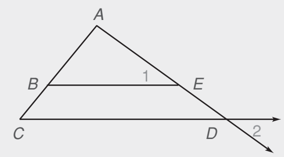
17. *Dado:* $ABCD$ es un paralelogramo
$\overline{DB}$ interseca $\overline{AE}$ en el punto F

Demuestre: $\frac{AF}{EF} = \frac{AB}{DE}$



18. *Dado:* $\angle 1 \cong \angle 2$

Demuestre: $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$



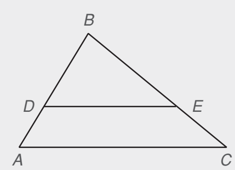
19. *Dado:* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (que no se muestra)
$m\angle A = 50°$, $m\angle E = 35°$
$m\angle D = 2x + 40$

Encuentre: x, $m\angle F$

20. *Dado:* En el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ (que no se muestran) $\angle B \cong \angle F$ y $\angle C \cong \angle E$
$AC = 9$, $DE = 3$, $DF = 2$, $FE = 4$

Encuentre: AB, BC

Para los ejercicios de repaso 21 al 23, $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$



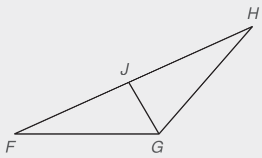
Ejercicios 21–23

21. $BD = 6$, $BE = 8$, $EC = 4$, $AD = ?$

22. $AD = 4$, $BD = 8$, $DE = 3$, $AC = ?$

23. $AD = 2$, $AB = 10$, $BE = 5$, $BC = ?$

Para los ejercicios de repaso 24 al 26 $\overrightarrow{GJ}$ biseca $\angle FGH$.



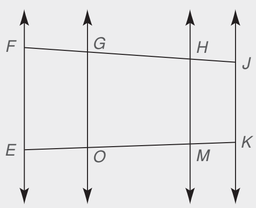
Ejercicios 24–26

24. *Dado:* $FG = 10$, $GH = 8$, $FJ = 7$
Encuentre: JH

25. *Dado:* $GF:GH = 1:2$, $FJ = 5$
Encuentre: JH

26. *Dado:* $FG = 8$, $HG = 12$, $FH = 15$
Encuentre: FJ

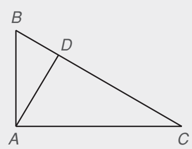
27. *Dado:* $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{GO} \parallel \overleftrightarrow{HM} \parallel \overleftrightarrow{JK}$, con transversales $\overline{FJ}$ y $\overline{EK}$
$FG = 2$, $GH = 8$, $HJ = 5$, $EM = 6$
Encuentre: EO, EK



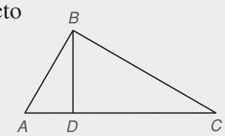
28. Demuestre que si una recta biseca un lado de un triángulo y es paralela a un segundo lado, entonces biseca el tercer lado.

29. Demuestre que las diagonales de un trapezoide se dividen ellas mismas proporcionalmente.

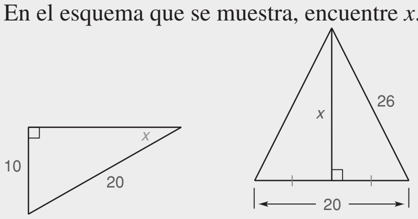
30. *Dado:* $\triangle ABC$ con $\angle BAC$ recto
$\overline{AD} \perp \overline{BC}$
a) $BD = 3$, $AD = 5$, $DC = ?$
b) $AC = 10$, $DC = 4$, $BD = ?$
c) $BD = 2$, $BC = 6$, $BA = ?$
d) $BD = 3$, $AC = 3\sqrt{2}$, $DC = ?$



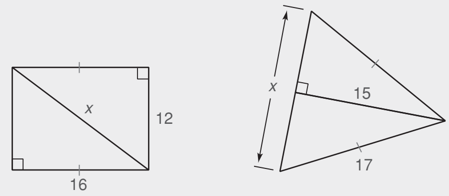
31. *Dado:* $\triangle ABC$ con $\angle ABC$ recto
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$
a) $BD = 12$, $AD = 9$, $DC = ?$
b) $DC = 5$, $BC = 15$, $AD = ?$
c) $AD = 2$, $DC = 8$, $AB = ?$
d) $AB = 2\sqrt{6}$, $DC = 2$, $AB = ?$



32. En el esquema que se muestra, encuentre x.

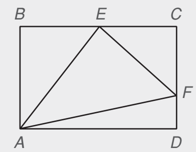


(a) (b)



(c) (d)

33. *Dado:* $ABCD$ es un rectángulo
E es el punto medio de $\overline{BC}$
$AB = 16$, $CF = 9$, $AD = 24$
Encuentre: AE, EF, AF



34. Encuentre la longitud de una diagonal de un cuadrado cuyos lados miden 4 pulg.

35. Encuentre la longitud de un lado de un cuadrado cuya diagonal mide 6 cm.

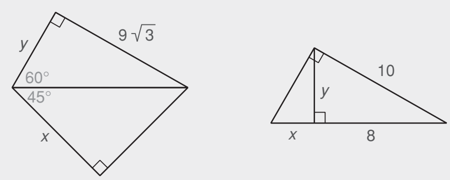
36. Encuentre la longitud de un lado de un rombo cuyas diagonales miden 48 y 14 cm.

37. Encuentre la longitud y una altura de un triángulo equilátero si cada lado mide 10 pulg.

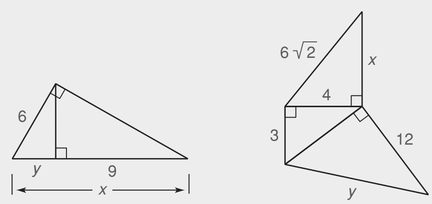
38. Encuentre la longitud de un lado de un triángulo equilátero si una altura mide 6 pulg.

39. Las longitudes de tres lados de un triángulo miden 13, 14 y 15 cm. Encuentre la longitud de la altura para el lado de 14 cm.

40. En los dibujos, encuentre x y y.

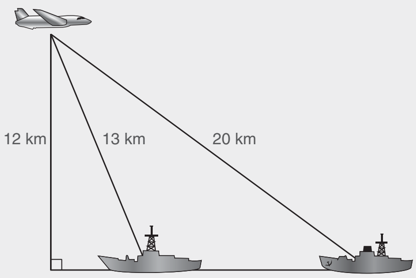


(a) (b)



(c) (d)

41. Un avión de vigilancia que vuela a una altitud de 12 km ha detectado un barco brasileño a una distancia de 20 km del mismo avión y en línea con un barco norteamericano que está a 13 km de la aeronave. ¿Cuál es la distancia entre el barco brasileño y el norteamericano?



42. Indique si cada conjunto de números representa las longitudes de los lados de un triángulo agudo, de un triángulo obtuso, de un triángulo rectángulo, o de ningún triángulo:

a) 12, 13, 14
b) 11, 5, 18
c) 9, 15, 18
d) 6, 8, 10
e) 8, 7, 16
f) 8, 7, 6
g) 9, 13, 8
h) 4, 2, 3

Capítulo 5 EXAMEN

1. Reduzca a su forma más simple:
a) La relación proporcional 12:20 ________
b) La razón $\frac{200 \text{ millas}}{8 \text{ galones}}$ ________

2. Resuelva cada proporción para x. ¡Demuestre su trabajo!
a) $\frac{x}{5} = \frac{8}{13}$ ________ b) $\frac{x+1}{5} = \frac{16}{x-1}$ ________

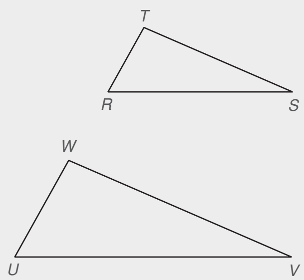
3. Las medidas de dos ángulos complementarios están en la relación proporcional 1:5. Encuentre la medida de cada ángulo.

Menor: ________;

Mayor: ________

4. $\triangle RTS \sim \triangle UWV$.
a) Encuentre m$\angle W$ si m$\angle R = 67°$ y m$\angle S = 21°$. ________
b) Encuentre WV si $RT = 4$, $UW = 6$ y $TS = 8$.

____



Ejercicios 4, 5

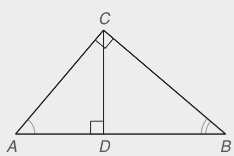
5. Proporcione la razón (AA, LAL~ o LLL~) de por qué $\triangle RST \sim \triangle UTW$.
a) $\angle R \cong \angle U$ y $\frac{TR}{WU} = \frac{RS}{UV}$

____

b) $\angle S \cong \angle V$; $\angle T$ y $\angle W$ son triángulos rectángulos

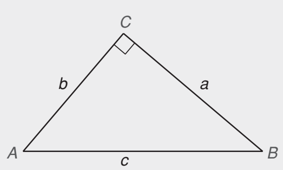
____

6. En el triángulo rectángulo ABC, $\overline{CD}$ es la altura de C a la hipotenusa $\overline{AB}$. Nombre tres ángulos que sean semejantes entre sí.



____

7. En el $\triangle ABC$, m$\angle C = 90°$. Utilice una raíz cuadrada para representar:

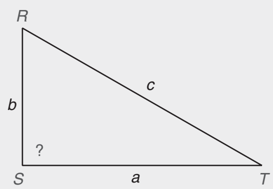


a) c, si $a = 5$ y $b = 4$

____

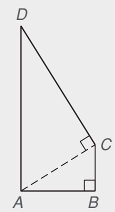
b) a, si $b = 6$ y $c = 8$

8. Dadas las longitudes de sus lados, ¿es el $\triangle RST$ un triángulo rectángulo?



a) $a = 15$, $b = 8$ y $c = 17$ ________
(Sí o no)
b) $a = 11$, $b = 8$ y $c = 15$ ________
(Sí o no)

9. Dado el cuadrilátero $ABCD$ con diagonal $\overline{AC}$. Si $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ y $\overline{AC} \perp \overline{DC}$, encuentre DA si $AB = 4$, $BC = 3$ y $DC = 8$. Exprese la respuesta como raíz cuadrada. ________

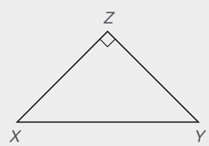


10. En el $\triangle XYZ$, $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$ y $\angle Z$ es un ángulo recto.
a) Encuentre XY si $XZ = 10$ pulg

____

b) Encuentre XZ si $XY = 8\sqrt{2}$ cm.

____

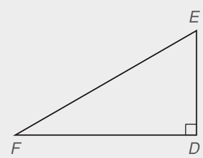


11. En el $\triangle DEF$, $\angle D$ es un ángulo recto y m$\angle F = 30°$.
a) Encuentre DE si $EF = 10$ m.

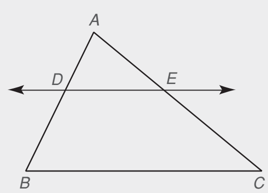
____

b) Encuentre EF si $DF = 6\sqrt{3}$ ft.

____

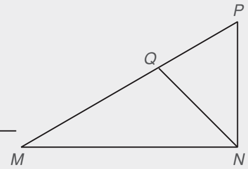


12. En el $\triangle ABC$, $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC}$. Si $AD = 6$, $DB = 8$ y $AE = 9$, encuentre EC. ________



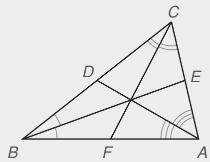
13. En el $\triangle MNP$, $\overrightarrow{NQ}$ biseca $\angle MNP$. Si $PN = 6$, $MN = 9$ y $MP = 10$, encuentre PQ y QM.

$PQ =$ ________; $QM =$ ________



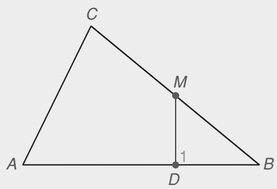
14. Para el $\triangle ABC$ se muestran los tres bisectores de ángulo. Encuentre el producto $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA}$.

____



15. *Dado:* $\angle 1 \cong \angle C$; M es el punto medio de $\overline{BC}$; $CM = MB = 6$ y $AD = 14$

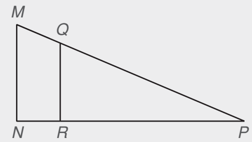
Encuentre: x, la longitud de $\overline{DB}$



En los ejercicios 16 y 17 complete los enunciados y las razones en cada demostración.

16. *Dado:* $\overline{MN} \parallel \overline{QR}$

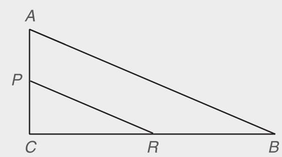
Demuestre: $\triangle MNP \sim \triangle QRP$



Enunciados	Razones
1. ____________________	1. ____________________
2. $\angle N \cong \angle QRP$	2. Si 2 rectas $\parallel$ se cortan por una transversal _______
3. ____________________	3. Identidad
4. $\triangle MNP \sim \triangle QRP$	4. ____________________

17. *Dado:* En el $\triangle ABC$, P es el punto medio de $\overline{AC}$ y R es el punto medio de $\overline{CB}$

Demuestre: $\angle PRC \cong \angle B$



Enunciados	Razones
1. $\triangle ABC$	1. ____________________
2. $\angle C \cong \angle C$	2. ____________________
3. P es el punto medio de $\overline{AC}$, y R es el punto medio de $\overline{CB}$	3. ____________________
4. $\frac{PC}{AC} = \frac{1}{2}$ y $\frac{CR}{CB} = \frac{1}{2}$	4. Definición de punto medio
5. $\frac{PC}{AC} = \frac{CR}{CB}$	5. ____________________
6. $\triangle CPR \sim \triangle CAB$	6. ____________________
7. ____________________	7. ACTSC

Capítulo 6

Círculos

CONTENIDO

Hay un DVD disponible que cuenta con un video con explicación de conceptos, problemas de ejemplo y aplicaciones. Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

¡Elevándose! Se presenta el diseño del Jardine House en Hong Kong con numerosas ventanas que tienen forma de círculo. Los círculos aparecen por todas partes en la vida real, ya sea en un engranaje funcional, en una polea o en la parte comestible de un panqué. En este capítulo vamos a tratar con el círculo, en relación con la terminología y las propiedades. Con base en los principios anteriores, los teoremas de este capítulo se deducen lógicamente de las propiedades encontradas en los capítulos anteriores. Durante siglos las poleas y los engranajes circulares se han utilizado en aplicaciones mecánicas. Vea los ejercicios 42 y 43 de la sección 6.3 para aplicaciones de engranajes. Otra vista del Jardine House revela que el círculo tiene aplicaciones contemporáneas.

6.1 Círculos y segmentos y ángulos relacionados

CONCEPTOS CLAVE

Círculo	Diámetro	Arco menor
Círculos congruentes	Cuerda	Arco intersecado
Círculos concéntricos	Semicírculo	Arcos congruentes
Centro	Arco	Ángulo central
Radio	Arco mayor	Ángulo inscrito

Advertencia

Si se omite la frase "en un plano" de la definición de círculo, el resultado es la definición de esfera.

En este capítulo se presentará la terminología relacionada con el círculo, algunos métodos de medición y algunas propiedades del círculo.

DEFINICIÓN

Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos en un plano que están una distancia fija de un punto dado conocido como *centro* del círculo.

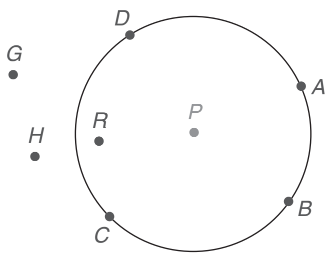


Figura 6.1

Un círculo se nombra por su punto central. En la figura 6.1 el punto P es el centro del círculo. El símbolo para el círculo es $\odot$, por lo que el círculo en la figura 6.1 es $\odot P$. Los puntos A, B, C y D son puntos *de* (o *en*) el círculo. Los puntos P (el centro) y R están en el *interior del* círculo P; los puntos G y H están en el *exterior* del círculo.

En $\odot Q$ en la figura 6.2, $\overline{SQ}$ es un radio del círculo. Un **radio** es un segmento que une el centro del círculo con un punto en el círculo. $\overline{SQ}$, $\overline{TQ}$, $\overline{VQ}$ y $\overline{WQ}$ son **radios** (plural de radio) de $\odot Q$. Por definición, $SQ = TQ = VQ = WQ$.

El siguiente enunciado es una consecuencia de la definición de círculo.

Todos los radios de un círculo son congruentes.

Un segmento de recta que une dos puntos de un círculo (tal como $\overline{SW}$ en la figura 6.2) es una **cuerda** del círculo. Un **diámetro** de un círculo es una cuerda que contiene el centro del círculo: en la figura 6.2, $\overline{TW}$ es un diámetro de $\odot Q$.

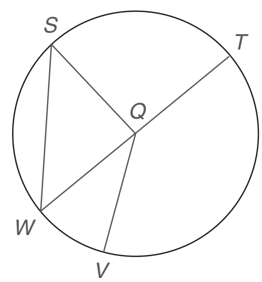


Figura 6.2

DEFINICIÓN

Los **círculos congruentes** son dos o más círculos que tienen radios congruentes.

En la figura 6.3 los círculos P y Q son congruentes debido a que sus radios tienen las mismas longitudes. Se puede deslizar $\odot P$ a la derecha para que coincida con $\odot Q$.

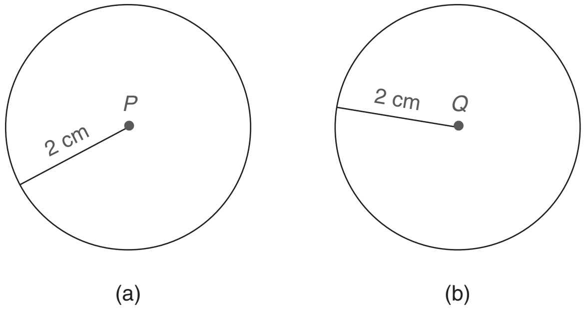


Figura 6.3

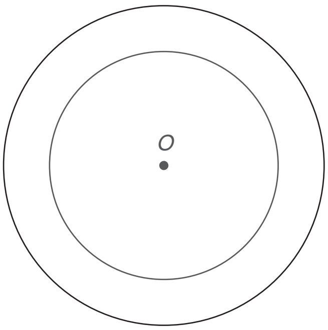


Figura 6.4

> **DEFINICIÓN**
>
> Los **círculos concéntricos** son coplanares y tienen un centro común.

Los círculos concéntricos en la figura 6.4 tienen el centro común O.

En $\odot P$ de la figura 6.5, la parte del círculo que se muestra del punto A al punto B es un **arco** AB, que se simboliza por $\overset{\frown}{AB}$. Si $\overline{AC}$ es un diámetro, entonces $\overset{\frown}{ABC}$ (se utilizan tres letras por claridad) es un **semicírculo**. En la figura 6.5, un **arco menor** como $\overset{\frown}{AB}$ es parte de un semicírculo; un **arco mayor** como $\overset{\frown}{ABCD}$ (que también se denota por $\overset{\frown}{ABD}$ o $\overset{\frown}{ACD}$) es más que un semicírculo pero menos que el círculo completo.

Ejercicios 1-3

> **DEFINICIÓN**
>
> Un **ángulo central** de un círculo es un ángulo cuyo vértice es el centro del círculo y cuyos lados son radios del círculo.

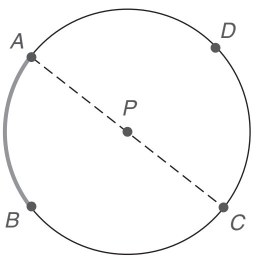


Figura 6.5

En la figura 6.6 $\angle NOP$ es un ángulo central de $\odot O$. El **arco intersecado** del $\angle NOP$ es $\overset{\frown}{NP}$. El arco intersecado de un ángulo está determinado por los dos puntos de intersección del ángulo con el círculo y todos los puntos del arco en el interior del ángulo.

En el ejemplo 1 se "comprueba" la terminología que se acaba de introducir.

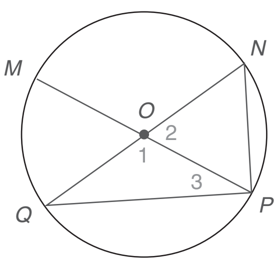


Figura 6.6

EJEMPLO 1

En la figura 6.6, $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$ se intersecan en O, el centro del círculo. Nombre:

a) Los cuatro radios (que se muestran)
b) Ambos diámetros (que se muestran)
c) Las cuatro cuerdas (que se muestran)
d) Un ángulo central
e) Un arco menor
f) Un semicírculo
g) Un arco mayor
h) El arco intersecado de $\angle MON$
i) El ángulo central que interseca a $\overset{\frown}{NP}$

Solución

a) $\overline{OM}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OP}$ y $\overline{ON}$
b) $\overline{MP}$ y $\overline{QN}$
c) $\overleftrightarrow{MP}$, $\overleftrightarrow{QN}$, $\overleftrightarrow{QP}$ y $\overleftrightarrow{NP}$
d) $\angle QOP$ (son posibles otras respuestas)
e) $\overparen{NP}$(son posibles otras respuestas)
f) $\overparen{MQP}$(son posibles otras respuestas)
g) $\overparen{MQN}$ se puede llamar$\overparen{MQPN}$(son posibles otras respuestas)
h) $\overparen{MN}$ (se encuentra en el interior de $\angle MON$)
i) $\angle NOP$ (también llamado $\angle 2$) ■

El siguiente enunciado es una consecuencia del postulado segmento-adición.

> En un círculo, la longitud de un diámetro es el doble que la de un radio.

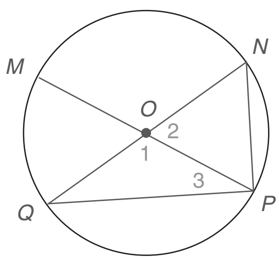


Figura 6.6

EJEMPLO 2

$\overline{QN}$ es un diámetro de $\odot O$ en la figura 6.6 y $PN = ON = 12$. Encuentre la longitud del arco $\overline{QP}$.

Solución Ya que $PN = ON$ y $ON = OP$, $\triangle NOP$ es equilátero. Entonces $m\angle 2 = m\angle N = m\angle NPO = 60°$. Además, $OP = OQ$, por lo que $\triangle POQ$ es isósceles con $m\angle 1 = 120°$, debido a que este ángulo es suplementario de $\angle 2$. Ahora $m\angle Q = m\angle 3 = 30°$ ya que la suma de las medidas de los ángulos de $\triangle POQ$ es 180°. Si $m\angle N = 60°$ y $m\angle Q = 30°$, entonces $\triangle NPQ$ es un $\triangle$ rectángulo cuyas medidas de ángulos son 30°, 60° y 90°. Se deduce que $QP = PN \cdot \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$. ■

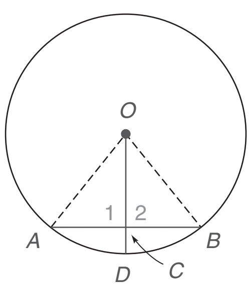


Figura 6.7

TEOREMA 6.1.1

Un radio que es perpendicular a una cuerda biseca a la cuerda.

DADO: $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ en $\odot O$ (vea la figura 6.7)

DEMUESTRE: $\overline{OD}$ biseca a $\overline{AB}$

DEMOSTRACIÓN: $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ en $\odot O$. Trace los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$. Ahora $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ ya que todos los radios del círculo son $\cong$. Debido a que $\angle 1$ y $\angle 2$ son $\angle$s rectos y $\overline{OC} \cong \overline{OC}$, se observa que $\triangle OCA \cong \triangle OCB$ por HC. Entonces $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ por PCTCC, por lo que $\overline{OD}$ biseca a $\overline{AB}$. ■

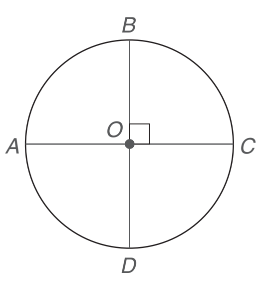


Figura 6.8

RELACIONES ÁNGULO Y ARCO EN EL CÍRCULO

En la figura 6.8 la suma de las medidas de los ángulos alrededor del punto O (los ángulos determinados por los diámetros perpendiculares $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$) es de 360°. De manera similar, el círculo se puede separar en 360 arcos iguales, *cada uno de los cuales mide 1° de medida del arco;* es decir, cada arco sería intersecado por un ángulo central que mide 1°. Esta descripción de la medida del arco conduce al siguiente postulado.

POSTULADO 16 ▶ (Postulado del ángulo central)

En un círculo la medida en grados de un ángulo central es igual a la medida en grados de su arco intersecado.

Si m$\overset{\frown}{AB}$ = 90° en la figura 6.8, entonces m$\angle AOB$ = 76°. El ángulo reflejo que interseca a $\overset{\frown}{BCA}$ y que está compuesto por los tres ángulos rectos mide 270°.

En la figura 6.8 m$\overset{\frown}{AB}$ = 90°, m$\overset{\frown}{BCD}$ = 180° y m$\overset{\frown}{AD}$ = 90°. Se deduce que m$\overset{\frown}{AB}$ + m$\overset{\frown}{BCD}$ + m$\overset{\frown}{AD}$ = 360°. En consecuencia se tiene la siguiente generalización.

La suma de las medidas de los arcos consecutivos que forman un círculo es exactamente de 360°.

En $\odot Y$ [figura 6.9(a)], si m$\angle XYZ$ = 90°, entonces m$\overset{\frown}{XZ}$ = 76° por el postulado del ángulo central. Si dos arcos tienen medidas en grados iguales [figura 6.9(b) y (c)] pero son partes de dos círculos de diferente radio, entonces estos arcos no coincidirán. Esta observación conduce a la definición siguiente.

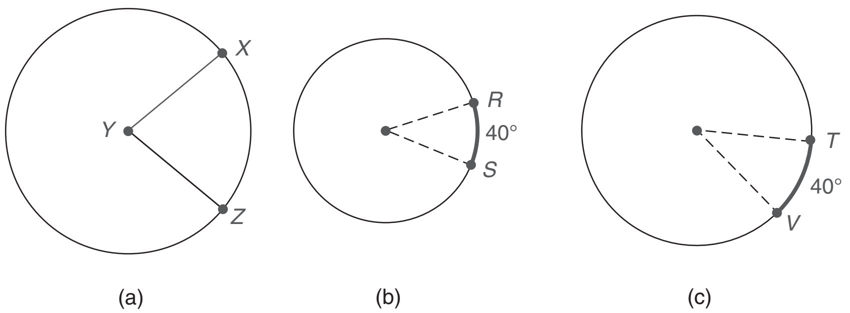


Figura 6.9

DEFINICIÓN

En un círculo o círculos congruentes los **arcos congruentes** tienen medidas iguales.

Para aclarar la definición de arcos congruentes considere los círculos concéntricos (que tienen el mismo centro) en la figura 6.10. Aquí la medida en grados del $\angle AOB$ del círculo más pequeño es igual que la medida en grados del $\angle COD$ del círculo más grande. Aun cuando m$\overset{\frown}{AB}$ = m$\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{AB} \not\cong \overset{\frown}{CD}$ ya que los arcos no coincidirían.

GEE *Ejercicios 4-10*

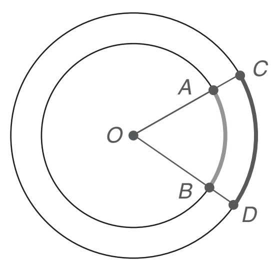


Figura 6.10

EJEMPLO 3

En $\odot O$ en la figura 6.11 $\overleftrightarrow{OE}$ biseca al $\angle AOD$. Utilizando las medidas indicadas, encuentre:

a) m$\overset{\frown}{AB}$ b) m$\overset{\frown}{BC}$ c) m$\overset{\frown}{BD}$ d) m$\angle AOD$

e) m$\overset{\frown}{AE}$ f) m$\overset{\frown}{ACE}$ g) si $\overset{\frown}{AE} \cong \overset{\frown}{ED}$

h) La medida del ángulo reflejo que interseca $\overset{\frown}{ABCD}$.

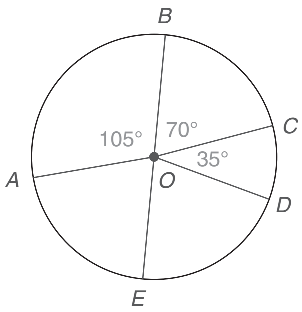


Figura 6.11

Solución a) 105° b) 70° c) 105° d) 150°, de 360 − (105 + 70 + 35) e) 75° debido a que el ángulo central correspondiente ($\angle AOE$) es el resultado de bisecar a $\angle AOD$, que se encontró de 150° f) 285° (de 360 − 75, la medida de $\overset{\frown}{AE}$) g) Los arcos son congruentes ya que ambos miden 75° y se encuentran en el mismo círculo, h) 210° (de 105° + 70° + 35°) ■

En la figura 6.11 observe que $m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{CD} = m\overset{\frown}{BD}$ (o $m\overset{\frown}{BCD}$). Ya que la unión de $\overset{\frown}{BD}$ y $\overset{\frown}{DA}$ es un arco mayor $\overset{\frown}{BDA}$, también se observa que $m\overset{\frown}{BD} + m\overset{\frown}{DA} = m\overset{\frown}{BDA}$. En el entendimiento de que $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$ no se traslapan, se generaliza la relación como el siguiente postulado.

POSTULADO 17 ▶ (Postulado arco-adición)

Si $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$ se intersecan sólo en el punto B, entonces $m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{ABC}$.

El dibujo de la figura 6.12(a) apoya además el enunciado del postulado 17.

Dados los puntos A, B y C en $\odot O$, como se muestra en la figura 6.12(a), suponga que los radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ están trazados. Ya que $m\angle AOB + m\angle BOC = m\angle AOC$

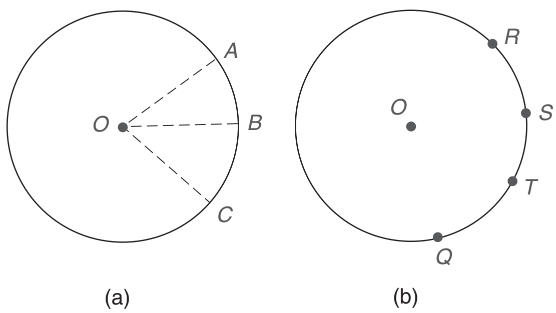


Figura 6.12

por el postulado ángulo-adición se tiene que

$$m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{ABC}$$

La razón para escribir $\overset{\frown}{ABC}$ (en lugar de $\overset{\frown}{AC}$) en el enunciado del postulado arco-adición es que el arco con puntos extremos en A y C *podría ser* un arco mayor. Es fácil demostrar que $m\overset{\frown}{ABC} - m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{AB}$.

El postulado arco-adición se puede extender fácilmente para incluir más de dos arcos. En la figura 6.12(b) $m\overset{\frown}{RS} + m\overset{\frown}{ST} + m\overset{\frown}{TQ} = m\overset{\frown}{RSTQ}$.

Si $m\overset{\frown}{RS} = m\overset{\frown}{ST}$ en la figura 6.12(b), entonces el punto S es el **punto medio** de $\overset{\frown}{RT}$, y en forma alternativa $\overset{\frown}{RT}$ es **bisecado** en el punto S.

En el ejemplo 4 se utiliza el hecho de que el círculo completo mide 360°.

Figura 6.13

EJEMPLO 4

Determine la medida del ángulo formado por las manecillas de un reloj a las 3:12 p.m. (Vea la figura 6.13)

Solución El minutero se mueve a lo largo de 12 minutos, que es $\frac{12}{60}$ o $\frac{1}{5}$ de una hora. Por tanto el minutero apunta en una dirección cuya medida de ángulo a partir de la vertical es $\frac{1}{5}(360°)$ o 72°. Exactamente a las 3 p.m. la manecilla de las horas

Descubra

En la figura 6.14, $\angle B$ es el ángulo inscrito cuyos lados son las cuerdas $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$.

a. Use un transportador para encontrar la medida del $\angle AOC$ central.
b. También encuentre la medida de $\widehat{AC}$.
c. Por último, mida el $\angle B$ inscrito.
d. ¿Cómo se relaciona la medida del ángulo inscrito $\angle B$ con la medida del arco intersecado $\widehat{AC}$?

RESPUESTAS

a) 58° b) 58° c) 29° d) $m\angle B = \frac{1}{2}m\widehat{AC}$

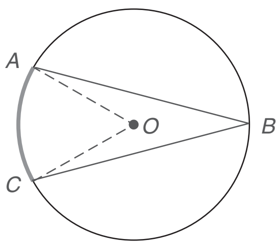


Figura 6.14

Recuerde

La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores remotos.

Exploración tecnológica

Utilice software de cómputo si dispone de él.

1. Cree el círculo O con ángulo inscrito RST.
2. Incluya el radio $\overline{OR}$ en la figura. Vea la figura 6.16.
3. Mida $\widehat{RT}$, $\angle ROT$ y $\angle RST$.
4. Demuestre que:
$m\angle ROT = m\widehat{RT}$ y
$m\angle RST = \frac{1}{2}m\widehat{RT}$

formaría un ángulo de 90° con la vertical. Sin embargo, los engranajes dentro del reloj también giran la manecilla horaria a lo largo de $\frac{1}{5}$ del arco de 30° de las 3 hacia las 4; es decir, la manecilla horaria se mueve otro $\frac{1}{5}(30°)$ o 6° para formar un ángulo de 96° con la vertical. El ángulo entre las manecillas debe medir $96° - 72°$ o 24°. ■

Como se ha visto, la medida de un arco se puede utilizar para medir el ángulo central correspondiente. También se puede utilizar para medir otros tipos de ángulos relacionados con el círculo, incluyendo el ángulo inscrito.

DEFINICIÓN

Un **ángulo inscrito** de un círculo, es un ángulo que tiene su vértice en un punto en el círculo y sus lados son cuerdas del círculo.

La palabra *inscrito* se relaciona con frecuencia con la palabra *dentro*.

Como sugiere la actividad Descubra de la izquierda, la relación entre la medida de un ángulo inscrito y su arco intersecado es verdadera en general.

TEOREMA 6.1.2

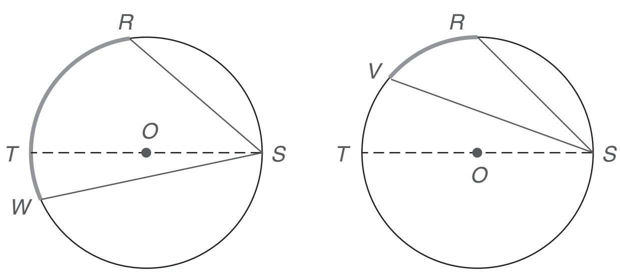
La medida de un ángulo inscrito de un círculo es la mitad de la medida de su arco intersecado.

La demostración del teorema 6.1.2 se debe dividir en tres casos:

CASO 1. Un lado del ángulo inscrito es un diámetro. Vea la figura 6.16 en la página 284

CASO 2. Del diámetro al vértice del ángulo inscrito se encuentra en el interior del ángulo. Vea la figura 6.15(a).

CASO 3. Del diámetro al vértice del ángulo inscrito se encuentra en el exterior del ángulo. Vea la figura 6.15(b).



(a) Caso 2 (b) Caso 3

Figura 6.15

A continuación se presenta la demostración del caso 1 pero las demostraciones de los otros casos se dejan como ejercicios.

DADO: $\odot O$ con $\angle RST$ inscrito y diámetro $\overline{ST}$ (Vea la figura 6.16.)

DEMUESTRE: $m\angle S = \frac{1}{2}m\widehat{RT}$

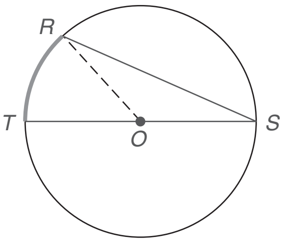


Figura 6.16

DEMOSTRACIÓN DEL CASO 1: Se comienza con la construcción del radio $\overline{RO}$. Entonces $m\angle ROT = m\widehat{RT}$ ya que el ángulo central tiene una medida igual a la medida de su arco intersecado. Con $\overline{OR} \cong \overline{OS}$, $\triangle ROS$ es isósceles y $m\angle R = m\angle S$. Ahora el ángulo exterior del triángulo es $\angle ROT$, por lo que

$$m\angle ROT = m\angle R + m\angle S$$

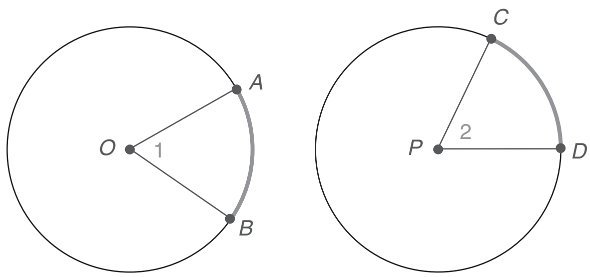
Ya que $m\angle R = m\angle S$, $m\angle ROT = 2(m\angle S)$. Entonces $m\angle S = \frac{1}{2}m\angle ROT$. Con $m\angle ROT = m\widehat{RT}$, se tiene $m\angle S = \frac{1}{2}m\widehat{RT}$ por sustitución. ■

GEE
Ejercicios 11-15

Aunque las comprobaciones en este capítulo toman por lo general la forma de párrafo menos formal, sigue siendo necesario justificar cada enunciado de la demostración.

TEOREMA 6.1.3

En un círculo (o en círculos congruentes) los arcos menores congruentes tienen ángulos centrales congruentes.



Si $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$ en los círculos congruentes O y P, entonces $\angle 1 \cong \angle 2$ por el teorema 6.1.3.

Figura 6.17

Se sugiere que el estudiante realice un esquema para ilustrar cada uno de los siguientes tres teoremas. Algunas de las demostraciones dependen de radios auxiliares.

TEOREMA 6.1.4

En un círculo (o en círculos congruentes) los ángulos centrales congruentes tienen arcos congruentes.

TEOREMA 6.1.5

En un círculo (o en círculos congruentes) las cuerdas congruentes tienen arcos menores (mayores) congruentes.

TEOREMA 6.1.6

En un círculo (o en círculos congruentes) los arcos congruentes tienen cuerdas congruentes.

Con base en la definición anterior se determina la distancia del centro de un círculo hasta la cuerda como la longitud del segmento perpendicular que une el centro con esa cuerda.

Se usan triángulos congruentes para comprobar los siguientes dos teoremas.

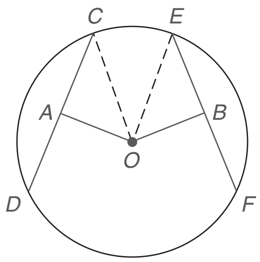


Figura 6.18

TEOREMA 6.1.7

Las cuerdas que están a la misma distancia del centro de un círculo son congruentes.

DADO: $\overline{OA} \perp \overline{CD}$ y $\overline{OB} \perp \overline{EF}$ en $\odot O$ (Vea la figura 6.18.)
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$

DEMUESTRE: $\overline{CD} \cong \overline{EF}$

DEMOSTRACIÓN: Trace los radios $\overline{OC}$ y $\overline{OE}$. Con $\overline{OA} \perp \overline{CD}$ y $\overline{OB} \perp \overline{EF}$, $\angle OAC$ y $\angle OBE$ son $\angle$s rectos. Se da $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ y $\overline{OC} \cong \overline{OE}$ ya que todos los radios de un círculo son congruentes. $\triangle OAC$ y $\triangle OBE$ son triángulos rectángulos. Por tanto, $\triangle OAC \cong \triangle OBE$ por HC.

Por PCTCC, $\overline{CA} \cong \overline{BE}$ de manera que $CA = BE$. Entonces $2(CA) = 2(BE)$. Pero $2(CA) = CD$ ya que A es el punto medio de la cuerda $\overline{CD}$. ($\overline{OA}$ biseca la cuerda $\overline{CD}$ porque $\overline{OA}$ es parte de un radio. Vea el teorema 6.1.1.) De manera similar, $2(BE) = EF$, se concluye que

$$CD = EF \quad \text{y} \quad \overline{CD} \cong \overline{EF} \qquad \blacksquare$$

Las demostraciones de los teoremas restantes se dejan como ejercicios.

TEOREMA 6.1.8

Las cuerdas congruentes se localizan a la misma distancia del centro de un círculo.

El estudiante debe realizar un esquema para ilustrar el teorema 6.1.8

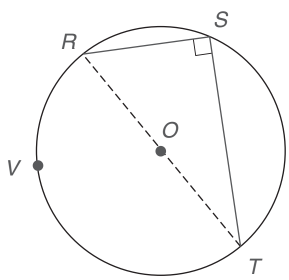


Figura 6.19

TEOREMA 6.1.9

Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

En la figura 6.19, se ilustra el teorema 6.1.9, donde $\angle S$ está inscrito en el semicírculo $\overparen{RST}$. Observe que $\angle S$ también interseca el semicírculo $\overparen{RVT}$.

TEOREMA 6.1.10

Si dos ángulos inscritos intersecan el mismo arco, entonces esos ángulos son congruentes.

Ejercicios 16, 17

En la figura 6.20 se ilustra el teorema 6.1.10. Observe que tanto $\angle 1$ como $\angle 2$ intersecan a $\overparen{XY}$. Ya que $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\overparen{XY}$ y $m\angle 2 = \frac{1}{2}m\overparen{XY}$, $\angle 1 \cong \angle 2$.

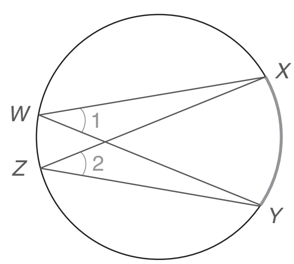
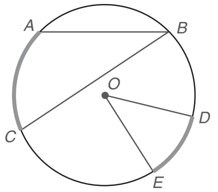


Figura 6.20

Ejercicios 6.1

En los ejercicios 1 a 8 use la figura dada.

1. Si m$\widehat{AC} = 58°$, encuentre m$\angle B$.



Ejercicios 1-8

2. Si m$\widehat{DE} = 46°$, encuentre m$\angle O$.

3. Si m$\widehat{DE} = 47.6°$, encuentre m$\angle O$.

4. Si m$\widehat{AC} = 56.4°$, encuentre m$\angle B$.

5. Si m$\angle B = 28.3°$, encuentre m$\widehat{AC}$.

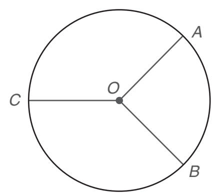
6. Si m$\angle O = 48.3°$, encuentre m$\widehat{DE}$.

7. Si m$\widehat{DE} = 47°$, encuentre la medida del ángulo reflejo que interseca a $\widehat{DBACE}$.

8. Si m$\widehat{ECABD} = 312°$, encuentre m$\angle DOE$.

9. *Dado:* $\overline{AO} \perp \overline{OB}$ y $\overline{OC}$ biseca $\widehat{ACB}$ en $\odot O$

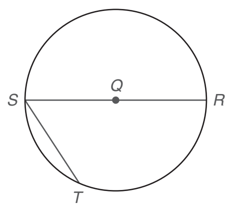
Encuentre: a) m$\widehat{AB}$
b) m$\widehat{ACB}$
c) m$\widehat{BC}$
d) m$\angle AOC$



10. *Dado:* $ST = \frac{1}{2}(SR)$ en $\odot Q$
$\overline{SR}$ es un diámetro

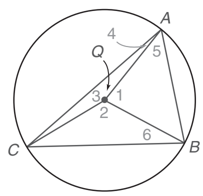
Encuentre: a) m$\widehat{ST}$
b) m$\widehat{TR}$
c) m$\widehat{STR}$
d) m$\angle S$

(*SUGERENCIA:* Trace $\overline{QT}$.)



11. *Dado:* $\odot Q$ en el que m$\widehat{AB}$:m$\widehat{BC}$:m$\widehat{CA}$ = 2:3:4

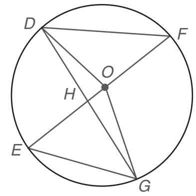
Encuentre: a) m$\widehat{AB}$
b) m$\widehat{BC}$
c) m$\widehat{CA}$
d) m$\angle 1$ ($\angle AQB$)
e) m$\angle 2$ ($\angle CQB$)
f) m$\angle 3$ ($\angle CQA$)
g) m$\angle 4$ ($\angle CAQ$)
h) m$\angle 5$ ($\angle QAB$)
i) m$\angle 6$ ($\angle QBC$)



(*SUGERENCIA:* Sea m$\widehat{AB} = 2x$, m$\widehat{BC} = 3x$ y m$\widehat{CA} = 4x$.)

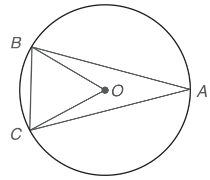
12. *Dado:* m$\angle DOE = 76°$ y
m$\angle EOG = 82°$ en $\odot O$
$\overline{EF}$ es un diámetro

Encuentre: a) m$\widehat{DE}$
b) m$\widehat{DF}$
c) m$\angle F$
d) m$\angle DGE$
e) m$\angle EHG$
f) Si m$\angle EHG = \frac{1}{2}$(m$\widehat{EG}$ + m$\widehat{DF}$)



13. *Dado:* $\odot O$ con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y
m$\angle BOC = 72°$

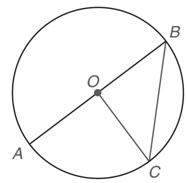
Encuentre: a) m$\widehat{BC}$
b) m$\widehat{AB}$
c) m$\angle A$
d) m$\angle ABC$
e) m$\angle ABO$



14. En $\odot O$ (que no se muestra), $\overline{OA}$ es un radio, $\overline{AB}$ es un diámetro y $\overline{AC}$ es una cuerda.
a) ¿Cómo se compara OA con AB?
b) ¿Cómo se compara AC con AB?
c) ¿Cómo se compara AC con OA?

15. *Dado:* En $\odot O$, $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ y
$OC = 6$

Encuentre: a) AB
b) BC



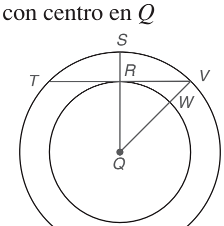
Ejercicios 15

16. *Dado:* Círculos concéntricos con centro en Q
$SR = 3$ y $RQ = 4$
$\overline{QS} \perp \overline{TV}$ en R

Encuentre: a) RV
b) TV

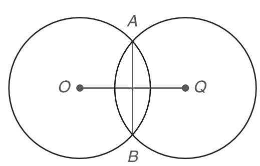
17. *Dado:* Círculos concéntricos con centro en Q
$TV = 8$ y $VW = 2$
$\overline{RQ} \perp \overline{TV}$

Encuentre: RQ (*SUGERENCIA:* Sea $RQ = x$.)



Ejercicios 16, 17

18. $\overline{AB}$ es la **cuerda común** de $\odot O$ y $\odot Q$. Si $AB = 12$ y cada círculo tiene un radio de longitud 10, ¿cuánto mide $\overline{OQ}$?



Ejercicios 18, 19

19. Los círculos O y Q tienen la cuerda común $\overline{AB}$. Si $AB = 6$, $\odot O$ tiene un radio de longitud 4 y $\odot Q$ tiene un radio de longitud 6, ¿cuánto mide $\overline{OQ}$? Vea la figura del ejercicio 18.

20. Suponga que un círculo se divide en tres arcos congruentes por los puntos A, B y C. ¿Cuál es la medida de cada arco? ¿Qué tipo de figura resulta cuando A, B y C se unen por segmentos de recta?

21. Suponga que se divide un círculo por los puntos A, B, C y D en cuatro arcos congruentes. ¿Cuál es la medida de cada arco? Si estos puntos se unen en orden, ¿qué tipo de cuadrilátero resulta?

22. Siguiendo el patrón de los ejercicios 20 y 21, ¿qué tipo de figura resulta de dividir el círculo equitativamente por los cinco puntos y unir esos puntos en orden? ¿Qué tipo de polígono se forma al unir consecutivamente los n puntos que separan el círculo en n arcos congruentes?

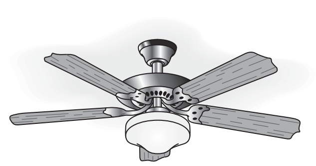
23. Considere un círculo o círculos congruentes y explique por qué cada enunciado es verdadero:
a) Arcos congruentes tienen ángulos centrales congruentes.
b) Ángulos centrales congruentes tienen arcos congruentes.
c) Cuerdas congruentes tienen arcos congruentes.
d) Arcos congruentes tienen cuerdas congruentes.
e) Ángulos centrales congruentes tienen cuerdas congruentes.
f) Cuerdas congruentes tienen ángulos centrales congruentes.

24. Establezca la medida del ángulo formado por el minutero y la manecilla horaria de un reloj cuando la hora es
a) 1:30 p.m. b) 2:20 a.m.

25. Establezca la medida del ángulo formado por las manecillas del reloj a las
a) 6:30 p.m. b) 5:40 a.m.

26. Cinco puntos están igualmente espaciados en un círculo. Se forma una estrella (pentagrama) de cinco puntas al unir puntos no consecutivos dos a la vez. ¿Cuál es la medida en grados de un arco determinado por dos puntos consecutivos?

27. Un ventilador de techo tiene cinco cuchillas igualmente espaciadas. ¿Cuál es la medida del ángulo formado por dos cuchillas consecutivas?

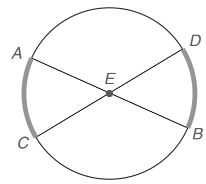


28. Repita el ejercicio 27 pero con un ventilador de techo que tiene seis cuchillas igualmente espaciadas.

29. Una atracción de un parque de diversiones (el "Pulpo") tiene ocho brazos de soporte que están igualmente espaciados alrededor de un círculo. ¿Cuál es la medida del ángulo central formado por dos brazos consecutivos?

En los ejercicios 30 y 31 complete cada demostración.

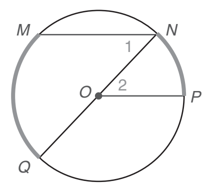
30. *Dado:* Diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en $\odot E$
Demuestre: $\overparen{AC} \cong \overparen{DB}$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. $\angle AEC \cong \angle DEB$	2. ?
3. $m\angle AEC = m\angle DEB$	3. ?
4. $m\angle AEC = m\overparen{AC}$ y $m\angle DEB = m\overparen{DB}$	4. ?
5. $m\overparen{AC} = m\overparen{DB}$	5. ?
6. ?	6. Si dos arcos de un círculo tienen la misma medida, son $\cong$

31. *Dado:* $\overline{MN} \parallel \overline{OP}$ en $\odot O$
Demuestre: $m\overparen{MQ} = 2(m\overparen{NP})$

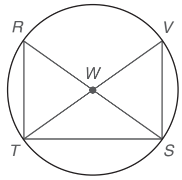


DEMOSTRACIÓN

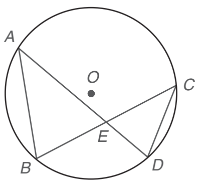
Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. ?
3. $m\angle 1 = m\angle 2$	3. ?
4. $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\overparen{MQ})$	4. ?
5. $m\angle 2 = m\overparen{NP}$	5. ?
6. $\frac{1}{2}(m\overparen{MQ}) = m\overparen{NP}$	6. ?
7. $m\overparen{MQ} = 2(m\overparen{NP})$	7. Propiedad de igualdad de la multiplicación

En los ejercicios 32 a 37 escriba una demostración en párrafo.

32. *Dado:* $\overline{RS}$ y $\overline{TV}$ son diámetros de $\odot W$
Demuestre: $\triangle RST \cong \triangle VTS$



33. *Dado:* Cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ en $\odot O$
Demuestre: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$



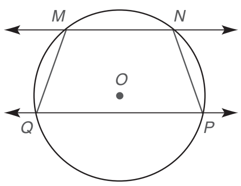
34. Las cuerdas congruentes se localizan a la misma distancia desde el centro de un círculo.

35. Un radio perpendicular a una cuerda biseca el arco de esa cuerda.

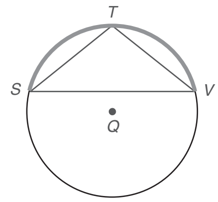
36. Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

37. Si dos ángulos inscritos intersecan el mismo arco, entonces dichos ángulos son congruentes.

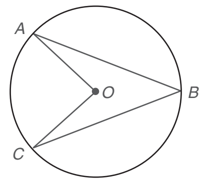
38. Si $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$ en $\odot O$, explique por qué $MNPQ$ es un trapezoide isósceles.
(SUGERENCIA: Trace una diagonal.)



39. Si $\overparen{ST} \cong \overparen{TV}$, explique por qué $\triangle STV$ es un triángulo isósceles.



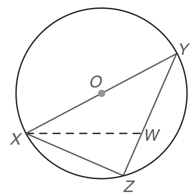
***40.** Utilice una demostración en párrafo para completar este ejercicio.
Dado: $\odot O$ con cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, radios $\overline{AO}$ y $\overline{OC}$
Demuestre: $m\angle ABC < m\angle AOC$



41. Demuestre el caso 2 del teorema 6.1.2.

42. Demuestre el caso 3 del teorema 6.1.2.

43. En $\odot O$, $OY = 5$ y $XZ = 6$.
Si $\overline{XW} \cong \overline{WY}$, encuentre WZ.



6.2 Más medidas de ángulo en el círculo

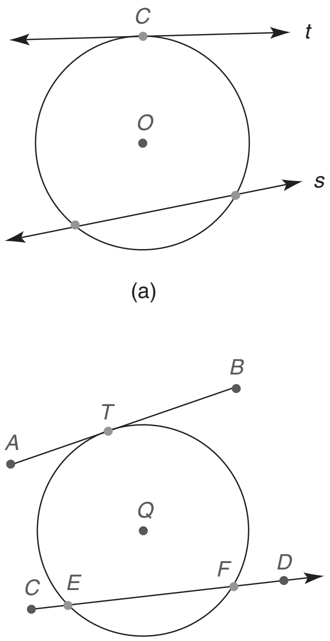
CONCEPTOS CLAVE

- Tangente
- Punto de tangencia
- Secante
- Polígono inscrito en un círculo
- Polígono cíclico
- Círculo circunscrito
- Polígono circunscrito alrededor de un círculo
- Círculo inscrito
- Interior y exterior de un círculo

Se comienza esta sección considerando rectas, rayos y segmentos que están relacionados con el círculo. Se supone que las rectas y los círculos son coplanares.

DEFINICIÓN

Una **tangente** es una recta que interseca un círculo en exactamente un punto; el punto de intersección es el **punto de contacto** o **punto de tangencia**.



(a)

(b)

Figura 6.21

El término *tangente* también se aplica a un segmento o rayo que es parte de una recta tangente a un círculo. En cada caso la tangente toca el círculo en un punto.

DEFINICIÓN

Una **secante** es una recta (o segmento o rayo) que interseca un círculo en exactamente dos puntos.

En la figura 6.21(a) la recta s es una secante de $\odot O$; también, la recta t es una tangente a $\odot O$ y el punto C es su punto de contacto. En la figura 6.21(b), $\overline{AB}$ es una tangente a $\odot Q$ y el punto T es su punto de tangencia; $\overrightarrow{CD}$ es una secante con puntos de intersección en E y F.

DEFINICIÓN

Un polígono está **inscrito en un círculo** si sus vértices son puntos en el círculo y sus lados son cuerdas del círculo. De manera equivalente se dice que el círculo está **circunscrito alrededor del polígono**. El polígono inscrito en un círculo se describe como **polígono cíclico**.

En la figura 6.22, $\triangle ABC$ está inscrito en $\odot O$ y el cuadrilátero $RSTV$ está inscrito en $\odot Q$. A la inversa, $\odot O$ está circunscrito alrededor de $\triangle ABC$ y $\odot Q$ está circunscrito alrededor del cuadrilátero $RSTV$. Observe que $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son cuerdas de $\odot O$ y que $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TV}$ y $\overline{RV}$ son cuerdas de $\odot Q$. El cuadrilátero $RSTV$ y el $\triangle ABC$ son polígonos cíclicos.

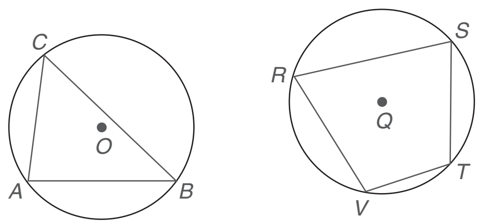


Figura 6.22

Descubra

Trace cualquier círculo y llámelo $\odot O$. Ahora elija cuatro puntos en $\odot O$ (en orden, llame a estos puntos A, B, C y D). Una esos puntos para formar el cuadrilátero $ABCD$ inscrito en $\odot O$. Mida cada uno de los ángulos inscritos ($\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$).

a. Encuentre la suma $m\angle A + m\angle C$.
b. ¿Cómo se relacionan los $\angle$s A y C?
c. Encuentre la suma $m\angle B + m\angle D$.
d. ¿Cómo se relacionan los $\angle$s B y D?

RESPUESTAS

a) 180° b) Suplementario c) 180° d) Suplementario

La actividad anterior, Descubra, prepara el camino para el siguiente teorema.

TEOREMA 6.2.1

Si un cuadrilátero está inscrito en un círculo los ángulos opuestos son suplementarios.
Forma alternativa: Los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico son suplementarios.

A continuación se presenta la demostración del teorema 6.2.1. En la demostración, se demuestra que $\angle R$ y $\angle T$ son suplementarios. En una demostración similar, se podría también tener que demostrar que $\angle S$ y $\angle V$ también son suplementarios.

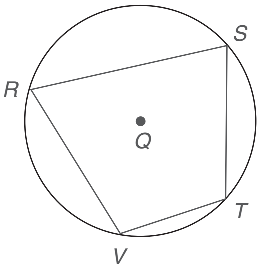


Figura 6.23

Recuerde

Se dice que un cuadrilátero es cíclico si sus vértices están en un círculo.

DADO: $RSTV$ está inscrito en $\odot Q$ (vea la figura 6.23).

DEMUESTRE: $\angle R$ y $\angle T$ son suplementarios.

DEMOSTRACIÓN: De la sección 6.1, un ángulo inscrito es igual en medida a la mitad de la medida de su arco intersecado. Ya que $m\angle R = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{STV}$ y $m\angle T = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{SRV}$ se tiene que

$$\begin{aligned} m\angle R + m\angle T &= \frac{1}{2}m\overset{\frown}{STV} + \frac{1}{2}m\overset{\frown}{SRV} \\ &= \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{STV} + m\overset{\frown}{SRV}) \end{aligned}$$

Ya que $\overset{\frown}{STV}$ y $\overset{\frown}{SRV}$ forman el círculo completo, $m\overset{\frown}{STV} + m\overset{\frown}{SRV} = 360°$. Sustituyendo,

$$m\angle R + m\angle T = \frac{1}{2}(360°) = 180°$$

Por definición, $\angle R$ y $\angle T$ son suplementarios.

La demostración del teorema 6.2.1 demuestra que $m\angle R + m\angle T = 180°$. Ya que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°, se sabe que

$$m\angle R + m\angle S + m\angle T + m\angle V = 360°$$

Usando sustitución, es fácil demostrar que $m\angle S + m\angle V = 180°$, es decir $\angle S$ y $\angle V$ son también suplementarios. ■

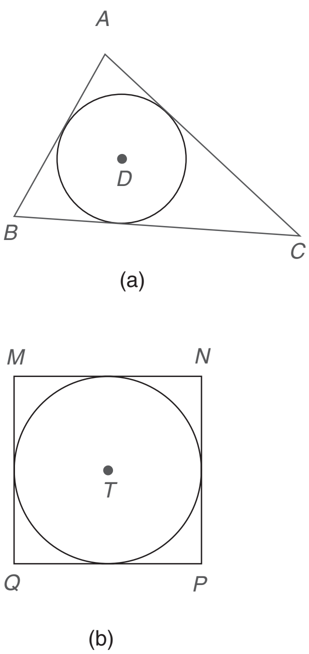


Figura 6.24

DEFINICIÓN

Un polígono está **circunscrito alrededor de un círculo** si todos los lados del polígono son segmentos de recta tangentes al círculo; además se dice que el círculo está **inscrito en el polígono**.

En la figura 6.24(a), $\triangle ABC$ está circunscrito alrededor de $\odot D$. En la figura 6.24(b) el cuadrado $MNPQ$ está circunscrito alrededor de $\odot T$. Además, $\odot D$ está inscrito en $\triangle ABC$ y $\odot T$ está inscrito en el cuadrado $MNPQ$. Observe que $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son tangentes a $\odot D$ y que $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{MQ}$, son tangentes a $\odot T$.

Se sabe que un ángulo central tiene una medida igual a la medida de su arco intersecado y que un ángulo inscrito tiene una medida igual a la mitad de la medida de su arco intersecado. Ahora considere otro tipo de ángulo en el círculo.

TEOREMA 6.2.2

La medida de un ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan dentro de un círculo es la mitad de la suma de las medidas de los arcos intersecados por el ángulo y su ángulo vertical.

GEE *Ejercicios 1-6*

En la figura 6.25(a) en la página 291, $\angle 1$ interseca $\overset{\frown}{DB}$ y $\angle AEC$ interseca $\overset{\frown}{AC}$. De acuerdo con el teorema 6.2.2,

$$m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{AC} + m\overset{\frown}{DB})$$

Para demostrar el teorema 6.2.2 se traza el segmento de recta auxiliar $\overline{CB}$ [vea la figura 6.25(b)].

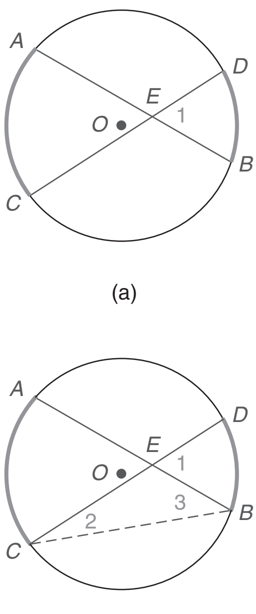


Figura 6.25

DADO: Las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en el punto E en $\odot O$

DEMUESTRE: $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{DB})$

DEMOSTRACIÓN:

Trace $\overline{CB}$. Ahora $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$ porque $\angle 1$ es un ángulo exterior de $\triangle CBE$. Ya que $\angle 2$ y $\angle 3$ son ángulos inscritos de $\odot O$,

$$m\angle 2 = \frac{1}{2}m\widehat{DB} \qquad \text{y} \qquad m\angle 3 = \frac{1}{2}m\widehat{AC}$$

La sustitución en la ecuación $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$ conduce a

$$\begin{aligned} m\angle 1 &= \frac{1}{2}m\widehat{DB} + \frac{1}{2}m\widehat{AC} \\ &= \frac{1}{2}(m\widehat{DB} + m\widehat{AC}) \end{aligned}$$

De manera equivalente,

$$m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{DB})$$ ■

Ahora se aplica el teorema 6.2.2

EJEMPLO 1

En la figura 6.25(a), $m\widehat{AC} = 84°$ y $m\widehat{DB} = 62°$. Encuentre $m\angle 1$.

Solución Por el teorema 6.2.2,

$$\begin{aligned} m\angle 1 &= \frac{1}{2}(m\widehat{AC} + m\widehat{DB}) \\ &= \frac{1}{2}(84° + 62°) \\ &= \frac{1}{2}(146°) = 73° \end{aligned}$$ ■

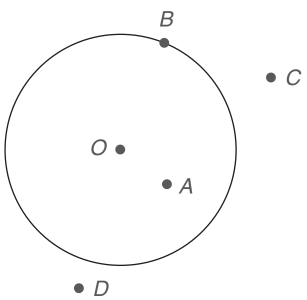


Figura 6.26

Recuerde que un círculo separa los puntos en el plano en tres conjuntos: puntos *en el interior* del círculo, puntos *en* el círculo y puntos *en el exterior* del círculo. En la figura 6.26 el punto A y el centro O están en el **interior** de $\odot O$ ya que sus distancias del centro O son menores que la longitud del radio. El punto B está en el círculo, pero los puntos C y D están en el **exterior** de $\odot O$ ya que sus distancias desde O son mayores que la longitud del radio (vea el ejercicio 46). En la demostración del teorema 6.2.3 se utiliza el hecho de que una tangente a un círculo no puede contener un punto interior del círculo.

TEOREMA 6.2.3

El radio (o cualquier otra recta que pase por el centro de un círculo) trazado hasta una tangente en el punto de tangencia es perpendicular a la tangente en ese punto.

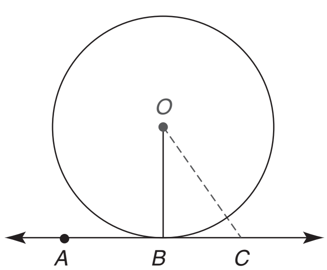
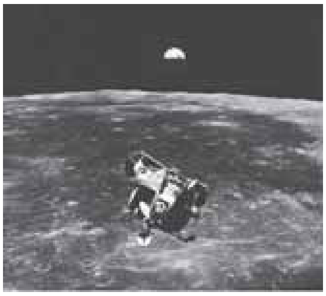


Figura 6.27

DADO: $\odot O$ con tangente $\overleftrightarrow{AB}$; el punto B es el punto de tangencia (vea la figura 6.27).

DEMUESTRE: $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AB}$



DEMOSTRACIÓN: $\odot O$ tiene tangente $\overleftrightarrow{AB}$ y radio $\overline{OB}$. Sea C, nombre cualquier punto en $\overleftrightarrow{AB}$ excepto B. Ahora $OC > OB$ ya que C se encuentra en el exterior del círculo. Se deduce que $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AB}$ porque la distancia más corta de un punto a una recta está determinada por el segmento perpendicular desde ese punto hasta la recta.

El siguiente ejemplo ilustra una aplicación del teorema 6.2.3.

EJEMPLO 2

Un transbordador que va a la Luna ha alcanzado una posición que está a 5 millas sobre su superficie. Si el radio de la Luna es de 1080 mi, ¿qué tan lejos puede ver la tripulación de la NASA al horizonte? (Vea la figura 6.28.)

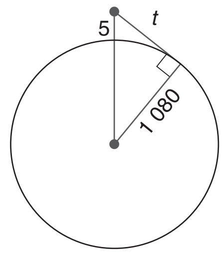


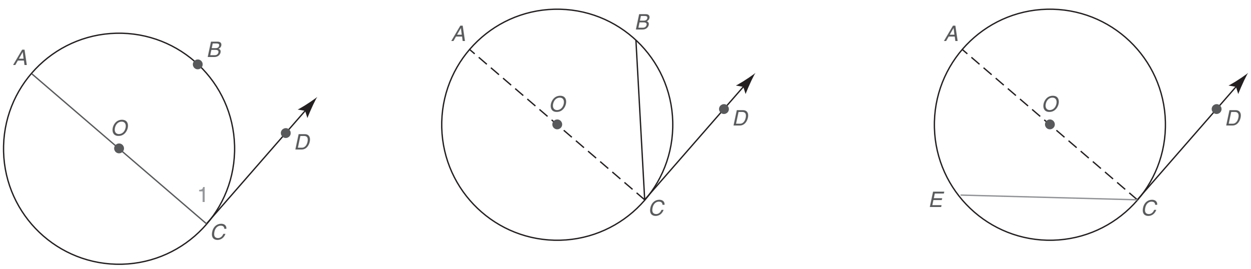
Figura 6.28

Solución De acuerdo con el teorema 6.2.3, la tangente que determina la línea de visión y el radio de la Luna forman un ángulo recto. En el triángulo rectángulo determinado, sea que t represente la distancia deseada. Utilizando el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} 1085^2 &= t^2 + 1080^2 \\ 1\,177\,225 &= t^2 + 1\,166\,400 \\ t^2 &= 10\,825 \rightarrow t = \sqrt{10\,825} \approx 104 \text{ mi} \end{aligned}$$ ■

GEE *Ejercicios 7-10*

Una consecuencia del teorema 6.2.3 es el corolario 6.2.4, que tiene tres casos posibles. En la figura 6.29 se demuestra sólo el primer caso, los dos restantes se dejan como ejercicios para el estudiante. Vea los ejercicios 44 y 45.



(a) Caso 1 La cuerda es un diámetro.

(b) Caso 2 El diámetro está en el exterior del ángulo.

(c) Caso 3 El diámetro está en el interior del ángulo.

Figura 6.29

COROLARIO 6.2.4

La medida de un ángulo formado por una tangente *y* una cuerda trazada hasta el punto de tangencia es la mitad de la medida del arco intersecado. (Vea la figura 6.29.)

DADO: La cuerda $\overline{CA}$ (que es un diámetro) y la tangente $\overrightarrow{CD}$ [Vea la figura 6.29(a).]

DEMUESTRE: $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{ABC}$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 6.2.3 $\overline{AC} \perp \overrightarrow{CD}$. Entonces $\angle 1$ es un ángulo recto y $m\angle 1 = 90°$. Ya que el arco intersecado $\widehat{ABC}$ es un semicírculo $m\widehat{ABC} = 180°$. Por tanto se deduce que $\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{ABC}$.

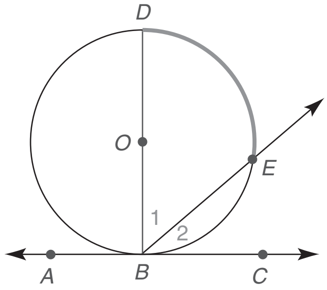


Figura 6.30

EJEMPLO 3

DADO: En la figura 6.30, $\odot O$ con diámetro $\overline{DB}$, tangente $\overleftrightarrow{AC}$ y $m\widehat{DE} = 84°$

ENCUENTRE: a) $m\angle 1$ c) $m\angle ABD$

b) $m\angle 2$ d) $m\angle ABE$

Solución

a) $\angle 1$ es un ángulo inscrito; $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{DE} = 42°$.

b) Con $m\widehat{DE} = 84°$ y $\widehat{DEB}$ que es un semicírculo, $m\widehat{BE} = 180° - 84° = 96°$. Por el corolario 6.2.4 $m\angle 2 = \frac{1}{2}m\widehat{BE} = \frac{1}{2}(96°) = 48°$.

c) Ya que $\overline{DB}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, $m\angle ABD = 90°$.

d) $m\angle ABE = m\angle ABD + m\angle 1 = 90° + 42° = 132°$ ■

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Demostración de los teoremas de medidas de ángulos en el círculo

Regla general: Con la ayuda de una recta auxiliar, los teoremas 6.2.5, 6.2.6 y 6.2.7 se pueden demostrar usando el teorema 6.1.2 (medida de un ángulo inscrito).

Ilustración: En la demostración del teorema 6.2.5 la cuerda $\overline{BD}$ ayuda a formar $\angle 1$ como un ángulo exterior de $\triangle BCD$.

GEE

Ejercicios 11, 12

TEOREMA 6.2.5

La medida de un ángulo, formado cuando dos secantes se intersecan en un punto fuera del círculo, es la mitad de la diferencia de las medidas de los dos arcos intersecados.

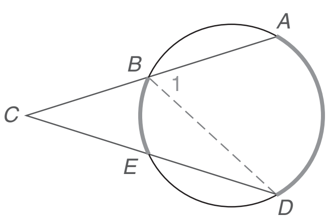


Figura 6.31

DADO: Secantes $\overline{AC}$ y $\overline{DC}$ como se muestra en la figura 6.31

DEMUESTRE: $m\angle C = \frac{1}{2}(m\widehat{AD} - m\widehat{BE})$

DEMOSTRACIÓN: Trace $\overline{BD}$ para formar $\triangle BCD$. Entonces la medida del ángulo exterior de $\triangle BCD$ está dada por

$$m\angle 1 = m\angle C + m\angle D$$

por tanto $$m\angle C = m\angle 1 - m\angle D$$

Ya que $\angle 1$ y $\angle D$ son ángulos inscritos, por lo que $m\angle 1 = \frac{1}{2}m\widehat{AD}$ y $m\angle D = \frac{1}{2}m\widehat{BE}$. Entonces

$$m\angle C = \frac{1}{2}m\widehat{AD} - \frac{1}{2}m\widehat{BE}$$

o $$m\angle C = \frac{1}{2}(m\widehat{AD} - m\widehat{BE})$$

NOTA: En una aplicación del teorema 6.2.5 se sustrae la medida del arco más pequeño de la medida del arco más grande. ■

Exploración tecnológica

Utilice software de cómputo si dispone de él.

1. Forme un círculo que contenga los puntos A y D.
2. A partir del punto externo C trace las secantes $\overline{CA}$ y $\overline{CD}$. Designe los puntos de intersección como B y E. Vea la figura 6.31.
3. Mida $\widehat{AD}$, $\widehat{BE}$ y $\angle C$.
4. Demuestre que $m\angle C = \frac{1}{2}(m\widehat{AD} - m\widehat{BE})$.

EJEMPLO 4

DADO: En $\odot O$ de la figura 6.32 $m\angle AOB = 136°$ y $m\angle DOC = 46°$

ENCUENTRE: $m\angle E$

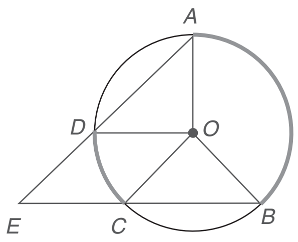


Figura 6.32

Solución Si m$\angle AOB = 136°$, entonces m$\widehat{AB} = 136°$. Si m$\angle DOC = 46°$, entonces m$\widehat{DC} = 46°$. Por el teorema 6.2.5,

$$\begin{aligned} m\angle E &= \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{DC}) \\ &= \frac{1}{2}(136° - 46°) \\ &= \frac{1}{2}(90°) = 45° \end{aligned}$$

■

Los teoremas 6.2.5-6.2.7 demuestran que cualquier ángulo formado por dos rectas que se intersecan *fuera* de un círculo tiene una medida igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los dos arcos intersecados. Los siguientes dos teoremas no están demostrados, pero las rectas auxiliares que se muestran en las figuras 6.33 y 6.34(a) ayudarán a completar las demostraciones.

TEOREMA 6.2.6

Si un ángulo se forma por una secante y una tangente que se intersecan en el exterior de un círculo, entonces la medida del ángulo es la mitad de la diferencia de las medidas de sus arcos intersecados.

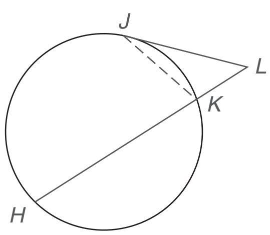


Figura 6.33

De acuerdo con el teorema 6.2.6,

$$m\angle L = \frac{1}{2}(m\widehat{HJ} - m\widehat{JK})$$

en la figura 6.33. Nuevamente, se debe restar la medida del arco menor de la medida del arco mayor.

Un estudio rápido de las figuras que ilustran los teoremas 6.2.5-6.2.7 muestra que el arco más pequeño está "más cercano" al vértice del ángulo y que el arco más grande está "más alejado" del vértice.

TEOREMA 6.2.7

Si un ángulo es formado por dos tangentes que se intersecan, entonces la medida del ángulo es la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos intersecados.

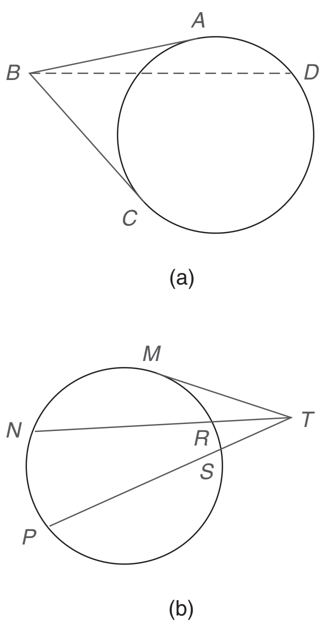


Figura 6.34

En la figura 6.34(a), $\angle ABC$ interseca los dos arcos determinados por los puntos A y C. El arco pequeño es un arco menor $\widehat{AC}$ y el arco grande es un arco mayor $\widehat{ADC}$. De acuerdo con el teorema 6.2.7,

$$m\angle ABC = \frac{1}{2}(m\widehat{ADC} - m\widehat{AC}).$$

Como siempre, se resta la medida del arco menor de la medida del arco mayor.

EJEMPLO 5

DADO: En la figura 6.34(b) m$\widehat{MN} = 70°$, m$\widehat{NP} = 88°$, m$\widehat{MR} = 46°$ y m$\widehat{RS} = 26°$

ENCUENTRE:
a) m$\angle MTN$
b) m$\angle NTP$
c) m$\angle MTP$

Solución

a) $m\angle MTN = \frac{1}{2}(m\widehat{MN} - m\widehat{MR})$
$= \frac{1}{2}(70° - 46°)$
$= \frac{1}{2}(24°) = 12°$

b) $m\angle NTP = \frac{1}{2}(m\widehat{NP} - m\widehat{RS})$
$= \frac{1}{2}(88° - 26°)$
$= \frac{1}{2}(62°) = 31°$

c) $m\angle MTP = m\angle MTN + m\angle NTP$
Utilizando los resultados de (a) y (b), $m\angle MTP = 12° + 31° = 43°$ ■

Antes de considerar el último ejemplo de esta sección, repase los métodos utilizados para medir los diferentes tipos de ángulos relacionados con el círculo. Éstos se resumen en la tabla 6.1.

TABLA 6.1
Métodos para la medición de ángulos relacionados con un círculo

Localización del vértice del ángulo	**Regla para la medición del ángulo**
Centro del círculo	La *medida* del arco intersecado
En el *interior* del círculo	*La mitad de la suma* de las medidas de los arcos intersecados
En el círculo	*La mitad de la medida* del arco intersecado
En el *exterior* del círculo	*La mitad de la diferencia* de las medidas de los dos arcos intersecados

GEE
Ejercicios 13-18

EJEMPLO 6

Dado que $m\angle 1 = 46°$ en la figura 6.35, encuentre las medidas de $\widehat{AB}$ y $\widehat{ACB}$.

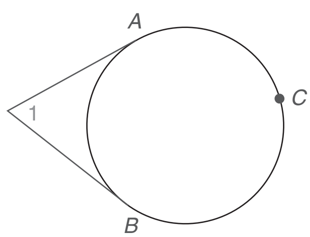


Figura 6.35

Solución Sea $m\widehat{AB} = x$ y $m\widehat{ACB} = y$. Ahora

$$m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{ACB} - m\widehat{AB})$$

por tanto
$$46 = \frac{1}{2}(y - x)$$

Multiplicando por 2 se tiene $92 = y - x$.

Además $y + x = 360$ ya que estos dos arcos forman el círculo completo. Se suman estas ecuaciones como se muestra.

$$\begin{array}{r} y + x = 360 \\ y - x = \ \ 92 \\ \hline 2y \quad = 452 \\ y \quad = 226 \end{array}$$

También, $x + y = 360$, se sabe que $x + 226 = 360$ y $x = 134$. Entonces $m\widehat{AB} = 134°$ y $m\widehat{ACB} = 226°$. ■

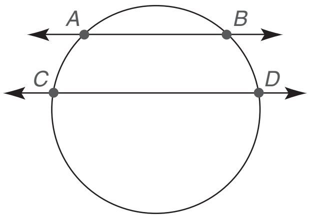


Figura 6.36

TEOREMA 6.2.8

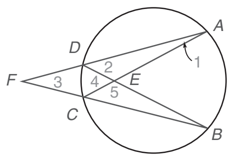
Si dos rectas paralelas intersecan un círculo, los arcos intersecados entre estas rectas son congruentes. (Vea la figura 6.36.)

Donde $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ en la figura 6.36, se deduce que $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{BD}$. De manera equivalente, $m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{BD}$. La demostración del teorema 6.2.8 se deja como ejercicio.

Ejercicios 6.2

1. *Dado:* $m\overset{\frown}{AB} = 92°$
$m\overset{\frown}{DA} = 114°$
$m\overset{\frown}{BC} = 138°$

Encuentre: a) $m\angle 1$ $(\angle DAC)$
b) $m\angle 2$ $(\angle ADB)$
c) $m\angle 3$ $(\angle AFB)$
d) $m\angle 4$ $(\angle DEC)$
e) $m\angle 5$ $(\angle CEB)$



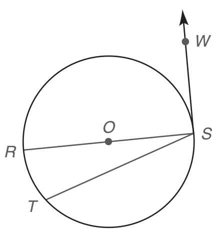
Ejercicios 1, 2

2. *Dado:* $m\overset{\frown}{DC} = 30°$ y $\overset{\frown}{DABC}$ está trisecada en los puntos A y B

Encuentre: a) $m\angle 1$ d) $m\angle 4$
b) $m\angle 2$ e) $m\angle 5$
c) $m\angle 3$

3. *Dado:* El círculo O con diámetro $\overline{RS}$, tangente $\overrightarrow{SW}$, cuerda $\overline{TS}$, y $m\overset{\frown}{RT} = 26°$.

Encuentre: a) $m\angle WSR$
b) $m\angle RST$
c) $m\angle WST$



Ejercicios 3–5

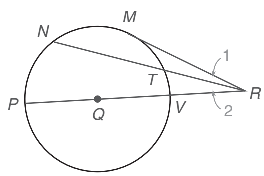
4. Encuentre $m\overset{\frown}{RT}$ si $m\angle RST$:$m\angle RSW = 1:5$.

5. Encuentre $m\angle RST$ si $m\overset{\frown}{RT}$:$m\overset{\frown}{TS} = 1:4$.

6. ¿Es posible que
a) un rectángulo inscrito en un círculo tenga un diámetro como lado? Explique.
b) un rectángulo circunscrito alrededor de un círculo sea un cuadrado? Explique.

7. *Dado:* En $\odot O$, $\overline{PR}$ *contiene* a Q, $\overline{MR}$ es una tangente, $m\overset{\frown}{MP} = 112°$, $m\overset{\frown}{MN} = 60°$ y $m\overset{\frown}{MT} = 46°$

Encuentre: a) $m\angle MRP$
b) $m\angle 1$
c) $m\angle 2$

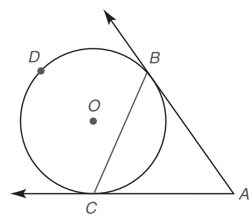


8. *Dado:* $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son tangentes a $\odot O$, $m\overset{\frown}{BC} = 126°$

Encuentre: a) $m\angle A$
b) $m\angle ABC$
c) $m\angle ACB$

9. *Dado:* Tangentes $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ a $\odot O$
$m\angle ACB = 68°$

Encuentre: a) $m\overset{\frown}{BC}$
b) $m\overset{\frown}{BDC}$
c) $m\angle ABC$
d) $m\angle A$



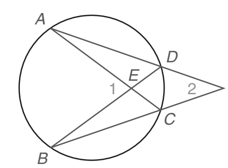
Ejercicios 8, 9

10. *Dado:* $m\angle 1 = 72°$, $m\overset{\frown}{DC} = 34°$

Encuentre: a) $m\overset{\frown}{AB}$
b) $m\angle 2$

11. *Dado:* $m\angle 2 = 36°$
$m\overset{\frown}{AB} = 4 \cdot m\overset{\frown}{DC}$

Encuentre: a) $m\overset{\frown}{AB}$
b) $m\angle 1$



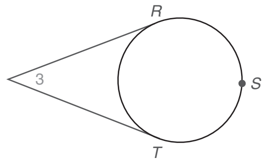
Ejercicios 10, 11

(SUGERENCIA: Sea $m\overset{\frown}{DC} = x$ y $m\overset{\frown}{AB} = 4x$.)

En los ejercicios 12 y 13, R y T son puntos de tangencia

12. *Dado:* $m\angle 3 = 42°$
Encuentre: a) $m\overset{\frown}{RT}$
b) $m\overset{\frown}{RST}$

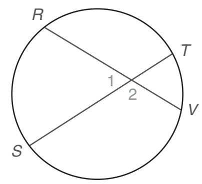
13. *Dado:* $\overset{\frown}{RS} \cong \overset{\frown}{ST} \cong \overset{\frown}{RT}$
Encuentre: a) $m\overset{\frown}{RT}$
b) $m\overset{\frown}{RST}$
c) $m\angle 3$



Ejercicios 12, 13

14. *Dado:* $m\angle 1 = 63°$
$m\overset{\frown}{RS} = 3x + 6$
$m\overset{\frown}{VT} = x$
Encuentre: $m\overset{\frown}{RS}$

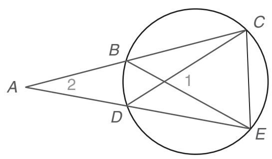
15. *Dado:* $m\angle 2 = 124°$
$m\overset{\frown}{TV} = x + 1$
$m\overset{\frown}{SR} = 3(x + 1)$
Encuentre: $m\overset{\frown}{TV}$



Ejercicios 14, 15

16. *Dado:* $m\angle 1 = 71°$
$m\angle 2 = 33°$
Encuentre: $m\overset{\frown}{CE}$ y $m\overset{\frown}{BD}$

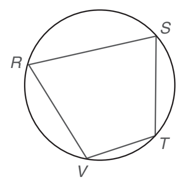
17. *Dado:* $m\angle 1 = 62°$
$m\angle 2 = 26°$
Find: $m\overset{\frown}{CE}$ y $m\overset{\frown}{BD}$



Ejercicios 16, 17

18. a) ¿Cómo se relacionan $\angle R$ y $\angle T$?
b) Encuentre $m\angle R$ si $m\angle T = 112°$.

19. a) ¿Cómo se relacionan $\angle S$ y $\angle V$?
b) Encuentre $m\angle V$ si $m\angle S = 73°$.

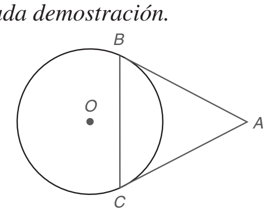


Ejercicios 18, 19

20. Un cuadrilátero *RSTV* está circunscrito alrededor de un círculo de tal manera que sus lados tangentes están en los puntos extremos de dos diámetros intersecantes.
a) ¿Qué tipo de cuadrilátero es *RSTV*?
b) Si los diámetros también son perpendiculares, ¿qué tipo de cuadrilátero es *RSTV*?

En los ejercicios 21 y 22 complete cada demostración.

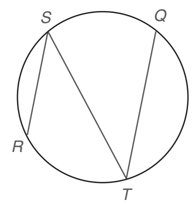
21. *Dado:* $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son tangentes a $\odot O$ desde el punto *A*
Demuestre: $\triangle ABC$ es isósceles



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ?	1. Dado
2. $m\angle B = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{BC})$ y $m\angle C = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{BC})$	2. ?
3. $m\angle B = m\angle C$	3. ?
4. $\angle B \cong \angle C$	4. ?
5. ?	5. Si dos $\angle$s de un $\triangle$ son $\cong$, los lados opuestos a los $\angle$s son $\cong$
6. ?	6. Si dos lados de un $\triangle$ son $\cong$, el $\triangle$ es isósceles

22. *Dado:* $\overline{RS} \parallel \overline{TQ}$
Encuentre: $\overset{\frown}{RT} \cong \overset{\frown}{SQ}$

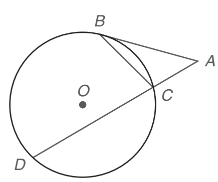


DEMOSTRACIÓN

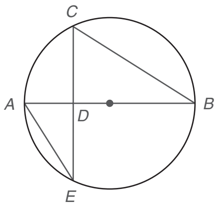
Enunciados	Razones
1. $\overline{RS} \parallel \overline{TQ}$	1. ?
2. $\angle S \cong \angle T$	2. ?
3. ?	3. Si dos $\angle$s son $\cong$, los $\angle$s son $=$ en medida
4. $m\angle S = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{RT})$	4. ?
5. $m\angle T = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{SQ})$	5. ?
6. $\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{RT}) = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{SQ})$	6. ?
7. $m\overset{\frown}{RT} = m\overset{\frown}{SQ}$	7. Propiedad de igualdad de la multiplicación
8. ?	8. Si dos arcos de un $\odot$ son $=$ en medida, los arcos son $\cong$

En los ejercicios 23 al 25 complete una demostración en párrafo.

23. *Dado:* Tangente $\overline{AB}$ a $\odot O$ en el punto *B*
$m\angle A = m\angle B$
Demuestre: $m\overset{\frown}{BD} = 2 \cdot m\overset{\frown}{BC}$

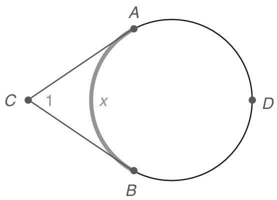


24. *Dado:* Diámetro $\overline{AB} \perp \overline{CE}$ en D
Demuestre: CD es la media geométrica de AD y DB



En los ejercicios 25 y 26 $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son tangentes.

25. *Dado:* $m\widehat{AB} = x$
Demuestre: $m\angle 1 = 180° - x$

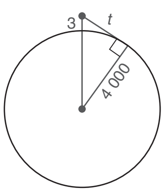


Ejercicios 25, 26

26. Use el resultado del ejercicio 25 para encontrar $m\angle 1$ si $m\widehat{AB} = 104°$.

27. Un avión alcanza una altitud de 3 mi sobre la Tierra. Suponiendo que es un día despejado y que un pasajero tiene binoculares, ¿qué tan lejos puede ver el pasajero?

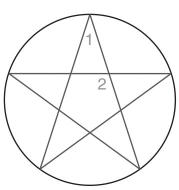
(SUGERENCIA: El radio de la Tierra es de aproximadamente 4000 mi.)



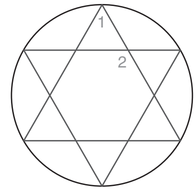
28. Desde la terraza de un hotel con vista al mar, Manny está observando el paisaje marino con sus binoculares. De repente aparece un barco en el horizonte. Si Manny está a 80 pies sobre el nivel del mar, ¿qué tan lejos está el barco en el mar?

(SUGERENCIA: Vea el ejercicio 27 y observe que 1 mi = 5280 pies).

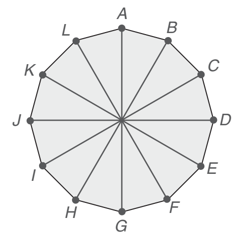
29. Para la estrella de cinco puntos (pentagrama), inscrita en el círculo, encuentre la medida de $\angle 1$ y de $\angle 2$.



30. Encuentre la medida de $\angle 1$ y de $\angle 2$ en la estrella de seis puntos (hexagrama) inscrita en el círculo.

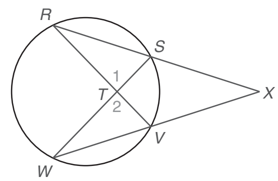


31. Una antena satelital con la forma de un dodecágono regular (12 lados) es casi "circular". Encuentre:
a) $m\widehat{AB}$
b) $m\widehat{ABC}$
c) $m\angle ABC$ (ángulo inscrito)



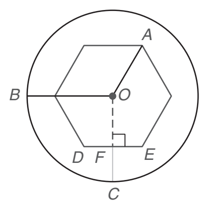
32. En la figura que se muestra, $\triangle RST \sim \triangle WVT$ por la razón AA. Nombre dos pares de ángulos congruentes en estos triángulos semejantes.

33. En la figura que se muestra, $\triangle RXV \sim \triangle WXS$ por la razón AA. Nombre dos pares de ángulos congruentes en estos triángulos semejantes.

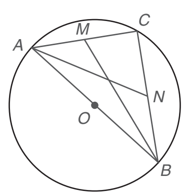


Ejercicios 32, 33

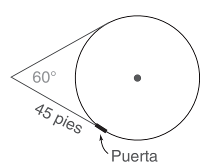
***34.** En el ajuste para una llave Allen, la distancia del centro O al vértice es de 5 mm. La longitud del radio $\overline{OB}$ del círculo es de 10 mm. Si $\overline{OC} \perp \overline{DE}$ en F, ¿cuál es la longitud de $\overline{FC}$?



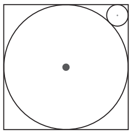
***35.** *Dado*: $\overline{AB}$ es un diámetro de $\odot O$
M es el punto medio de la cuerda $\overline{AC}$
N es el punto medio de la cuerda $\overline{CB}$
$MB = \sqrt{73}$, $AN = 2\sqrt{13}$
Encuentre: La longitud del diámetro $\overline{AB}$



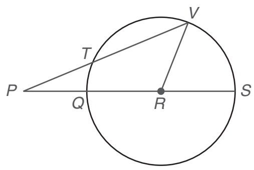
36. Un topógrafo ve un planetario circular a través de un ángulo de 60°. Si el topógrafo está a 45 pies de la puerta, ¿cuál es el diámetro del planetario?



***37.** El círculo grande está inscrito en un cuadrado con lados de 4 cm de longitud. El círculo chico es tangente al círculo grande y a los dos lados del cuadrado, como se muestra. Encuentre el radio del círculo chico.



***38.** En ⊙R, $QS = 2(PT)$. También, $m\angle P = 23°$. Encuentre $m\angle VRS$.



En los ejercicios 39 al 47 proporcione una demostración en párrafo. Asegúrese de dar un esquema, y los enunciados Dado y Demuestre donde sea necesario.

39. Si dos rectas paralelas intersecan un círculo, entonces los arcos intersecados entre esas rectas son congruentes.

(SUGERENCIA: Vea la figura 6.36. Trace la cuerda $\overline{AD}$.)

40. La recta que une los centros de dos círculos que se intersecan en dos puntos es el bisector perpendicular de la cuerda común.

41. Si un trapezoide está inscrito en un círculo, entonces es un trapezoide isósceles.

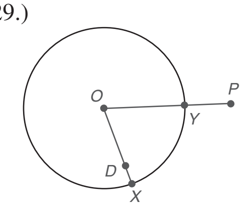
42. Si un paralelogramo está inscrito en un círculo, entonces es un rectángulo.

43. Si un lado de un triángulo inscrito es un diámetro, entonces el triángulo es rectángulo.

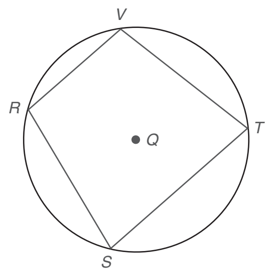
44. Compruebe el caso 2 del corolario 6.2.4: La medida de un ángulo formado por una tangente y una cuerda trazada hasta el punto de tangencia es la mitad de la medida del arco intersecado. (Vea la figura 6.29.)

45. Demuestre el caso 3 del corolario 6.2.4. (Vea la figura 6.29.)

46. *Dado*: ⊙O con P en su exterior; O–Y–P
Demuestre: $OP > OY$



47. *Dado*: Cuadrilátero $RSTV$ inscrito en ⊙Q
Demuestre: $m\angle R + m\angle T = m\angle V + m\angle S$



6.3 Relaciones de recta y segmento en el círculo

CONCEPTOS CLAVE

Círculos tangentes	Recta de centros	Tangentes externas comunes
Círculos tangentes internamente	Tangente común	Tangentes internas comunes
Círculos tangentes externamente		

En esta sección se consideran las relaciones de recta y segmento en el círculo. Ya que algunos de estos enunciados (como los teoremas 6.3.1-6.3.3) son tan similares en palabras, se pide insistentemente al estudiante que realice esquemas y después compare la información dada en cada teorema con la conclusión de dicho teorema.

TEOREMA 6.3.1

Si se traza una recta que pase por el centro de un círculo perpendicular a una cuerda, entonces ésta biseca la cuerda y su arco.

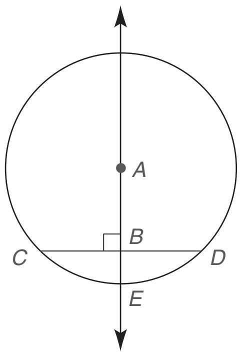


Figura 6.37

NOTA: Observe que el término *arco* se refiere por lo general al arco menor, aun cuando el arco mayor también sea bisecado.

DADO: $\overleftrightarrow{AB} \perp$ a la cuerda $\overline{CD}$ en el círculo A. (Vea la figura 6.37.)

DEMUESTRE: $\overline{CB} \cong \overline{BD}$ y $\widehat{CE} \cong \widehat{ED}$

La demostración se deja como ejercicio para el estudiante.

(SUGERENCIA: Trace $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$.)

Aun cuando el enunciado Demuestre no coincide con la conclusión del teorema 6.3.1, se sabe que $\overline{CD}$ es bisecado por $\overleftrightarrow{AB}$ si $\overline{CB} \cong \overline{BD}$ y que $\widehat{CD}$ es bisecado por $\overleftrightarrow{AE}$ si $\widehat{CE} \cong \widehat{ED}$.

TEOREMA 6.3.2

Si se dibuja una recta que pase por el centro de un círculo y que biseca una cuerda distinta del diámetro, entonces es perpendicular a la cuerda.

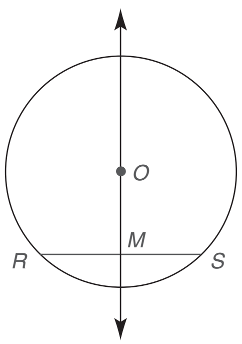


Figura 6.38

DADO: Círculo O; $\overleftrightarrow{OM}$ es el bisector de la cuerda $\overline{RS}$. (Vea la figura 6.38.)

DEMUESTRE: $\overleftrightarrow{OM} \perp \overline{RS}$

La demostración se deja como ejercicio para el estudiante.

(SUGERENCIA: Trace los radios $\overline{OR}$ y $\overline{OS}$.)

La figura 6.39(a) ilustra el siguiente teorema. Sin embargo, la figura 6.39(b) se usa en la demostración.

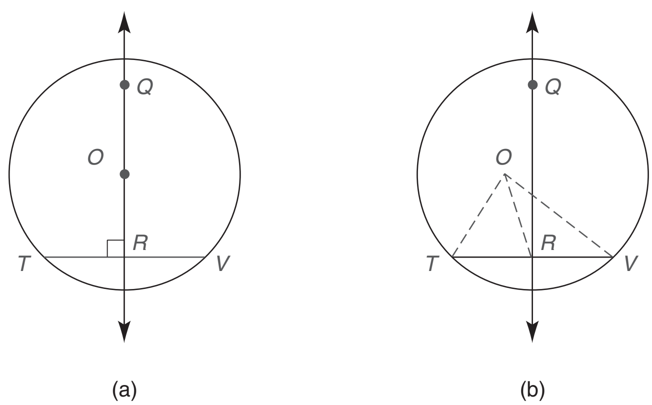


Figura 6.39

TEOREMA 6.3.3

El bisector perpendicular de una cuerda contiene el centro del círculo.

DADO: En la figura 6.39(a) $\overleftrightarrow{QR}$ es el bisector perpendicular de la cuerda $\overline{TV}$ en $\odot O$

DEMUESTRE: $\overleftrightarrow{QR}$ contiene al punto O

DEMOSTRACIÓN (POR EL MÉTODO INDIRECTO): Suponga que O no está en $\overleftrightarrow{QR}$. Trace $\overline{OR}$ y los radios $\overline{OT}$ y $\overline{OV}$. [Vea la figura 6.39(b).] Ya que $\overleftrightarrow{QR}$ es el bisector perpendicular de $\overline{TV}$, R debe ser el punto medio de $\overline{TV}$; entonces $\overline{TR} \cong \overline{RV}$. También $\overline{OT} \cong \overline{OV}$ (todos los radios de un $\odot$ son $\cong$). Con $\overline{OR} \cong \overline{OR}$ por identidad, se tiene $\triangle ORT \cong \triangle ORV$ por LLL.

Ahora $\angle ORT \cong \angle ORV$ por PCTCC. Se tiene que $\overline{OR} \perp \overline{TV}$ ya que estos segmentos de recta coinciden para formar ángulos adyacentes congruentes.

Entonces $\overline{OR}$ es el bisector perpendicular de $\overline{TV}$. Pero $\overleftrightarrow{QR}$ es también el bisector perpendicular de $\overline{TV}$, lo que contradice la unicidad del bisector perpendicular de un segmento.

Por tanto la suposición debe ser falsa y se deduce que el centro O está en $\overleftrightarrow{QR}$, el bisector perpendicular de la cuerda $\overline{TV}$. ■

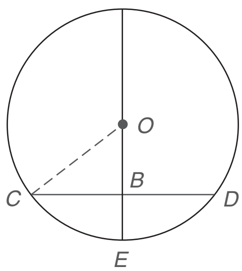


Figura 6.40

EJEMPLO 1

DADO: En la figura 6.40, $\odot O$ tiene un radio de longitud 5
$\overline{OE} \perp \overline{CD}$ en B y $OB = 3$

ENCUENTRE: CD

Solución Trace el radio $\overline{OC}$. Por el teorema de Pitágoras,

$$
\begin{aligned}
(OC)^2 &= (OB)^2 + (BC)^2 \\
5^2 &= 3^2 + (BC)^2 \\
25 &= 9 + (BC)^2 \\
(BC)^2 &= 16 \\
BC &= 4
\end{aligned}
$$

De acuerdo con el teorema 6.3.1, se sabe que $CD = 2 \cdot BC$; entonces se tiene que $CD = 2 \cdot 4 = 8$. ■

CÍRCULOS QUE SON TANGENTES

En esta sección suponemos que dos círculos son coplanares. Aunque los círculos concéntricos no se intersecan comparten un centro común. Para los círculos concéntricos que se muestran en la figura 6.41, la tangente del círculo más pequeño es una cuerda del círculo mayor.

Si dos círculos se tocan en un punto, son **círculos tangentes**. En la figura 6.42 los círculos P y Q son **tangentes internamente**, mientras los círculos O y R son **tangentes externamente**.

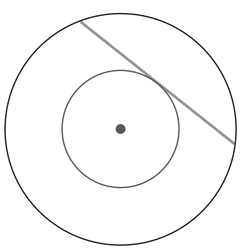


Figura 6.41

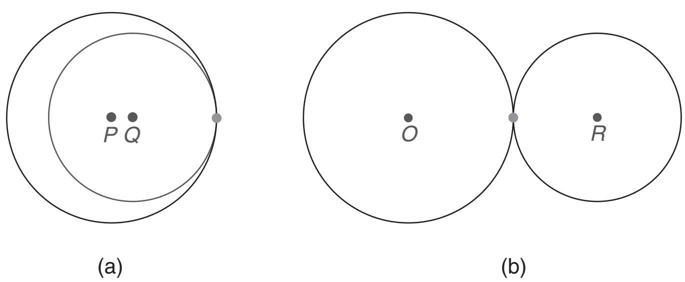


Figura 6.42

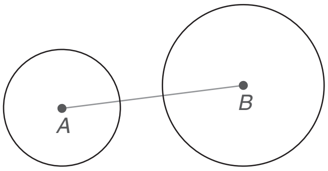
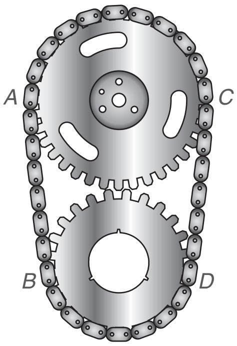


Figura 6.43

Geometría en el mundo real



Las partes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de la banda de cadena representan las tangentes externas comunes a los engranajes circulares.

GÉE
Ejercicios 5-6

DEFINICIÓN

Para dos círculos con centros distintos, la **recta de centros** es la recta (o segmento de recta) que contiene los centros de ambos círculos.

Como sugiere la definición, al segmento de recta que une los centros de dos círculos también se le llama comúnmente recta de centros de los dos círculos. En la figura 6.43, $\overleftrightarrow{AB}$ o $\overline{AB}$ es la recta de centros para los círculos A y B.

RECTAS TANGENTES COMUNES A CÍRCULOS

Un segmento de recta que es tangente a cada uno de dos círculos es una **tangente común** para estos círculos. Si la tangente común *no* interseca la recta de centros, es una **tangente externa común**. En la figura 6.44 los círculos P y Q tienen una tangente externa común, $\overleftrightarrow{ST}$; los círculos A y B tienen dos tangentes externas comunes, $\overleftrightarrow{WX}$ y $\overleftrightarrow{YZ}$.

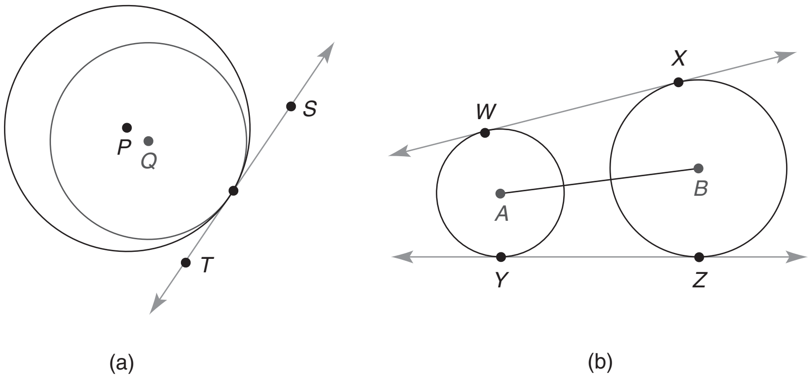


Figura 6.44

Si la tangente común *sí* interseca la recta de los centros para dos círculos, es una **tangente interna común** para los dos círculos. En la figura 6.45, $\overleftrightarrow{DE}$ es una tangente interna común para los círculos tangentes externamente O y R; $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son las tangentes internas comunes para $\odot M$ y $\odot N$.

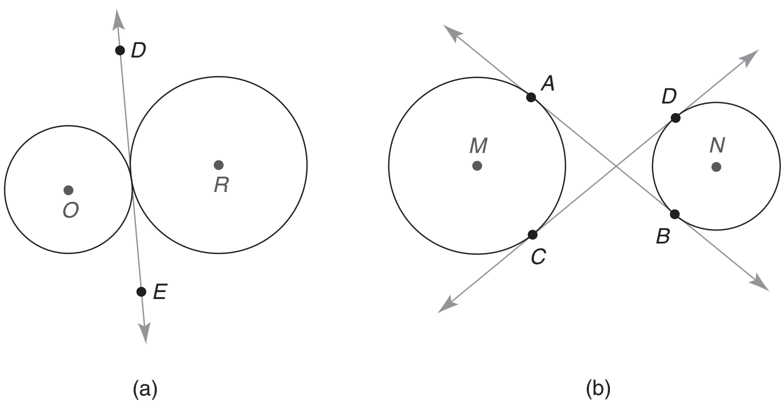


Figura 6.45

Descubra

Mida las longitudes de los segmentos tangentes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de la figura 6.46. ¿Cómo se comparan AB y AC entre sí?

RESPUESTA

Son iguales

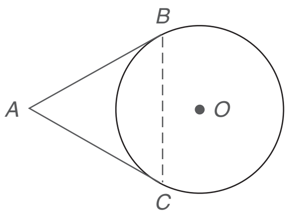


Figura 6.46

Descubra

Coloque tres monedas del mismo tamaño juntas, de tal manera que todas se toquen entre sí. ¿Qué tipo de triángulo se forma al unir sus centros?

RESPUESTA

Equilátero o equiángulo

TEOREMA 6.3.4

Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto externo son congruentes.

DADO: En la figura 6.46, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son tangentes a $\odot O$ desde el punto A

DEMUESTRE: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

DEMOSTRACIÓN: Trace $\overline{BC}$. Ahora $m\angle B = \frac{1}{2}m\widehat{BC}$ y $m\angle C = \frac{1}{2}m\widehat{BC}$. Entonces $\angle B \cong \angle C$ ya que esos ángulos tienen igual medida. A su vez, los lados opuestos a $\angle B$ y $\angle C$ del $\triangle ABC$ son congruentes. Esto es $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. ■

Se aplica el teorema 6.3.4 en los ejemplos 2 y 3.

EJEMPLO 2

Una banda que se utiliza en un motor de automóvil se enrolla alrededor de dos poleas con diferentes longitudes de radios. Explique por qué las piezas rectas llamadas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tienen la misma longitud.

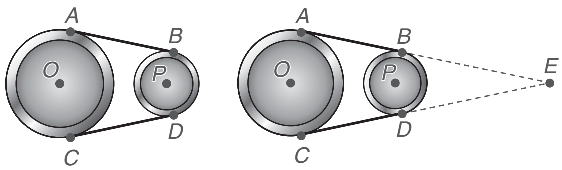


Figura 6.47

Solución Ya que la polea centrada en O tiene el radio de mayor longitud, se extienden $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ para converger en el punto E. Ya que E es un punto externo tanto para $\odot O$ como para $\odot P$, se sabe que $EB = ED$ y $EA = EC$ por el teorema 6.3.4. Sustrayendo iguales de iguales, $EA - EB = EC - ED$. Ya que $EA - EB = AB$ y $EC - ED = CD$, se tiene que $AB = CD$. ■

EJEMPLO 3

El círculo que se muestra en la figura 6.48 está inscrito en $\triangle ABC$; $AB = 9$, $BC = 8$ y $AC = 7$. Encuentre las longitudes de AM, MB y NC.

Solución Ya que los segmentos tangentes de un punto externo son $\cong$, se puede establecer

$$\begin{aligned} AM &= AP = x \\ BM &= BN = y \\ NC &= CP = z \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} x + y &= 9 && (\text{de } AB = 9) \\ y + z &= 8 && (\text{de } BC = 8) \\ x + z &= 7 && (\text{de } AC = 7) \end{aligned}$$

Sustrayendo la segunda ecuación de la primera se tiene

$$\begin{array}{r} x + y \phantom{{}- z} = 9 \\ y + z = 8 \\ \hline x \phantom{{}+ y} - z = 1 \end{array}$$

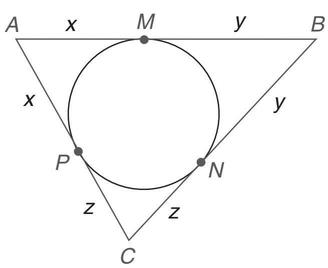


Figura 6.48

Ahora use esta nueva ecuación junto con la tercera ecuación en la página anterior y sume:

$$\begin{aligned} x - z &= 1 \\ \underline{x + z} &\underline{= 7} \\ 2x &= 8 \rightarrow x = 4 \rightarrow AM = 4 \end{aligned}$$

GEE
Ejercicios 7-10

Ya que $x = 4$ y $x + y = 9$, $y = 5$. Entonces $BM = 5$. Ya que $x = 4$ y $x + z = 7$, $z = 3$, así que $NC = 3$. Resumiendo, $AM = 4$, $BM = 5$ y $NC = 3$. ■

LONGITUDES DE LOS SEGMENTOS EN UN CÍRCULO

Para completar esta sección considere tres relaciones que implican las longitudes de las cuerdas, las secantes y las tangentes. Se comprueba el primer teorema, pero las demostraciones de los teoremas restantes se dejan como ejercicios para el estudiante.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Demostración de los teoremas de longitudes de segmentos en el círculo

Regla general: Con la ayuda de rectas auxiliares, los teoremas 6.3.5, 6.3.6 y 6.3.7 se pueden demostrar estableciendo triángulos semejantes, seguidos por el uso de LCTSP y la propiedad de los medios-extremos.

Ilustración: En la demostración del teorema 6.3.5, el trazo de cuerdas auxiliares conduce a los triángulos semejantes RTV y QSV.

Recuerde

AA es el método que se utiliza para demostrar la semejanza de triángulos en esta sección.

TEOREMA 6.3.5

Si dos cuerdas se intersecan dentro de un círculo, entonces el producto de las longitudes de los segmentos (partes) de una cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos de la otra cuerda.

Exploración tecnológica

Utilice software de cómputo si dispone de él.

1. Trace un círculo con cuerdas $\overline{HJ}$ y $\overline{LM}$ que se intersequen en el punto P. (Vea la figura 6.50.)
2. Mida $\overline{MP}$, $\overline{PL}$, $\overline{HP}$ y $\overline{PJ}$.
3. Demuestre que $MP \cdot PL = HP \cdot PJ$. (Las respuestas no son "perfectas".)

DADO: Círculo O con cuerdas $\overline{RS}$ y $\overline{TQ}$ que se intersecan en el punto V. (Vea la figura 6.49.)

DEMUESTRE: $RV \cdot VS = TV \cdot VQ$

DEMOSTRACIÓN: Trace $\overline{RT}$ y $\overline{QS}$. En $\triangle RTV$ y $\triangle QSV$, se tiene $\angle 1 \cong \angle 2$ ($\angle s$ verticales). Además, $\angle R$ y $\angle Q$ son ángulos inscritos que intersecan el mismo arco (a saber $\overset{\frown}{TS}$), por lo que $\angle R \cong \angle Q$. Por AA, $\triangle RTV \sim \triangle QSV$. Utilizando LCTSP, se tiene $\frac{RV}{VQ} = \frac{TV}{VS}$ y por eso $RV \cdot VS = TV \cdot VQ$. ■

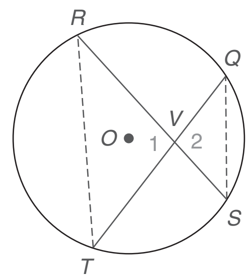


Figura 6.49

EJEMPLO 4

En la figura 6.50, $HP = 4$, $PJ = 5$ y $LP = 8$. Encuentre PM.

Solución Aplicando el teorema 6.3.5, se tiene $HP \cdot PJ = LP \cdot PM$. Entonces

$$\begin{aligned} 4 \cdot 5 &= 8 \cdot PM \\ 8 \cdot PM &= 20 \\ PM &= 2.5 \end{aligned}$$

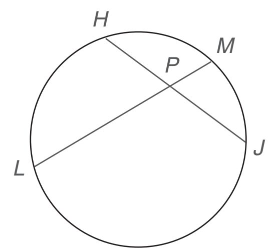


Figura 6.50 ■

EJEMPLO 5

En la figura 6.50 en la página 304, $HP = 6$, $PJ = 4$ y $LM = 11$. Encuentre LP y PM.

Solución Ya que $LP + PM = LM$, se tiene que $PM = LM - LP$. Si $LM = 11$ y $LP = x$, entonces $PM = 11 - x$. Ahora $HP \cdot PJ = LP \cdot PM$ será

$$\begin{aligned} 6 \cdot 4 &= x(11 - x) \\ 24 &= 11x - x^2 \\ x^2 - 11x + 24 &= 0 \\ (x - 3)(x - 8) &= 0, \text{ así } x - 3 = 0 \text{ o } x - 8 = 0 \\ x &= 3 \quad \text{o} \quad x = 8 \end{aligned}$$

Por tanto, $LP = 3$ o $LP = 8$

Si $LP = 3$, entonces $PM = 8$; de forma recíproca, si $LP = 8$, entonces $PM = 3$. Es decir, los segmentos de cuerda $\overline{LM}$ tienen longitudes de 3 y 8. ■

Ejercicios 11-13

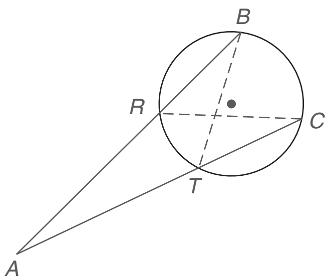


Figura 6.51

En la figura 6.51 se dice que la secante $\overline{AB}$ tiene segmento (parte) interno $\overline{RB}$ y segmento (parte) externo $\overline{AR}$.

TEOREMA 6.3.6

Si se trazan dos segmentos secantes hasta un círculo desde un punto externo, entonces los productos de las longitudes de cada secante y su segmento externo son iguales.

DADO: Secantes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ para el círculo de la figura 6.51

DEMUESTRE: $AB \cdot RA = AC \cdot TA$

La demostración se deja como ejercicio 46 para el estudiante.

(SUGERENCIA: Primero use las rectas auxiliares que se muestran para demostrar que $\triangle ABT \sim \triangle ACR$.)

EJEMPLO 6

DADO: En la figura 6.51, $AB = 14$, $BR = 5$ y $TC = 5$

ENCUENTRE: AC y TA

Solución Sea $AC = x$. Ya que $AT + TC = AC$, se tiene que $AT + 5 = x$, de manera que $TA = x - 5$. Si $AB = 14$ y $BR = 5$, entonces $AR = 9$. El enunciado $AB \cdot RA = AC \cdot TA$ será

$$\begin{aligned} 14 \cdot 9 &= x(x - 5) \\ 126 &= x^2 - 5x \\ x^2 - 5x - 126 &= 0 \\ (x - 14)(x + 9) &= 0, \text{ así, } x - 14 = 0 \text{ o } x + 9 = 0 \\ x = 14 \text{ o } x &= -9 \end{aligned}$$

($x = -9$ se descarta porque la longitud de $\overline{AC}$ no puede ser negativa.)

Por tanto, $AC = 14$, de manera que $TA = 9$. ■

TEOREMA 6.3.7

Si un segmento tangente y un segmento secante se trazan hasta un círculo desde un punto externo, entonces el cuadrado de la longitud de la tangente es igual al producto de la longitud de la secante y la longitud de su segmento externo.

DADO: Tangente $\overline{TV}$ y secante $\overline{TW}$ en la figura 6.52.

DEMUESTRE: $(TV)^2 = TW \cdot TX$

La demostración se deja como ejercicio 47 para el estudiante.

(SUGERENCIA: Use las rectas auxiliares que se muestran para demostrar que $\triangle TVW \sim \triangle TXV$.)

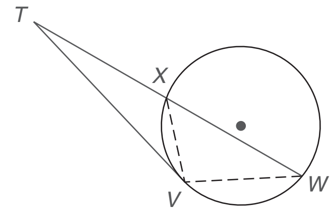


Figura 6.52

EJEMPLO 7

DADO: En la figura 6.53, $SV = 3$ y $VR = 9$

ENCUENTRE: ST

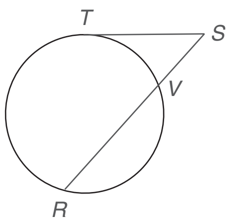


Figura 6.53

Solución Si $SV = 3$ y $VR = 9$, entonces $SR = 12$. Usando el teorema 6.3.7 se encuentra que

$$\begin{aligned}(ST)^2 &= SR \cdot SV\\ (ST)^2 &= 12 \cdot 3\\ (ST)^2 &= 36\\ ST &= 6 \text{ o } -6\end{aligned}$$

GEE *Ejercicios 14-17*

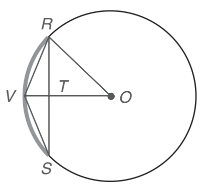
Ya que ST no puede ser negativa, $ST = 6$. ■

Ejercicios 6.3

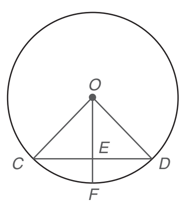
1. *Dado:* $\odot O$ con $\overline{OE} \perp \overline{CD}$, $CD = OC$
Encuentre: $m\overset{\frown}{CF}$

2. *Dado:* $OC = 8$ y $OE = 6$, $\overline{OE} \perp \overline{CD}$ en $\odot O$
Encuentre: CD

3. *Dado:* $\overline{OV} \perp \overline{RS}$ en $\odot O$, $OV = 9$ y $OT = 6$
Encuentre: RS



Ejercicios 3, 4



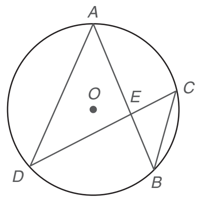
Ejercicios 1, 2

4. Dado: V es el punto medio de $\overset{\frown}{RS}$ en $\odot O$, $m\angle S = 15°$ y $OT = 6$
Encuentre: OR

5. Trace dos círculos que tengan:
a) Ninguna tangente común
b) Exactamente una tangente común
c) Exactamente dos tangentes comunes
d) Exactamente tres tangentes comunes
e) Exactamente cuatro tangentes comunes

6. Dos círculos que se intersecan congruentemente B y D (que no se muestran) tienen una recta (segmento) de centros $\overline{BD}$ y una cuerda común $\overline{AC}$ que son congruentes. Explique por qué el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado.

En la figura para los ejercicios 7 al 16, O es el centro del círculo. Vea el teorema 6.3.5.



Ejercicios 7-16

7. *Dado:* $AE = 6$, $EB = 4$, $DE = 8$
Encuentre: EC

8. *Dado:* $DE = 12$, $EC = 5$, $AE = 8$
Encuentre: EB

9. *Dado:* $AE = 8$, $EB = 6$, $DC = 16$
Encuentre: DE y EC

10. *Dado:* $AE = 7$, $EB = 5$, $DC = 12$
Encuentre: DE y EC

11. *Dado:* $AE = 6$, $EC = 3$, $AD = 8$
Encuentre: CB

12. *Dado:* $AD = 10$, $BC = 4$, $AE = 7$
Encuentre: EC

13. *Dado:* $AE = \frac{x}{2}$, $EB = 12$, $DE = \frac{x + 6}{3}$ y $EC = 9$
Encuentre: x y AE

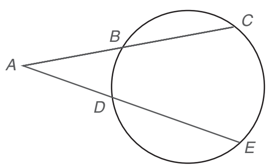
14. *Dado:* $AE = \frac{x}{2}$, $EB = \frac{x}{3}$, $DE = \frac{5x}{6}$ y $EC = 6$
Encuentre: x y DE

15. *Dado:* $AE = 9$ y $EB = 8$; $DE{:}EC = 2{:}1$
Encuentre: DE y EC

16. *Dado:* $AE = 6$ y $EB = 4$; $DE{:}EC = 3{:}1$
Encuentre: DE y EC

Para los ejercicios 17 al 20, vea el teorema 6.3.6.

17. *Dado:* $AB = 6$, $BC = 8$, $AE = 15$
Encuentre: DE



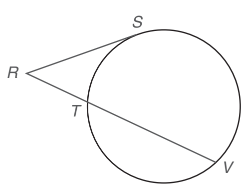
Ejercicios 17-20

18. *Dado:* $AC = 12$, $AB = 6$, $AE = 14$
Encuentre: AD

19. *Dado:* $AB = 4$, $BC = 5$, $AD = 3$
Encuentre: DE

20. *Dado:* $AB = 5$, $BC = 6$, $AD = 6$
Encuentre: AE

En la figura para los ejercicios 21 al 24, $\overline{RS}$ es tangente al círculo en S. Vea el teorema 6.3.7.



Ejercicios 21-24

21. *Dado:* $RS = 8$ y $RV = 12$
Encuentre: RT

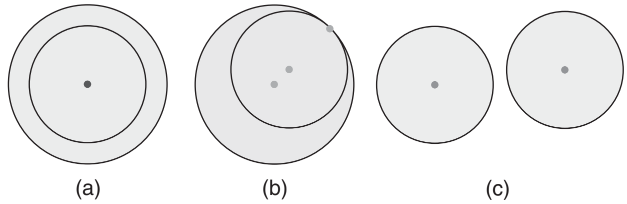
22. *Dado:* $RT = 4$ y $TV = 6$
Encuentre: RS

23. *Dado:* $\overline{RS} \cong \overline{TV}$ y $RT = 6$
Encuentre: RS

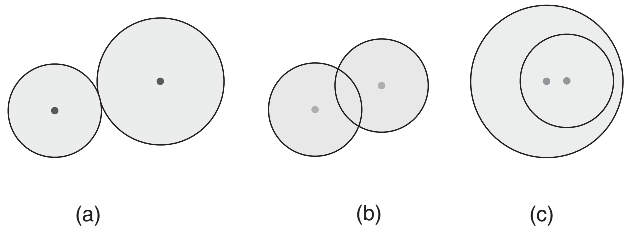
(SUGERENCIA: Use la fórmula cuadrática.)

24. *Dado:* $RT = \frac{1}{2} \cdot RS$ y $TV = 9$
Encuentre: RT

25. Para los dos círculos en las figuras (a), (b) y (c), encuentre el número total de tangentes comunes (internas y externas).

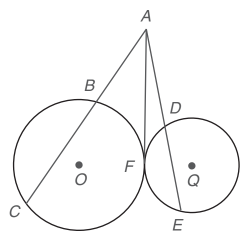


26. Para los dos círculos en las figuras (a), (b) y (c), encuentre el número total de tangentes común (internas y externas).

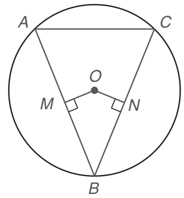


En los ejercicios 27 al 30 proporcione una demostración en párrafo.

27. *Dado:* $\odot O$ y $\odot Q$ son tangentes al punto F
Secante $\overline{AC}$ a $\odot O$
Secante $\overline{AE}$ a $\odot Q$
Tangente interna común $\overline{AF}$
Demuestre: $AC \cdot AB = AE \cdot AD$

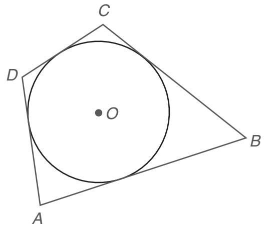


28. *Dado:* $\odot O$ con $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{ON} \perp \overline{BC}$
$\overline{OM} \cong \overline{ON}$
Demuestre: $\triangle ABC$ es isósceles



29. *Dado*: Cuadrilátero $ABCD$ circunscrito alrededor de $\odot O$

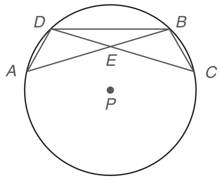
Demuestre: $AB + CD = DA + BC$



30. *Dado*: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ en $\odot P$

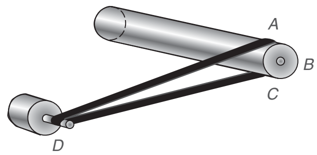
Demuestre: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$

31. ¿Se deduce del ejercicio 30 que el $\triangle ADE$ también es congruente con el $\triangle CBE$? ¿Qué puede concluir acerca de $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$ en el esquema? ¿Qué puede concluir acerca de $\overline{DE}$ y $\overline{EB}$?

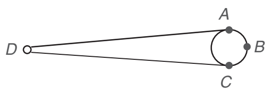


Ejercicios 30, 31

32. En $\odot O$ (que no se muestra), $\overline{RS}$ es un diámetro y T es el punto medio del semicírculo $\widehat{RTS}$. ¿Cuál es el valor de la relación proporcional $\frac{RT}{RS}$? ¿Y de la relación proporcional $\frac{RT}{RO}$?



33. El cepillo cilíndrico en una aspiradora es accionado por un motor eléctrico. En la figura el eje de transmisión está en el punto D. Si m$\widehat{AC}$ = 160°, encuentre la medida del ángulo formado por la banda de transmisión en el punto D; es decir, encuentre m$\angle D$.

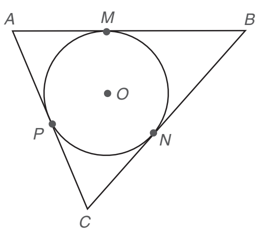


Ejercicios 33, 34

34. El mecanismo de transmisión en una rueda de molino es accionado por un motor eléctrico. En la figura encuentre m$\angle D$ si m$\widehat{ABC}$ es 36° mayor que m$\widehat{AC}$.

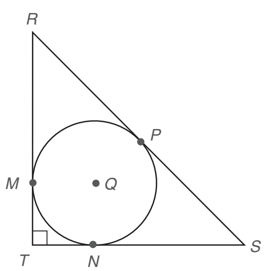
***35.** *Dado*: Tangentes $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ a $\odot O$ en los puntos M, N y P, respectivamente $AB = 14$, $BC = 16$, $AC = 12$

Encuentre: AM, PC y BN



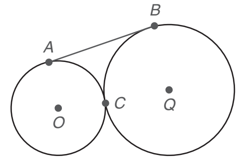
***36.** *Dado:* $\odot Q$ está inscrito en el $\triangle RST$ rectángulo isósceles. El perímetro del $\triangle RST$ es $8 + 4\sqrt{2}$

Encuentre: TM



***37.** *Dado*: $\overline{AB}$ es una tangente externa a $\odot O$ y $\odot Q$ en los puntos A y B; las longitudes para los radios de $\odot O$ y $\odot Q$ son 4 y 9 respectivamente

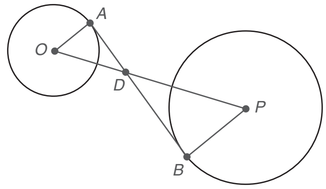
Encuentre: AB



(SUGERENCIA: La recta de los centros $\overline{OQ}$ contiene al punto C, el punto en el que $\odot O$ y $\odot Q$ son tangentes.)

38. El centro de un círculo de 3 pulgadas de radio está a una distancia de 20 pulgadas del centro de un círculo de 9 pulgadas de radio. ¿Cuál es la longitud exacta de la tangente interna común $\overline{AB}$?

(SUGERENCIA: Use triángulos semejantes para encontrar OD y DP. Después aplique el Teorema de Pitágoras dos veces.)

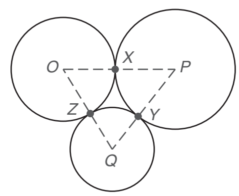


Ejercicios 38, 39

39. El centro de un círculo de 2 pulgadas de radio está a una distancia de 10 pulgadas del centro de un círculo de 3 pulgadas de radio. A la décima más cercana de una pulgada, ¿cuál es la longitud aproximada de una tangente interna común? Use la sugerencia dada en el ejercicio 38.

40. Los círculos O, P y Q son tangentes (como se muestra) en los puntos X, Y y Z. Siendo tan específico como sea posible, explique qué tipo de triángulo es $\triangle PQO$ si:

a) $OX = 2$, $PY = 3$, $QZ = 1$
b) $OX = 2$, $PY = 3$, $QZ = 2$

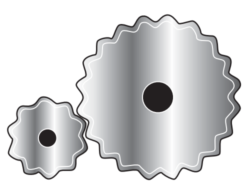


Ejercicios 40, 41

41. Los círculos O, P y Q son tangentes (como se muestra) en los puntos X, Y y Z. Siendo tan específico como sea posible, explique qué tipo de triángulo es $\triangle PQO$ si:

a) $OX = 3$, $PY = 4$, $QZ = 1$
b) $OX = 2$, $PY = 2$, $QZ = 2$

***42.** Si el engranaje más grande tiene 30 dientes y el engranaje más pequeño tiene 18, entonces la proporción de engranaje (mayor a menor) es 5:3. Cuando el engranaje mayor rota un ángulo de 60°, ¿qué medida de ángulo rota el engranaje más pequeño?



Ejercicios 42, 43

***43.** Para el esquema en el ejercicio 42 suponga que el engranaje más grande tiene 20 dientes y el engranaje más pequeño tiene 10 (proporción de engranaje 2:1). Si el engranaje más pequeño rota un ángulo de 90°, ¿qué medida de ángulo rota el engranaje más grande?

En los ejercicios 44 al 47 demuestre el teorema establecido.

44. Si se traza una recta que pase por el centro de un círculo perpendicular a una cuerda, entonces biseca la cuerda y su arco menor. Vea la figura 6.37.

(**NOTA:** El arco mayor está también bisecado por la recta.)

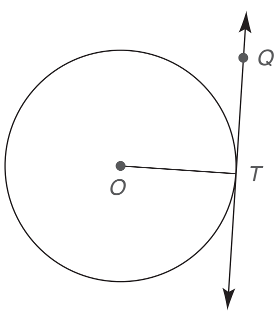
45. Si se traza una recta que pase por el centro de un círculo al punto medio de una cuerda que no sea un diámetro, entonces ésta es perpendicular a la cuerda. Vea la figura 6.38.

46. Si se trazan dos segmentos secantes en un círculo desde un punto externo, entonces, los productos de las longitudes de cada secante con su segmento externo son iguales. Vea la figura 6.51.

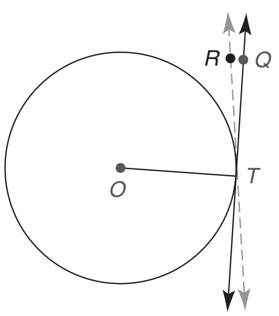
47. Si se traza un segmento tangente y un segmento secante en un círculo desde un punto externo, entonces el cuadrado de la longitud de la tangente es igual al producto de la longitud de la secante con la longitud de su segmento externo. Vea la figura 6.52.

6.4 Algunas construcciones y desigualdades para el círculo

CONCEPTOS CLAVE Construcción de tangentes a un círculo — Desigualdades en el círculo



(a)



(b)

Figura 6.54

En la sección 6.3 se demostró que el radio trazado hasta una tangente en el punto de contacto es perpendicular a la tangente en ese punto. Ahora se demuestra, utilizando una demostración indirecta, que es el recíproco de ese teorema que también es verdadero. Recuerde que sólo hay una recta perpendicular a una recta dada en un punto sobre esa recta.

TEOREMA 6.4.1

La recta que es perpendicular al radio de un círculo en su punto extremo en el círculo es una tangente al círculo.

DADO: En la figura 6.54(a), $\odot O$ con radio $\overline{OT}$
$\overleftrightarrow{QT} \perp \overline{OT}$

DEMUESTRE: $\overleftrightarrow{QT}$ es una tangente a $\odot O$ en el punto T.

DEMOSTRACIÓN: Suponga que $\overleftrightarrow{QT}$ no es una tangente a $\odot O$ en T. Entonces la tangente (llámese $\overleftrightarrow{RT}$) se puede trazar en T, el punto de tangencia. [Vea la figura 6.54(b).]

Ahora $\overline{OT}$ es el radio a la tangente $\overleftrightarrow{RT}$ en T, y ya que un radio trazado hasta una tangente en el punto de contacto de la tangente es perpendicular a la tangente, $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{RT}$. Pero $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{QT}$ por hipótesis. Por tanto dos rectas son perpendiculares a $\overline{OT}$ en el punto T, lo que contradice el hecho de que sólo hay una recta perpendicular a una recta en un punto en esa recta. Por tanto $\overleftrightarrow{QT}$ debe ser tangente a $\odot O$ en el punto T.

CONSTRUCCIONES DE TANGENTES A CÍRCULOS

Construcción 8 *Para construir una tangente a un círculo en un punto en el círculo.*

PLAN: La estrategia que se utiliza en la construcción 8 se basa en el teorema 6.4.1. Se trazará un radio (extendido más allá del círculo). En el punto en el círculo (punto X en la figura 6.55(a)) se construye la recta perpendicular a $\overline{PX}$. La recta construida [$\overleftrightarrow{WX}$ en la figura 6.55(c)] es tangente al círculo P en el punto X.

DADO: $\odot P$ con punto X en el círculo [vea la figura 6.55(a)].

CONSTRUYA: Una tangente $\overleftrightarrow{XW}$ hasta $\odot P$ en el punto X

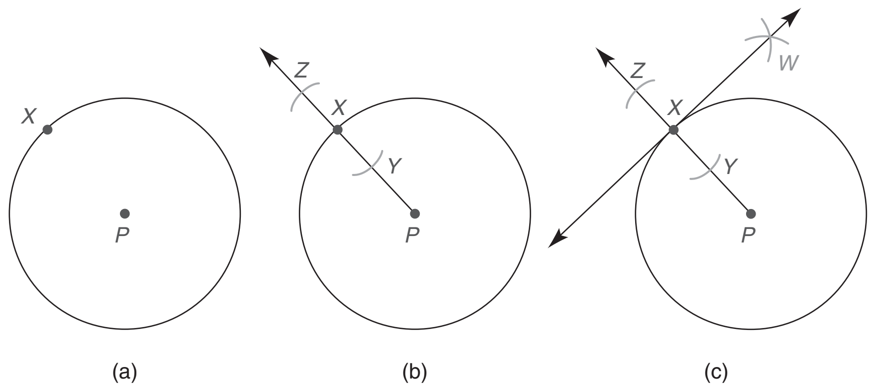


Figura 6.55

CONSTRUCCIÓN: Figura 6.55(a): Considere $\odot P$ y el punto X en $\odot P$.
Figura 6.55(b): Trace el radio $\overline{PX}$ y extiéndalo para formar $\overrightarrow{PX}$. Utilice X como el centro y cualquier longitud de radio menor que XP, trace dos arcos para intersecar a $\overrightarrow{PX}$ en los puntos Y y Z.

Figura 6.55(c): Complete la construcción de la perpendicular a $\overrightarrow{PX}$ en el punto X. Desde Y y Z marque arcos con radios de igual longitud mayores que XY. Llame al punto de intersección W, trace $\overleftrightarrow{XW}$, la tangente deseada a $\odot P$ en el punto X.

EJEMPLO 1

Haga un esquema de tal manera que los puntos A, B, C y D estén en $\odot O$ en ese orden. Si se construyen tangentes en los puntos A, B, C y D, ¿qué tipo de cuadrilátero se formará por los segmentos tangentes si

a) $m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$ y $m\widehat{BC} = m\widehat{AD}$?
b) ¿Son congruentes todos los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ y $\widehat{DA}$?

Solución

a) Un rombo (todos los lados son congruentes)
b) Un cuadrado (los cuatro $\angle$s son $\angle$s rectos; todos los lados son $\cong$)

Ahora se considera una construcción más difícil. ■

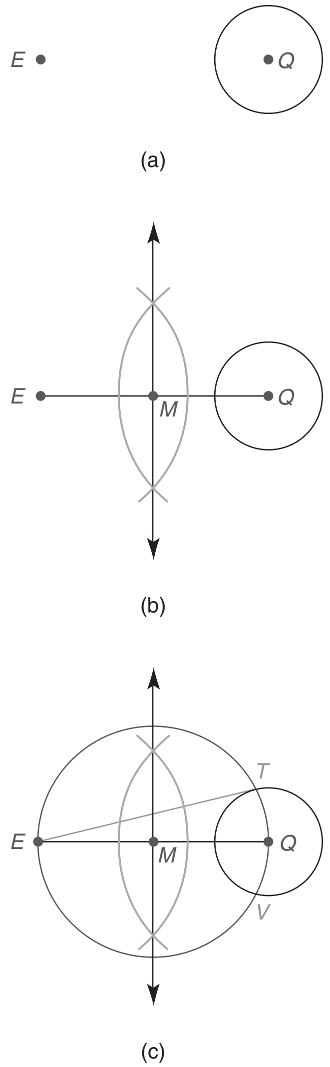


Figura 6.56

Construcción 9 *Para construir una tangente a un círculo de un punto externo.*

DADO: $\odot Q$ y el punto externo E. [Vea la figura 6.56(a).]

CONSTRUYA: Una tangente $\overline{ET}$ a $\odot Q$ con T como el punto de tangencia.

CONSTRUCCIÓN: Figura 6.56(a): Considere $\odot Q$ y un punto externo
Figura 6.56(b): Trace $\overline{EQ}$. Construya el bisector perpendicular de $\overline{EQ}$, para intersecar a $\overline{EQ}$ en su punto medio M.

Figura 6.56(c): Con M como centro y MQ (o ME) como la longitud del radio, construya un círculo. Los puntos de intersección del círculo M con el círculo Q están designados por T y V. Ahora trace $\overline{ET}$, la tangente deseada.

NOTA: Si traza $\overline{EV}$ también sería una tangente a $\odot Q$.

En la construcción anterior, $\overline{QT}$ (que no se muestra) es un radio del círculo más pequeño Q. En el círculo más grande M, $\angle ETQ$ es un ángulo inscrito que interseca un semicírculo. Por tanto $\angle ETQ$ es un ángulo recto y $\overline{ET} \perp \overline{TQ}$. Ya que la recta trazada de manera perpendicular al radio de un círculo en su punto extremo sobre el círculo es una tangente al círculo, $\overline{ET}$ es una tangente al círculo Q.

DESIGUALDADES EN EL CÍRCULO

Los teoremas restantes implican desigualdades en el círculo.

TEOREMA 6.4.2

En un círculo (o en círculos congruentes) que contiene dos ángulos centrales distintos, el ángulo más grande corresponde al arco intersecado más grande.

DADO: $\odot O$ con ángulos centrales $\angle 1$ y $\angle 2$ en la figura 6.57; $m\angle 1 > m\angle 2$

DEMUESTRE: $m\overset{\frown}{AB} > m\overset{\frown}{CD}$

DEMOSTRACIÓN: En $\odot O$, $m\angle 1 > m\angle 2$. Por el postulado del ángulo central, $m\angle 1 = m\overset{\frown}{AB}$ y $m\angle 2 = m\overset{\frown}{CD}$. Por sustitución, $m\overset{\frown}{AB} > m\overset{\frown}{CD}$.

GEE
Ejercicios 1-3

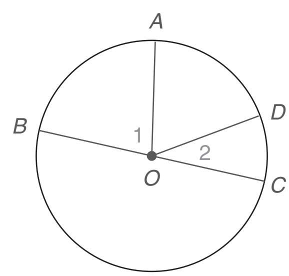


Figura 6.57

El recíproco del teorema 6.4.2 que se muestra a continuación también es fácilmente demostrable.

TEOREMA 6.4.3

En un círculo (o en círculos congruentes) que contiene dos arcos distintos, el arco más grande corresponde al ángulo central más grande.

DADO: En la figura 6.57, $\odot O$ con $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ $m\overset{\frown}{AB} > m\overset{\frown}{CD}$.

DEMUESTRE: $m\angle 1 > m\angle 2$

La demostración se deja como ejercicio para el estudiante.

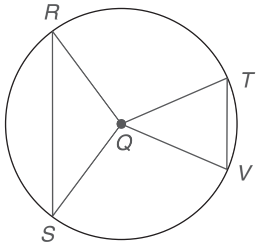


Figura 6.58

Descubra

En la figura 6.59 $\overline{PT}$ mida la distancia del centro P a la cuerda $\overline{EF}$. De manera similar, $\overline{PR}$ mide la distancia desde P hasta la cuerda $\overline{AB}$. Use una regla para demostrar que $PR > PT$. ¿Cómo se comparan las longitudes de las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$?

RESPUESTA

$AB < EF$

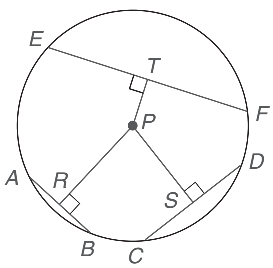


Figura 6.59

EJEMPLO 2

DADO: En la figura 6.58, $\odot Q$ con $m\widehat{RS} > m\widehat{TV}$.

a) Usando el teorema 6.4.3, ¿qué puede concluir respecto a las medidas de $\angle RQS$ y $\angle TQV$?
b) ¿Qué le sugiere la intuición con respecto a RS y TV?

Solución

a) $m\angle RQS > m\angle TQV$
b) $RS > TV$ ■

Antes de que se aplique el teorema 6.4.4 y se demuestre el teorema 6.4.5, considere la actividad Descubra de la izquierda. La demostración del teorema 6.4.4 no se proporciona, pero es similar a la del teorema 6.4.5.

TEOREMA 6.4.4

En un círculo (o en círculos congruentes) que contiene dos cuerdas distintas, la cuerda más corta está a la distancia más grande desde el centro del círculo.

EJEMPLO 3

En el círculo P de la figura 6.59 cualquier radio tiene una longitud de 6 cm y las cuerdas tienen longitudes $AB = 4$ cm, $DC = 6$ cm y $EF = 10$ cm. Sea que $\overline{PR}$, $\overline{PS}$ y $\overline{PT}$ nombre los segmentos perpendiculares a estas cuerdas desde el centro P.

a) De $\overline{PR}$, $\overline{PS}$ y $\overline{PT}$, ¿cuál es el más largo?
b) De $\overline{PR}$, $\overline{PS}$ y $\overline{PT}$, ¿cuál es el más corto?

Solución

a) $\overline{PR}$ es el más largo, de acuerdo con el teorema 6.4.4.
b) $\overline{PT}$ es el más corto. ■

En la demostración del teorema 6.4.5, los números positivos a y b representan las longitudes de los segmentos de recta. Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$; el recíproco también es verdadero.

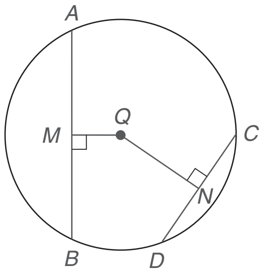
TEOREMA 6.4.5

En un círculo (o en círculos congruentes) que contiene dos cuerdas distintas, la cuerda más cercana al centro del círculo tiene la mayor longitud.

DADO: En la figura 6.60(a) $\odot Q$ con cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$
$\overline{QM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{QN} \perp \overline{CD}$
$QM < QN$

DEMUESTRE: $AB > CD$

DEMOSTRACIÓN: En la figura 6.60(b) se representan las longitudes de $\overline{QM}$ y $\overline{QN}$ con a y c, respectivamente. Trace los radios $\overline{QA}$, $\overline{QB}$, $\overline{QC}$ y $\overline{QD}$, y denote todas las longitudes como r. $\overline{QM}$ es el bisector perpendicular de $\overline{AB}$ y $\overline{QN}$ es el bisector perpendicular de $\overline{CD}$, ya que un radio perpendicular a una cuerda biseca la cuerda y su arco. Sea $MB = b$ y $NC = d$.

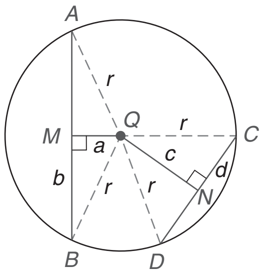


(a)

Ejercicios 4-9

Con ángulos rectos en M y N se observa que $\triangle QMB$ y $\triangle QNC$ son triángulos rectángulos.

De acuerdo con el teorema de Pitágoras, $r^2 = a^2 + b^2$ y $r^2 = c^2 + d^2$, de manera que $b^2 = r^2 - a^2$ y $d^2 = r^2 - c^2$. Si $QM < QN$, entonces $a < c$ y $a^2 < c^2$. Multiplicando por -1 se invierte el orden de esta desigualdad; por tanto, $-a^2 > -c^2$. Sumando r^2, se tiene $r^2 - a^2 > r^2 - c^2$ *o* $b^2 > d^2$, lo que implica que $b > d$. Si $b > d$, entonces $2b > 2d$. Pero $AB = 2b$ y $CD = 2d$. Por tanto, $AB > CD$. ■



(b)

Figura 6.60

Es importante que se utilice la frase *arco menor* en los últimos teoremas. La demostración del teorema 6.4.6 se deja al estudiante. Para el teorema 6.4.7; se proporciona la demostración porque es más compleja. En cada teorema la cuerda y el arco menor relacionado comparten puntos extremos comunes.

TEOREMA 6.4.6

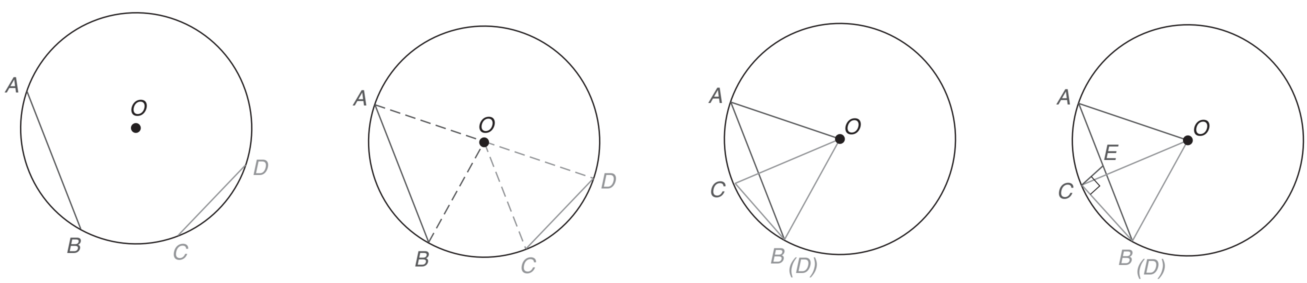
En un círculo (o en círculos congruentes) que contiene dos cuerdas distintas, la cuerda más larga corresponde al arco menor más grande.

Si $AB > CD$ en la figura 6.61, entonces $m\overparen{AB} > m\overparen{CD}$.

TEOREMA 6.4.7

En un círculo (o en círculos congruentes) que contiene dos arcos menores distintos, el arco menor más grande corresponde a la más larga de las cuerdas relacionadas con estos arcos.

DADO: En la figura 6.61(a), $\odot O$ con $m\overparen{AB} > m\overparen{CD}$ y cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$



(a) (b) (c) (d)

Figura 6.61

DEMUESTRE: $AB > CD$

DEMOSTRACIÓN: En el círculo O trace los radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, y $\overline{OD}$. Ya que $m\overparen{AB} > m\overparen{CD}$, se tiene que $m\angle AOB > m\angle COD$ porque el arco más largo en un círculo corresponde a un ángulo central más grande.

En la figura 6.6l(c), se rota $\triangle COD$ hasta la posición en el círculo para la cual D coincide con B. Ya que los radios $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ son congruentes, $\triangle COD$ es isósceles; además $m\angle C = m\angle ODC$.

En $\triangle COD$, $m\angle COD + m\angle C + m\angle CDO = 180°$. Ya que $m\angle COD$ es positivo, se tiene $m\angle C + m\angle CDO < 180°$ y $2 \cdot m\angle C < 180°$ por sustitución. Por tanto, $m\angle C < 90°$.

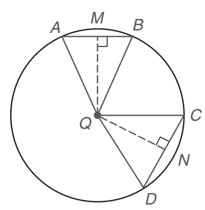
Ahora construya el segmento perpendicular a $\overline{CD}$ en el punto C, como se muestra en la figura 6.61(d). Denote la intersección del segmento perpendicular y $\overline{AB}$ por el punto E. Ya que $\triangle DCE$ es un $\triangle$ rectángulo con hipotenusa $\overline{EB}$, $EB > CD$ (*). Ya que $AB = AE + EB$ y $AE > 0$, se tiene $AB > EB$ (*). Por la propiedad transitiva los enunciados marcados con (*) revelan que $AB > CD$.

GEE
Ejercicios 10-16

NOTA: En la demostración anterior $\overline{CE}$ debe intersecar a $\overline{AB}$ en algún punto entre A y B. Si se intersecaran en A, la medida del $\triangle BCA$ inscrito tendría que ser mayor que 90°; esto se deduce de los hechos de que $\overset{\frown}{AB}$ es un arco menor y de que el arco intersecado para el $\angle BCA$ tendría que ser un arco mayor. ■

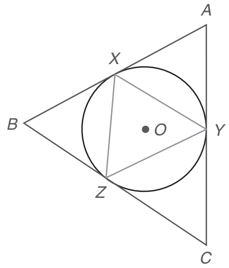
Ejercicios 6.4

En los ejercicios 1 al 8 use la figura dada.

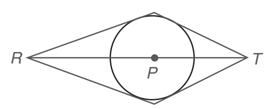


Ejercicios 1-8

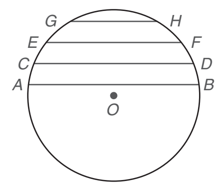
1. Si $m\overset{\frown}{CD} < m\overset{\frown}{AB}$, escriba una desigualdad que compare $m\angle CQD$ y $m\angle AQB$.
2. Si $m\overset{\frown}{CD} < m\overset{\frown}{AB}$, escriba una desigualdad que compare CD y AB.
3. Si $m\overset{\frown}{CD} < m\overset{\frown}{AB}$, escriba una desigualdad que compare QM y QN.
4. Si $m\overset{\frown}{CD} < m\overset{\frown}{AB}$, escriba una desigualdad que compare $m\angle A$ y $m\angle C$.
5. Si $m\angle CQD < m\angle AQB$, escriba una desigualdad que compare a CD con AB.
6. Si $m\angle CQD < m\angle AQB$, escriba una desigualdad que compare a QM con QN.
7. Si $m\overset{\frown}{CD}:m\overset{\frown}{AB} = 3:2$, escriba una desigualdad que compare QM con QN.
8. Si $QN:QM = 5:6$, escriba una desigualdad que compare $m\overset{\frown}{AB}$ con $m\overset{\frown}{CD}$.
9. Construya un círculo O y elija algún punto D en el círculo. Ahora construya la tangente al círculo O en el punto D.
10. Construya un círculo P y elija tres puntos R, S y T en el círculo. Construya el triángulo que tenga sus lados tangentes al círculo en R, S y T.
11. X, Y y Z están en el círculo O de tal manera que $m\overset{\frown}{XY} = 120°$ $m\overset{\frown}{YZ} = 130°$ y $m\overset{\frown}{XZ} = 110°$. Suponga que se traza el triángulo XYZ y que se construye el triángulo ABC con sus lados tangentes al círculo O en X, Y y Z. ¿Son triángulos semejantes $\triangle XYZ$ y $\triangle ABC$?



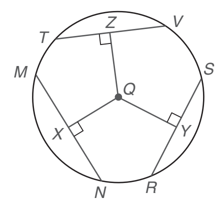
12. Construya los dos segmentos tangentes al círculo P (que no se muestra) desde el punto externo E.
13. El punto V está en el exterior del círculo Q (que no se muestra) de manera que $\overline{VQ}$ es igual en longitud al diámetro del círculo Q. Construya las dos tangentes al círculo Q desde el punto V. Después determine la medida del ángulo que tiene vértice V y tiene a las tangentes como lados.
14. Dado el círculo P y los puntos R-P-T tal que R y T están en el exterior del círculo P, suponga que se construyen tangentes desde R y T para formar un cuadrilátero (como se muestra). Identifique el tipo de cuadrilátero que se forma.
    a) cuando $RP > PT$.
    b) cuando $RP = PT$.



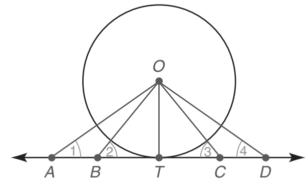
15. Dadas las cuerdas paralelas $\overline{AB}$ $\overline{CD}$ $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ en el círculo O, ¿qué cuerda tiene la longitud mayor? ¿Cuál tiene la longitud menor? ¿Por qué?



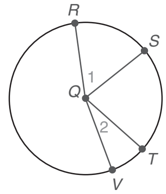
16. Dadas las cuerdas $\overline{MN}$, $\overline{RS}$, y $\overline{TV}$ en $\odot Q$ de manera que $QZ > QY > QX$, ¿qué cuerda tiene la longitud mayor? ¿Cuál tiene la longitud menor? ¿Por qué?



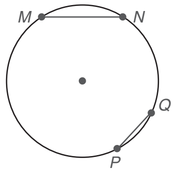
17. Dado el círculo O con radio $\overline{OT}$, tangente $\overleftrightarrow{AD}$ y segmentos de recta $\overline{OA}$ $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, y $\overline{OD}$:
    a) ¿Cuál segmento de recta trazado desde O tiene la longitud menor?
    b) Si $m\angle 1 = 40°$, $m\angle 2 = 50°$, $m\angle 3 = 45°$ y $m\angle 4 = 30°$, ¿cuál segmento de recta desde el punto O tiene la longitud mayor?



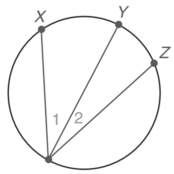
18. a) Si m$\widehat{RS}$ > m$\widehat{TV}$, escriba una desigualdad que compare m$\angle 1$ con m$\angle 2$.
b) Si m$\angle 1$ > m$\angle 2$, escriba una desigualdad que compare m$\widehat{RS}$ con m$\widehat{TV}$.



19. a) Si $MN > PQ$, escriba una desigualdad para comparar las medidas de los arcos menores $\widehat{MN}$ y $\widehat{PQ}$.
b) Si $MN > PQ$, escriba una desigualdad para comparar las medidas de los arcos mayores $\widehat{MPN}$ y $\widehat{PMQ}$.



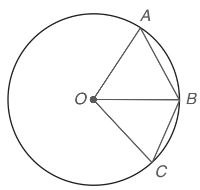
20. a) Si m$\widehat{XY}$ > m$\widehat{YZ}$, escriba una desigualdad que compare las medidas de los ángulos inscritos 1 y 2.
b) Si m$\angle 1$ < m$\angle 2$, escriba una desigualdad que compare las medidas de $\widehat{XY}$ y $\widehat{YZ}$.



21. El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en el círculo P (que no se muestra). Si $\angle A$ es un ángulo agudo, ¿qué tipo de ángulo es $\angle C$?

22. El cuadrilátero $RSTV$ está inscrito en el círculo Q (que no se muestra). Si los arcos $\widehat{RS}$ $\widehat{ST}$ y $\widehat{TV}$ son congruentes, ¿qué tipo de cuadrilátero es $RSTV$?

23. En el círculo O, los puntos A, B y C están en el círculo de manera que m$\widehat{AB}$ = 60° y m$\widehat{BC}$ = 40°.
a) ¿Cómo se relacionan m$\angle AOB$ y m$\angle BOC$?
b) ¿Cómo están relacionados AB y BC?

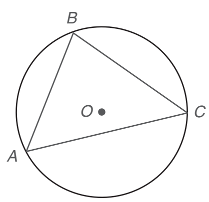


Ejercicios 23-25

24. En $\odot O$, $AB = 6$ cm y $BC = 4$ cm.
a) ¿Cómo se relacionan m$\angle AOB$ y m$\angle BOC$?
b) ¿Cómo se relacionan m$\widehat{AB}$ y m$\widehat{BC}$?

25. En $\odot O$, m$\angle AOB = 70°$ y m$\angle BOC = 30°$. Vea la figura anterior.
a) ¿Cómo se relacionan m$\widehat{AB}$ y m$\widehat{BC}$?
b) ¿Cómo se relacionan AB y BC?

26. El triángulo ABC está inscrito en el círculo O; $AB = 5$, $BC = 6$ y $AC = 7$
a) ¿Cuál es el arco menor más largo de $\odot O$: $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, o $\widehat{AC}$?
b) ¿Cuál lado del triángulo está más cerca del punto O?



Ejercicios 26-29

27. Dado el círculo O con m$\widehat{BC}$ = 120° y m$\widehat{AC}$ = 130°:
a) ¿Cuál ángulo del triángulo ABC es el más pequeño?
b) ¿Cuál lado del triángulo ABC está más cerca del punto O?

28. Dado que m$\widehat{AC}$:m$\widehat{BC}$:m$\widehat{AB}$ = 4:3:2 en el círculo O:
a) ¿Cuál arco es más grande?
b) ¿Cuál cuerda es la más larga?

29. Dado que m$\angle A$:m$\angle B$:m$\angle C$ = 2:4:3 en el círculo O:
a) ¿Cuál ángulo es el más grande?
b) ¿Cuál cuerda es la más larga?
(Nota: vea la figura para el ejercicio 26.)

30. El círculo O tiene un diámetro de 20 cm de longitud. La cuerda $\overline{AB}$ tiene una longitud de 12 cm y la cuerda $\overline{CD}$ tiene 10 cm de longitud, ¿qué tanto está más cerca $\overline{AB}$ que $\overline{CD}$ del punto O?

31. El círculo P tiene un radio de 8 pulg de longitud. Los puntos A, B, C y D se encuentran en el círculo P, de manera que m$\angle APB = 90°$ y m$\angle CPD = 60°$. ¿Qué tanto está más cerca del punto P la cuerda $\overline{AB}$ que $\overline{CD}$?

32. Se construye una tangente $\overline{ET}$ al círculo Q desde el punto externo E. ¿Cuál ángulo y qué lado del triángulo QTE son más grandes? ¿Cuáles ángulos y qué lados son más pequeños?

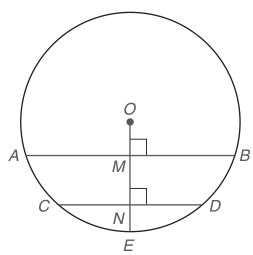
33. Dos círculos congruentes, $\odot O$ y $\odot P$, no se intersecan. Construya una tangente externa común para $\odot O$ y $\odot P$.

34. Explique por qué el siguiente enunciado es incorrecto:
"En un círculo (o círculos congruentes) que contiene dos cuerdas distintas, la cuerda más larga corresponde al arco mayor más grande."

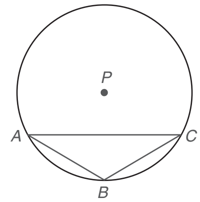
35. Demuestre: En un círculo que contiene dos arcos distintos, el arco más grande corresponde al ángulo central más grande.

36. Demuestre: En un círculo que tiene dos cuerdas distintas, la cuerda más larga corresponde al ángulo central más grande.
(SUGERENCIA: Puede usar cualquier teorema enunciado en esta sección.)

***37.** En $\odot O$, la cuerda $\overline{AB} \parallel$ a la cuerda $\overline{CD}$. El radio $\overline{OE}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en los puntos M y N, respectivamente. Si $OE = 13$, $AB = 24$ y $CD = 10$, entonces la distancia de O a $\overline{CD}$ es mayor que la distancia de O a $\overline{AB}$. Determine qué tanto está más lejos la cuerda $\overline{CD}$ del centro O que la cuerda $\overline{AB}$; es decir, encuentre MN.



***38.** En $\odot P$, cuyo radio tiene 8 pulg de longitud, m$\widehat{AB}$ = m$\widehat{BC}$ = 60°. Ya que m$\widehat{AC}$ = 120°, la cuerda $\overline{AC}$ es más larga que cualquiera de las cuerdas congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Determine qué tanto es más larga $\overline{AC}$ que $\overline{AB}$; es decir, encuentre el valor exacto y el valor aproximado de $AC - AB$.



PERSPECTIVA HISTÓRICA

Circunferencia de la Tierra

Al viajar alrededor de la Tierra en el ecuador, se podría recorrer la circunferencia de la Tierra. Los primeros matemáticos intentaron descubrir el valor de la circunferencia de la Tierra. Sin embargo, la mejor aproximación de la circunferencia se debió al trabajo del matemático griego Eratóstenes (276-194 a.C.). En sus tiempos, Eratóstenes ocupó un cargo de gran prestigio como el director del museo en la Universidad de Alejandría.

Lo que hizo Eratóstenes para calcular la circunferencia de la Tierra se basa en varias suposiciones. Con el Sol a una gran distancia de la Tierra, sus rayos serían paralelos, cuando chocan contra la Tierra. Como son rectas paralelas, los ángulos alternos internos que se muestran en el diagrama tendrían la misma medida (indicada por la letra griega α). En el plan de Eratóstenes, se determinaría en Alejandría una medición de ángulos cuando el Sol estuviera *directamente* sobre la ciudad de Siena. Mientras que el ángulo subtendido en el centro de la Tierra no se podía medir, el ángulo (en Alejandría) formado por la vertical y la sombra relacionada se podría medir, de hecho, la medida fue a $\approx 7.2°$.

La solución de Eratóstenes al problema se basa en este hecho: la relación proporcional que compara las medidas de ángulo es equivalente a la relación proporcional que compara las distancias de la Tierra. La distancia entre Siena y Alejandría era de aproximadamente 5000 estadios

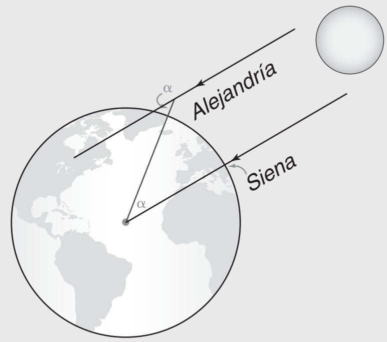


Figura 6.62

(1 estadio $\approx$ 516.73 pies). Donde C es la circunferencia de la Tierra en estadios, esto conduce a la proporción

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{5000}{C} \quad \text{o} \quad \frac{7.2}{360} = \frac{5000}{C}$$

Resolviendo la proporción y convirtiendo a millas, la aproximación de Eratóstenes de la circunferencia de la Tierra era alrededor de 24 662 millas, que es aproximadamente 245 millas menos que la circunferencia real.

Eratóstenes, un estudiante incansable y maestro, perdió la vista al final de su vida. Incapaz de soportar la pérdida de la visión y la falta de productividad, Eratóstenes se suicidó negándose a comer.

PERSPECTIVA DE APLICACIÓN

Suma de los ángulos interiores de un polígono

Suponga que ha estudiado el círculo *antes* de estudiar polígonos. Los métodos de prueba y las justificaciones serían muy afectados. En particular, se supone que no conoce el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, pero sabe estos hechos:

1. La suma de las medidas de un círculo es 360°.
2. La medida de un ángulo inscrito en un círculo es $\frac{1}{2}$, de la medida de su arco intersecado.

Usando estos hechos, se demuestra que “La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°”.

Demostración: En ΔABC, $m\angle A = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{BC}$ $m\angle B = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AC}$ y $m\angle C = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AB}$. Entonces $m\angle A + m\angle B + m\angle C = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{AC} + m\overset{\frown}{AB}) = \frac{1}{2}(360°) = 180°$.

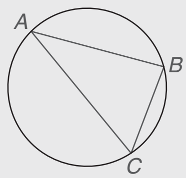


Figura 6.63

Usando los hechos conocidos 1 y 2, también se puede demostrar que “La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°”. Sin embargo, se podría completar nuestra prueba utilizando un cuadrilátero cíclico. El ordenamiento estratégico y la asociación de los términos conducen al resultado deseado.

Demostración: Para el cuadrilátero $HJKL$ en la figura 6.64,

$$m\angle H + m\angle J + m\angle K + m\angle L = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{LKJ} + \frac{1}{2}m\overset{\frown}{HLK} + \frac{1}{2}m\overset{\frown}{LHJ} + \frac{1}{2}m\overset{\frown}{HJK}$$

o

$$\frac{1}{2}(m\overset{\frown}{LKJ} + m\overset{\frown}{LHJ}) + \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{HLK} + m\overset{\frown}{HJK}) = \frac{1}{2}(360°) + \frac{1}{2}(360°)$$

A su vez, se ve que

$$m\angle H + m\angle J + m\angle K + m\angle L = 180° + 180° \text{ o } 360°$$

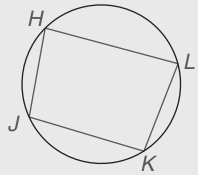


Figura 6.64

Se podría continuar de esta manera para mostrar que la suma de los cinco ángulos interiores de un pentágono (utilizando un pentágono cíclico) es 540° y que la suma de los n ángulos interiores de un polígono cíclico de n lados es $(n - 2)180°$.

Resumen

UNA VISTA RETROSPECTIVA AL CAPÍTULO 6

Un objetivo en este capítulo ha sido clasificar los ángulos dentro, en y fuera del círculo. Se desarrollaron fórmulas para encontrar las medidas de esos ángulos. Se definieron las rectas y los segmentos de recta relacionados con un círculo y se describieron algunas formas de encontrar las medidas de dichos segmentos. Se demostraron teoremas que implican desigualdades en un círculo.

UNA VISTA PRELIMINAR DEL CAPÍTULO 7

Uno de los objetivos del capítulo 7 es el estudio de lugares, que tiene que ver con la ubicación del punto. De hecho, con frecuencia un lugar geométrico de puntos es más que la descripción de una figura geométrica conocida. El conocimiento del lugar conduce a la determinación de si ciertas rectas debían ser concurrentes (reunirse en un punto común). Por último se amplía el concepto de concurrencia para desarrollar nuevas propiedades y la terminología para los polígonos regulares.

CONCEPTOS CLAVE

6.1

Círculo • Círculos congruentes • Círculos concéntricos • Centro del círculo • Radio • Diámetro • Cuerda • Semicírculo • Arco • Arco mayor • Arco menor • Arco intersecado • Arcos congruentes • Ángulo central • Ángulo inscrito

6.2

Tangente • Punto de tangencia • Secante • Polígono inscrito en un círculo • Polígono cíclico • Círculo circunscrito • Polígono circunscrito alrededor de un círculo • Círculo inscrito • Interior y exterior de un círculo

6.3

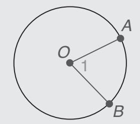
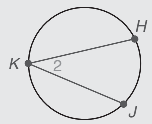
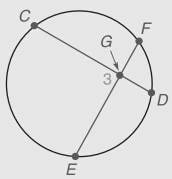
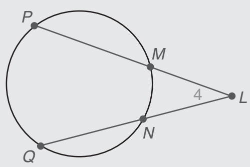
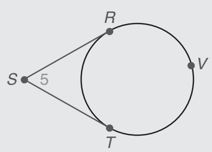
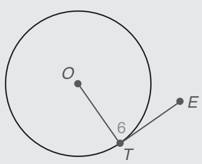
Círculos tangentes • Círculos tangentes internamente • Círculos tangentes externamente • Recta de centros • Tangente común • Tangentes externas comunes • Tangentes internas comunes

6.4

Construcciones de tangentes a un círculo • Desigualdades en un círculo

TABLA 6.2 Una vista general del capítulo 6

▶ Propiedades seleccionadas de los círculos

FIGURA	MEDIDA DE ÁNGULO	RELACIONES DE SEGMENTOS
Ángulo central  	$m\angle 1 = m\widehat{AB}$	$OA = OB$
Ángulo inscrito  	$m\angle 2 = \frac{1}{2} m\widehat{HJ}$	Por lo general, $HK \neq KJ$
Ángulo formado por cuerdas que se intersecan  	$m\angle 3 = \frac{1}{2}(m\widehat{CE} + m\widehat{FD})$	$CG \cdot GD = EG \cdot GF$
Ángulo formado por secantes que se intersecan  	$m\angle 4 = \frac{1}{2}(m\widehat{PQ} - m\widehat{MN})$	$PL \cdot LM = QL \cdot LN$
Ángulo formado por tangentes que se intersecan  	$m\angle 5 = \frac{1}{2}(m\widehat{RVT} - m\widehat{RT})$	$SR = ST$
Ángulo formado por el radio trazado hasta la tangente  	$m\angle 6 = 90°$	$\overline{OT} \perp \overline{TE}$

Capítulo 6 EJERCICIOS DE REPASO

1. La longitud del radio de un círculo es de 15 mm. La longitud de una cuerda es de 24 mm. Encuentre la distancia desde el centro del círculo hasta la cuerda.

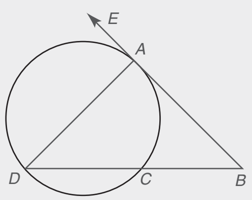
2. Encuentre la longitud de una cuerda que está a 8 cm del centro de un círculo que tiene un radio de 17 cm.

3. Dos círculos se intersecan y tienen una cuerda común de 10 pulg de largo. El radio de un círculo es de 13 pulg y los centros de los círculos están separados 16 pulg. Encuentre el radio del otro círculo.

4. Dos círculos se intersecan y tienen una cuerda común de 12 cm de largo. La medida de los ángulos formados por la cuerda común y un radio de cada círculo hasta los puntos de intersección de los círculos es de 45°. Encuentre el radio de cada círculo.

En los ejercicios de repaso 5 al 10 $\overrightarrow{BA}$ es tangente al círculo en la figura que se muestra.

5. $m\angle B = 25°$, $m\overset{\frown}{AD} = 140°$, $m\overset{\frown}{DC} = ?$



Ejercicios 5-10

6. $m\overset{\frown}{ADC} = 295°$, $m\overset{\frown}{AD} = 155°$, $m\angle B = ?$

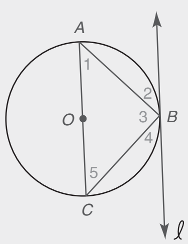
7. $m\angle EAD = 70°$, $m\angle B = 30°$, $m\overset{\frown}{AC} = ?$

8. $m\angle D = 40°$, $m\overset{\frown}{DC} = 130°$, $m\angle B = ?$

9. *Dado:* C es el punto medio de $\overset{\frown}{ACD}$ y $m\angle B = 40°$
Encuentre: $m\overset{\frown}{AD}$, $m\overset{\frown}{AC}$, $m\overset{\frown}{DC}$

10. *Dado:* $m\angle B = 35°$ y $m\overset{\frown}{DC} = 70°$
Encuentre: $m\overset{\frown}{AD}$, $m\overset{\frown}{AC}$

11. *Dado:* $\odot O$ con tangente ℓ y $m\angle 1 = 46°$
Encuentre: $m\angle 2$, $m\angle 3$, $m\angle 4$, $m\angle 5$



Ejercicios 5, 12

12. *Dado*: $\odot O$ con tangente ℓ y $m\angle 5 = 40°$.
Encuentre: $m\angle 1$, $m\angle 2$, $m\angle 3$, $m\angle 4$

13. Dos círculos son concéntricos. Una cuerda del círculo más grande también es tangente al círculo más pequeño. El radio de un círculo es 20 y el radio del otro es 16 respectivamente. Encuentre la longitud de la cuerda.

14. Dos cuerdas paralelas de un círculo tienen una longitud de 16 cada una. La distancia entre las cuerdas es 12. Encuentre el radio del círculo.

En los ejercicios de repaso 15 al 22 establezca si los enunciados son siempre verdaderos (S), algunas veces son verdaderos (A) o nunca son verdaderos (N).

15. En un círculo las cuerdas congruentes son equidistantes del centro.

16. Si un triángulo está inscrito en un círculo y uno de sus lados es un diámetro, entonces el triángulo es isósceles.

17. Si un ángulo central y un ángulo inscrito de un círculo intersecan el mismo arco, entonces son congruentes.

18. Se puede inscribir un trapezoide en un círculo.

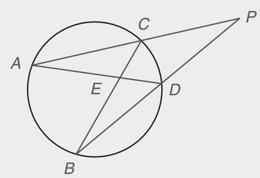
19. Si un paralelogramo está inscrito en un círculo, entonces cada una de sus diagonales debe ser un diámetro.

20. Si dos cuerdas de un círculo no son congruentes, entonces la cuerda más corta está más cerca del centro del círculo.

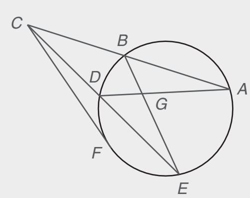
21. Las tangentes a un círculo en los puntos extremos de un diámetro son paralelas.

22. Dos círculos concéntricos tienen al menos un punto en común.

23. a) $m\overset{\frown}{AB} = 80°$, $m\angle AEB = 75°$, $m\overset{\frown}{CD} = ?$
b) $m\overset{\frown}{AC} = 62°$, $m\angle DEB = 45°$, $m\overset{\frown}{BD} = ?$
c) $m\overset{\frown}{AB} = 88°$, $m\angle P = 24°$, $m\angle CED = ?$
d) $m\angle CED = 41°$, $m\overset{\frown}{CD} = 20°$, $m\angle P = ?$
e) $m\angle AEB = 65°$, $m\angle P = 25°$, $m\overset{\frown}{AB} = ?$, $m\overset{\frown}{CD} = ?$
f) $m\angle CED = 50°$, $m\overset{\frown}{AC} + m\overset{\frown}{BD} = ?$

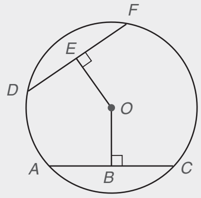


24. Dado que $\overline{CF}$ es una tangente al círculo que se muestra:
a) $CF = 6$, $AC = 12$, $BC = ?$
b) $AG = 3$, $BE = 10$, $BG = 4$, $DG = ?$
c) $AC = 12$, $BC = 4$, $DC = 3$, $CE = ?$
d) $AG = 8$, $GD = 5$, $BG = 10$, $GE = ?$
e) $CF = 6$, $AB = 5$, $BC = ?$
f) $EG = 4$, $GB = 2$, $AD = 9$, $GD = ?$
g) $AC = 30$, $BC = 3$, $CD = ED$, $ED = ?$
h) $AC = 9$, $BC = 5$, $ED = 12$, $CD = ?$
i) $ED = 8$, $DC = 4$, $FC = ?$
j) $FC = 6$, $ED = 9$, $CD = ?$



25. *Dado:* $\overline{DF} \cong \overline{AC}$ en $\odot O$
$OE = 5x + 4$
$OB = 2x + 19$
Encuentre: OE

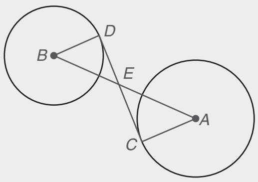
26. *Dado:* $\overline{OE} \cong \overline{OB}$ en $\odot O$
$DF = x(x - 2)$
$AC = x + 28$
Encuentre: DE y AC



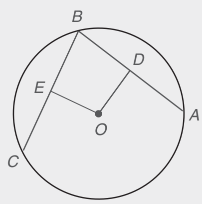
Ejercicios 25, 26

En los ejercicios de repaso 27 al 29 dé una demostración para cada enunciado.

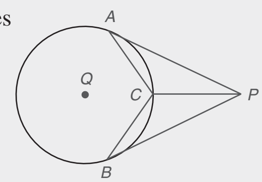
27. *Dado:* $\overline{DC}$ es tangente a los círculos B y A en los puntos D y C, respectivamente
Demuestre: $AC \cdot ED = CE \cdot BD$



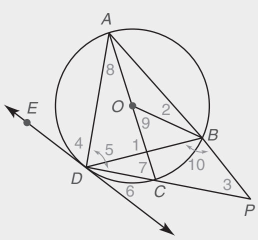
28. *Dado:* $\odot O$ con $\overline{EO} \perp \overline{BC}$,
$\overline{DO} \perp \overline{BA}$, $\overline{EO} \cong \overline{OD}$
Demuestre: $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{BA}$



29. *Dado:* $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ son tangentes a $\odot Q$ en A y B
C es el punto medio de $\overset{\frown}{AB}$
Demuestre: $\overrightarrow{PC}$ biseca a $\angle APB$



30. *Dado:* $\odot O$ con diámetro $\overline{AC}$ y tangente $\overleftrightarrow{DE}$
$m\overset{\frown}{AD} = 136°$ y $m\overset{\frown}{BC} = 50°$
Encuentre: Las medidas de los ángulos del $\angle 1$ al $\angle 10$.

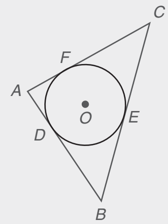


31. Un cuadrado está inscrito en un círculo con un radio de 6 cm. Encuentre el perímetro del cuadrado.

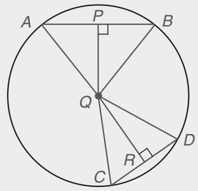
32. Un triángulo 30°-60°-90° está inscrito en un círculo con un radio de 5 cm. Encuentre el perímetro del triángulo.

33. Un círculo está inscrito en un triángulo rectángulo. El radio del círculo mide 6 cm y la hipotenusa mide 29 cm. Encuentre las longitudes de los dos segmentos de la hipotenusa que están determinados por el punto de tangencia.

34. *Dado:* $\odot O$ está inscrito en $\triangle ABC$
$AB = 9$, $BC = 13$, $AC = 10$
Encuentre: AD, BE, FC



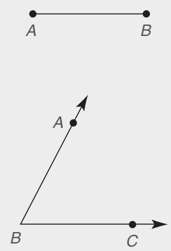
35. En $\odot Q$ con $\triangle ABQ$ y $\triangle CDQ$ $m\overset{\frown}{AB} > m\overset{\frown}{CD}$. También $\overline{QP} \perp \overline{AB}$ y $\overline{QR} \perp \overline{CD}$.
a) ¿Cómo se relacionan AB y CD?
b) ¿Cómo se relacionan QP y QR?
c) ¿Cómo se relacionan $\angle A$ y $\angle C$?



36. En $\odot O$ (que no se muestra), la secante $\overleftrightarrow{AB}$ interseca el círculo A y B; C es un punto en $\overleftrightarrow{AB}$ en el exterior del círculo.
a) Construya la tangente a $\odot O$ en el punto B.
b) Construya las tangentes a $\odot O$ desde el punto C.

En los ejercicios de repaso 37 y 38 use la figura que se muestra.

37. Construya un triángulo rectángulo de manera que un cateto tenga longitud AB y el otro tenga dos AB.



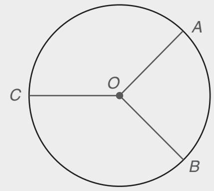
Ejercicios 37, 38

38. Construya un rombo con lado $\overline{AB}$ y $\angle ABC$.

Capítulo 6 EXAMEN

1. a) Si m$\widehat{AB}$ = 88°, entonces m$\widehat{ACB}$ = ________

b) Si m$\widehat{AB}$ = 92° y C es el punto medio del arco mayor ACB, entonces m$\widehat{AC}$ = ____________

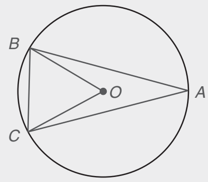


2. a) Si m$\widehat{BC}$ = 69°, entonces m$\angle BOC$ = ________

b) Si m$\widehat{BC}$ = 64°, entonces m$\angle BAC$ = ________

3. a) Si m$\angle BAC = 24°$, entonces m$\widehat{BC}$ = ________

b) Si $\widehat{AB} \cong \widehat{AC}$, entonces el $\triangle ABC$____________es un triángulo.



Ejercicios 2, 3

4. Complete cada teorema:

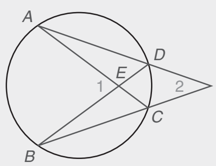
a) Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo____________

b) Los dos segmentos tangentes trazados a un círculo desde un punto externo son___________

5. Dados m$\widehat{AB}$ = 106° y m$\widehat{DC}$ = 32°, encuentre:

a) m$\angle 1$ ____________

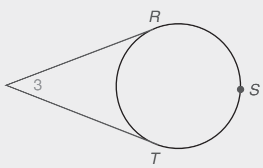
b) m$\angle 2$ ____________



6. Dado que m$\widehat{RT}$ = 146°, encuentre:

a) m$\widehat{RST}$ ________

b) m$\angle 3$ ________



Ejercicios 6, 7

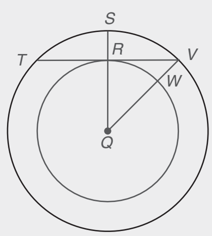
7. Dado que m$\angle 3 = 46°$ encuentre:

a) m$\widehat{RST}$ __________

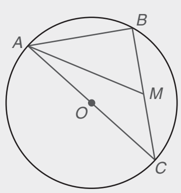
b) m$\widehat{RT}$ __________

8. a) Ya que el punto Q es su centro común, a estos círculos se les conoce como círculos ___________

b) Si $RQ = 3$ y $QV = 5$, encuentre la longitud de la cuerda TV._______



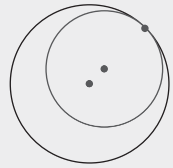
9. En $\odot O$, $OC = 5$ y $AB = 6$. Si M es el punto medio de $\overline{BC}$, encuentre $\overline{AM}$.

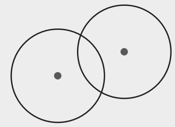


10. Para los círculos que se describen y se muestran, ¿cuántas tangentes comunes tienen?

a) Círculos tangentes internamente_______

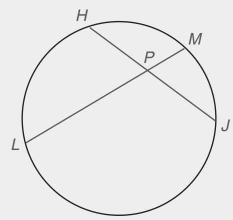
b) Círculos que se intersecan en dos puntos _______



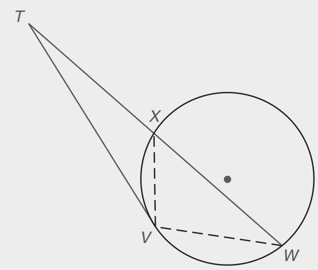


11. a) Si $HP = 4$, $PJ = 5$ y $PM = 2$, encuentre LP. ________

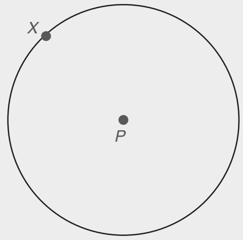
b) Si $HP = x + 1$, $PJ = x - 1$, $LP = 8$ y $PM = 3$, encuentre x._______



12. En la figura $\triangle TVW \sim \triangle TXV$. Encuentre TV si $TX = 3$ y $XW = 5$. ______

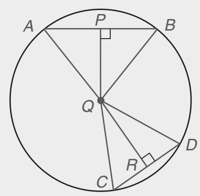


13. Construya la recta tangente a $\odot P$ en el punto X.



14. a) Si m$\widehat{AB}$ > m$\widehat{CD}$, escriba una desigualdad que compare m$\angle AQB$ y m$\angle CQD$.________

b) Si $QR > QP$, escriba una desigualdad que compare AB y CD._____________



15. En $\odot P$ (que no se muestra), la longitud de los radios $\overline{PA}$ es 5. También la cuerda $\overline{AB} \parallel$ cuerda $\overline{CD}$. Si $AB = 8$ y $CD = 6$, encuentre la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y si estas cuerdas:

a) se encuentran en el mismo lado del centro P.

____

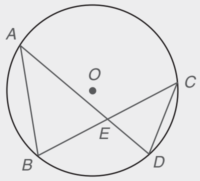
b) se encuentran en el lado opuesto del centro P.

____

16. Complete los enunciados y las razones faltantes en la siguiente demostración.

Dado: En $\odot O$, las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en E.

Demuestre: $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$



DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. ________________	1. ________________
2. $\angle AEB \cong \angle DEC$	2. ________________
3. $\angle B \cong \angle D$	3. Si dos ángulos inscritos intersecan el mismo arco, dichos ángulos son congruentes
4. $\triangle ABE \sim \triangle CDE$	4. ________________
5. ________________	5. LCTSP

Capítulo 7

Lugar geométrico y concurrencia

© Richard Semik/Stocklib

CONTENIDO

Hay un DVD disponible que cuenta con un video con explicación de conceptos, problemas de ejemplo y aplicaciones. Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

¡Magníficos! No sólo son hermosos los jardines en el Chateau de Villandry en Francia, sino que la disposición del jardín también demuestra la importancia de la ubicación en este diseño. Como parte medular de este capítulo está el concepto de lugar geométrico, un término que significa "ubicación". En la simetría del jardín, cada flor o seto tiene una contraparte ubicada en el lado opuesto (y a la misma distancia) del sendero central. El concepto de lugar geométrico proporciona el fondo necesario para desarrollar propiedades de concurrencia de rectas así como propiedades adicionales de polígonos regulares.

7.1 Lugar geométrico de puntos

CONCEPTOS CLAVE

Lugar geométrico de puntos en un plano

Lugar geométrico de puntos en el espacio

En ocasiones se necesita describir un conjunto de puntos que satisfagan una condición o conjunto de condiciones dados. El término utilizado para describir la figura geométrica resultante es *lugar geométrico*. La palabra para *localización* deriva de la palabra latina *locus*.

DEFINICIÓN

Un **lugar geométrico** es el conjunto de todos los puntos y sólo esos puntos que satisfacen una condición (o conjunto de condiciones) dado.

En esta definición la frase "todos los puntos y sólo esos puntos" tiene un significado doble.

1. Todos los puntos del lugar geométrico satisfacen la condición dada.
2. Todos los puntos que satisfacen la condición dada están incluidos en el lugar geométrico.

El conjunto de puntos que satisfacen un lugar geométrico puede ser una figura geométrica bien conocida como una recta o un círculo. En los ejemplos 1, 2 y 3 se ubican varios puntos en un plano y luego se conectan en orden para formar el lugar geométrico.

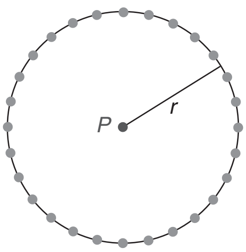


Figura 7.1

EJEMPLO 1

Describa el lugar geométrico de los puntos en un plano que están a una distancia fija (r) de un punto dado (P).

Solución El lugar geométrico es el círculo con centro P y radio r. (Vea la figura 7.1.) ■

EJEMPLO 2

Describa el lugar geométrico de los puntos en un plano que son equidistantes de dos puntos fijos (P y Q).

Solución El lugar geométrico es la recta que es el bisector perpendicular de $\overline{PQ}$. En la figura 7.2, $PX = QX$ para cualquier punto X en la recta t.

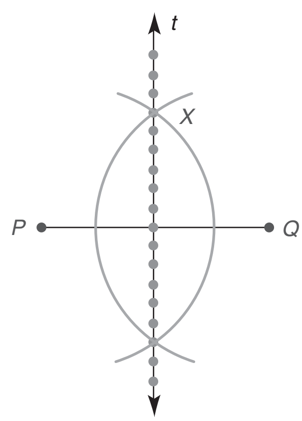


Figura 7.2 ■

EJEMPLO 3

Describa el lugar geométrico de los puntos en un plano que son equidistantes de los lados de un ángulo ($\angle ABC$) en ese plano.

Solución El lugar geométrico es el rayo $\overrightarrow{BD}$ que biseca el $\angle ABC$. (Vea la figura 7.3.)

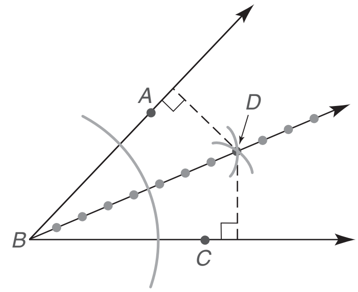


Figura 7.3

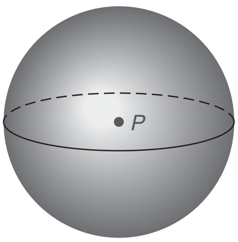


Figura 7.4

Algunas definiciones se dan en un formato de lugar geométrico; por ejemplo, la siguiente es una definición alterna del término **círculo**.

DEFINICIÓN

Un **círculo** es el lugar geométrico de los puntos en un plano que están a una distancia fija de un punto dado.

Cada uno de los ejemplos anteriores incluye la frase "en un plano". Si se omite esa frase, el lugar geométrico se encuentra "en el espacio". Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia fija de un punto dado en realidad es una *esfera* (el objeto tridimensional en la figura 7.4); la esfera tiene el punto fijo como centro y la distancia fija determina la longitud del radio. A menos que se indique lo contrario, el lugar geométrico se considerará restringido a un plano.

GEE
Ejercicios 1-4

EJEMPLO 4

Describa el lugar geométrico de todos los puntos *en el espacio* que son equidistantes de dos planos paralelos (P y Q).

Solución El lugar geométrico es el plano paralelo a cada uno de los planos dados y a la mitad entre ellos. (Vea la figura 7.5.)

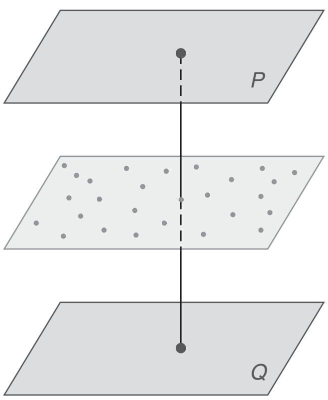


Figura 7.5

Existen dos teoremas muy importantes que implican el concepto de lugar geométrico. Los resultados de estos dos teoremas se enunciarán en la sección 7.2. Cuando se comprueben los teoremas del lugar geométrico, se *deben* establecer dos resultados.

1. Si un punto está en el lugar geométrico, entonces satisface la condición.
2. Si un punto satisface la condición, entonces es un punto del lugar geométrico.

TEOREMA 7.1.1

El lugar geométrico de los puntos en un plano y equidistante de los lados de un ángulo es el bisector de ángulo.

DEMOSTRACIÓN

(Observe que *ambas* partes *i* e *ii* son necesarias.)

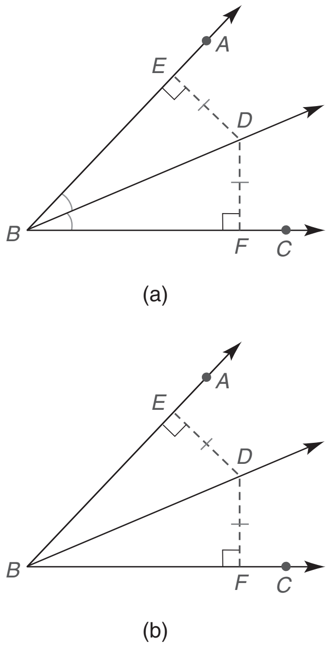


Figura 7.6

i) Si un punto está en el bisector de ángulo, entonces es equidistante de los lados del ángulo.

DADO: $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$
$\overline{DE} \perp \overrightarrow{BA}$ y $\overline{DF} \perp \overrightarrow{BC}$

DEMUESTRE: $\overline{DE} \cong \overline{DF}$

DEMOSTRACIÓN: En la figura 7.6(a), $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$; por tanto $\angle ABD \cong \angle CBD$. $\overline{DE} \perp \overrightarrow{BA}$ y $\overline{DF} \perp \overrightarrow{BC}$, por lo que $\angle DEB$ y DFB son $\angle$s rectos $\cong$. Por identidad, $\overline{BD} \cong \overline{BD}$. Por AAL, $\triangle DEB \cong$. Entonces $\overline{DE} \cong \overline{DF}$ por PCTCC.

ii) Si un punto es equidistante de los lados de un ángulo, entonces está en el bisector de ángulo.

DADO: $\angle ABC$ de modo que $\overline{DE} \perp \overrightarrow{BA}$ y $\overline{DF} \perp \overrightarrow{BC}$
$\overline{DE} \cong \overline{DF}$

DEMUESTRE: $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$; es decir, D está en el bisector del $\angle ABC$

DEMOSTRACIÓN: En la figura 7.6(b), $\overline{DE} \perp \overrightarrow{BA}$ y $\overline{DF} \perp \overrightarrow{BC}$, por tanto $\angle DEB$ y $\angle DFB$ son ángulos rectos. $\overline{DE} \cong \overline{DF}$ por hipótesis. Además, $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ por identidad. Entonces $\triangle DEB \cong \triangle DFB$ por HC. Luego $\angle ABD \cong \angle CBD$ por PCTCC, por tanto $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$ por definición. ■

En problemas del lugar geométrico se debe recordar cómo demostrar dos relaciones para validar los resultados.

Un segundo teorema importante respecto al lugar geométrico de puntos es el siguiente:

GEE
Ejercicios 5, 6

TEOREMA 7.1.2

El lugar geométrico de los puntos en un plano que son equidistantes de los puntos extremos de un segmento de recta es el bisector perpendicular de ese segmento de recta.

DEMOSTRACIÓN

i) Si un punto es equidistante de los puntos extremos de un segmento de recta, entonces se encuentra en el bisector perpendicular del segmento de recta.

DADO: $\overline{AB}$ y el punto X que no está en $\overline{AB}$, de manera que $AX = BX$ [Vea la figura 7.7(a).]

DEMUESTRE: X se encuentra en el bisector perpendicular de $\overline{AB}$

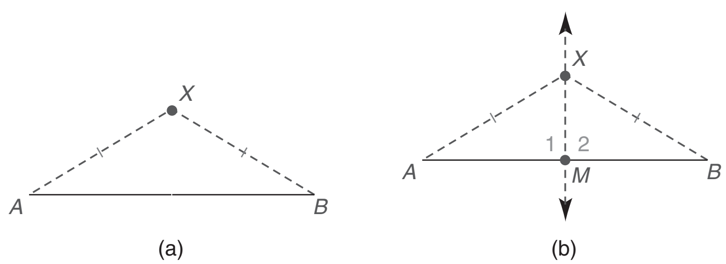


Figura 7.7

DEMOSTRACIÓN: Sea M el punto medio de $\overline{AB}$. Trace $\overleftrightarrow{MX}$ [vea la figura 7.7(b)]. Entonces $\overline{AM} \cong \overline{MB}$. Debido a que $AX = BX$, se sabe que $\overline{AX} \cong \overline{BX}$. Por identidad, $\overline{XM} \cong \overline{XM}$; por tanto $\triangle AMX \cong \triangle BMX$ por LLL. Por PCTCC, los $\angle$s 1 y 2 son congruentes y $\overleftrightarrow{MX} \perp \overline{AB}$. Por definición, $\overleftrightarrow{MX}$ es el bisector perpendicular de $\overline{AB}$, por tanto X se encuentra en el bisector perpendicular de $\overline{AB}$.

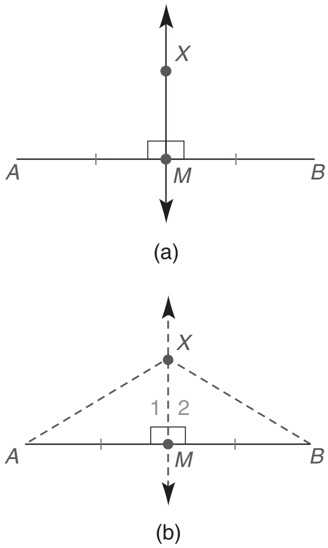


Figura 7.8

ii) Si un punto está en el bisector perpendicular de un segmento de recta, entonces el punto está equidistante de los puntos extremos del segmento de recta.

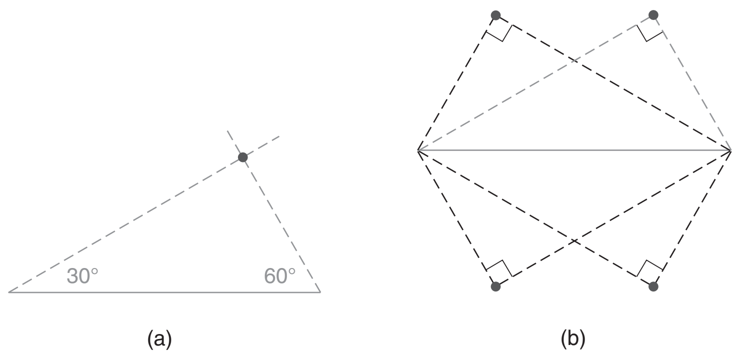
DADO: El punto X se encuentra en $\overleftrightarrow{MX}$, el bisector perpendicular de $\overline{AB}$ [vea la figura 7.8(a)].

DEMUESTRE: X es equidistante de A y B ($AX = XB$) [vea la figura 7.8(b)].

DEMOSTRACIÓN: X está en el bisector perpendicular de $\overline{AB}$, por tanto los $\angle$s 1 y 2 son ángulos rectos congruentes y $\overline{AM} \cong \overline{MB}$. Con $\overline{XM} \cong \overline{XM}$, los $\triangle$s AMX y BMX son congruentes por LAL; a su vez, $\overline{XA} \cong \overline{XB}$ por PCTCC. Entonces $XA = XB$ y X es equidistante de A y B. ■

Ahora se regresa a más consideraciones acerca de un lugar geométrico en un plano.

Suponga que un segmento de recta dado se utilizará como la hipotenusa de un triángulo rectángulo. ¿Cómo se podrían localizar las posiciones posibles para el vértice del triángulo rectángulo? Un método podría ser trazar ángulos de 30 y 60° en los puntos extremos, de manera que el ángulo restante formado deba medir 90° [vea la figura 7.9(a)]. Ésta es sólo una posibilidad pero, debido a la simetría, en realidad proporciona cuatro puntos permisibles, los cuales se indican en la figura 7.9(b). Este problema se completa en el ejemplo 5.



GEE

Ejercicios 7, 8

Figura 7.9

Recuerde

Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

EJEMPLO 5

Encuentre el lugar geométrico del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo si la hipotenusa es $\overline{AB}$ en la figura 7.10(a).

Solución En vez de utilizar un método de "prueba y error" para localizar el vértice posible (como se sugiere en el párrafo anterior a este ejemplo), recuerde que un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto. Así, se construye el círculo cuyo centro es el punto medio M de la hipotenusa y cuyo radio es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

Figura 7.10(b): Primero se ubica el punto medio M de la hipotenusa $\overline{AB}$.

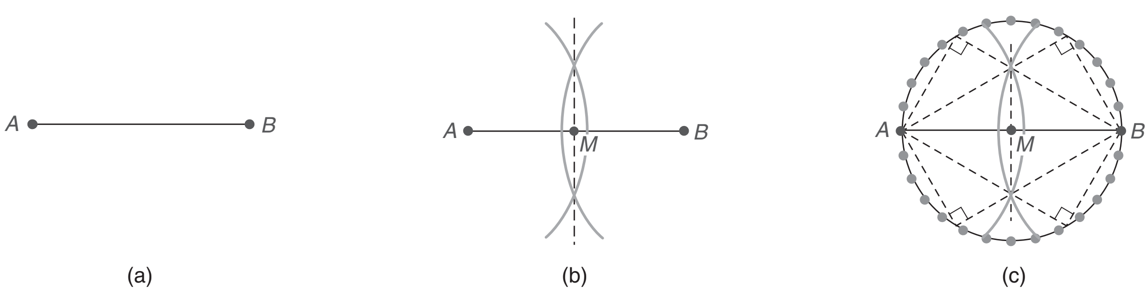


Figura 7.10

Figura 7.10(c): El círculo con centro M se traza con la longitud del radio del círculo igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa (como MB).
El lugar geométrico del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa está dada es el círculo cuyo centro está en el punto medio del segmento dado y cuyo radio es igual en longitud a la mitad de la longitud del segmento dado. Cada punto (excepto A y B) en $\odot M$ es el vértice de un triángulo rectángulo con hipotenusa $\overline{AB}$; vea el teorema 6.1.9. ■

En el ejemplo 5 la construcción implica ubicar el punto medio M de $\overline{AB}$ y éste se encuentra por la construcción del bisector perpendicular. Luego se abre el compás hasta un radio cuya longitud sea MA o MB y se traza el círculo. Cuando se realiza una construcción, ésta corresponde a una de dos categorías:

1. Método de construcción básico
2. Un problema de construcción compuesto que puede requerir varios pasos e implicar varios métodos de construcción básicos (como en el ejemplo 5)

El ejemplo siguiente también pertenece a la categoría 2.

Recuerde que las diagonales de un rombo son perpendiculares y que también se bisecan entre sí. Con esta información se pueden localizar los vértices del rombo cuyas diagonales (longitudes) se conozcan.

EJEMPLO 6

Construya el rombo $ABCD$ dadas sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. (Vea la figura 7.11.)

Solución Figura 7.11(a): Para comenzar, se construye el bisector perpendicular de $\overline{AC}$; se sabe que los vértices restantes B y D se deben encontrar en esta recta. Como se muestra, M es el punto medio de $\overline{AC}$.
Figura 7.11(b): Para localizar el punto medio de $\overline{BD}$, también se construye su bisector perpendicular. El punto medio de $\overline{BD}$ también se denomina M.
Figura 7.11(c): Utilizando una longitud de arco igual a la mitad de la longitud de $\overline{BD}$ (como MB), se marca esta distancia arriba y abajo de $\overline{AC}$ en el bisector perpendicular determinado en la figura 7.11(a).

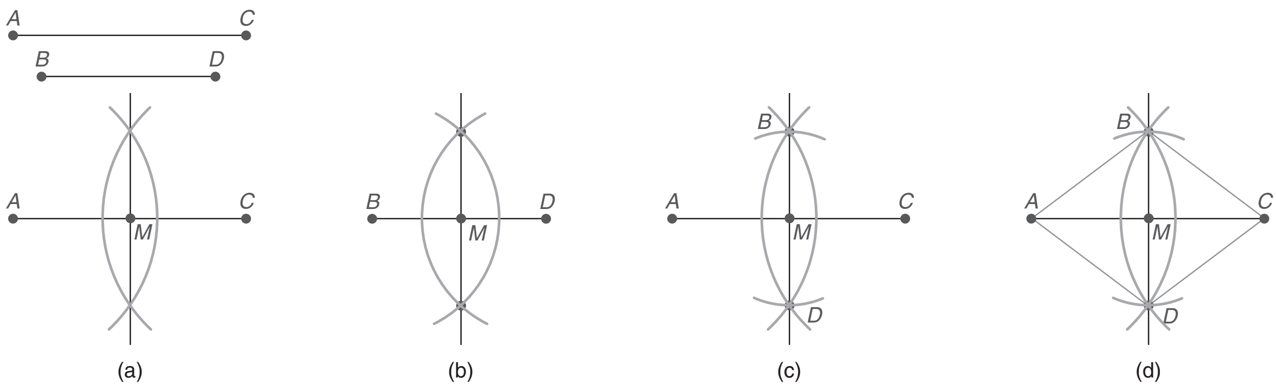


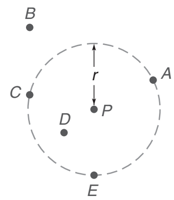
Figura 7.11

Figura 7.11(d): Utilizando los arcos marcados para localizar (determinar) los puntos B y D, se une A con B, B con C, C con D y D con A. El rombo terminado es $ABCD$ como se muestra. ■

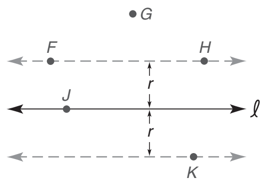
GÉE
Ejercicios 9, 10

Ejercicios 7.1

1. En la figura, ¿cuáles de los puntos A, B, C, D y E pertenecen al "lugar geométrico de los puntos en el plano que están a una distancia r del punto P"?

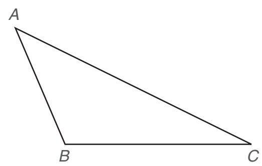


2. En la figura, ¿cuáles de los puntos F, G, H, J y K pertenecen al "lugar geométrico de los puntos en el plano que están a una distancia r de la recta ℓ"?



En los ejercicios 3 a 8 utilice el dibujo proporcionado.

3. *Dado:* $\triangle$ obtuso ABC
Construya: El bisector del $\angle ABC$



Ejercicios 3–8

4. *Dado:* $\triangle ABC$ obtuso
Construya: El bisector del $\angle BAC$

5. *Dado:* $\triangle ABC$ obtuso
Construya: El bisector perpendicular de $\overline{AB}$

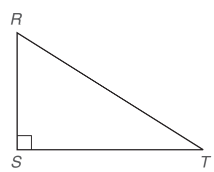
6. *Dado:* $\triangle ABC$ obtuso
Construya: El bisector perpendicular de $\overline{AC}$

7. *Dado:* $\triangle ABC$ obtuso
Construya: La altura de A a $\overline{BC}$
(SUGERENCIA: Extienda $\overline{BC}$.)

8. *Dado:* $\triangle ABC$ obtuso
Construya: La altura de B a $\overline{AC}$

9. *Dado:* $\triangle RST$ rectángulo
Construya: La mediana de S a $\overline{RT}$

10. *Dado:* $\triangle RST$ rectángulo
Construya: La mediana de R a $\overline{ST}$



Ejercicios 9–10

En los ejercicios 11 al 12 bosqueje y describa cada lugar geométrico en el plano.

11. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de una recta dada.

12. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que son equidistantes de dos rectas paralelas dadas.

13. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia de 3 pulg de un punto fijo O.

14. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que son equidistantes de dos puntos fijos A y B.

15. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que son equidistantes de tres puntos colineales D, E y F.

16. Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios de los radios de un círculo O que tiene un radio de longitud 8 cm.

17. Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de un círculo Q que son paralelas al diámetro $\overline{PR}$.

18. Encuentre el lugar geométrico de los puntos en el interior de un triángulo rectángulo con lados de 6, 8 y 10 pulg y a una distancia de 1 pulg del triángulo.

19. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que son equidistantes de dos rectas intersecantes dadas.

***20.** Encuentre el lugar geométrico de los puntos que son equidistantes de una recta dada y un punto fuera de esa recta.
(**NOTA:** Esta figura se conoce como *parábola*.)

21. Dado que las rectas p y q se intersecan, encuentre el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia de 1 cm de la recta p y también a una distancia de 2 cm de la recta q.

22. Dado que los círculos congruentes O y P tienen radios de longitud de 4 pulg y que la recta de centros tiene una longitud de 6 pulg, encuentre el lugar geométrico de los puntos que están a 1 pulg de cada círculo.

En los ejercicios 23 al 30 bosqueje y describa el lugar geométrico de los puntos en el espacio.

23. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de una recta fija.

24. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que son equidistantes de dos puntos fijos.

25. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia de 2 cm de una esfera cuyo radio es 5 cm.

26. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de un plano dado.

27. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que son los puntos medios de los radios de una esfera cuyo centro es el punto O y cuyo radio tiene una longitud de 5 m.

***28.** Encuentre el lugar geométrico de los puntos que son equidistantes de tres puntos no colineales D, E y F.

29. En una habitación encuentre el lugar geométrico de los puntos que son equidistantes del techo y el piso paralelos, los cuales están separados 8 pies.

30. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que son equidistantes de todos los puntos en la superficie de una esfera con punto central Q.

En los ejercicios 31 y 32 utilice el método de demostración del teorema 7.1.1 para justificar cada método de construcción.

31. El método del bisector perpendicular.

32. La construcción de una perpendicular hasta una recta desde un punto fuera de la recta.

En los ejercicios 33 al 36 refiérase al segmento de recta que se muestra.

33. Construya un triángulo rectángulo isósceles que tenga hipotenusa $\overline{AB}$.

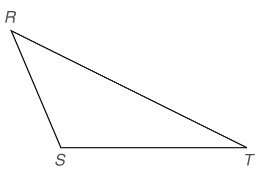
Ejercicios 33–36

34. Construya un rombo cuyos lados sean iguales con longitud AB y de manera que una diagonal del rombo tenga longitud CD.

35. Construya un triángulo isósceles en el cual cada cateto tenga una longitud CD y en el que la altura hasta la base tenga una longitud AB.

36. Construya un triángulo equilátero en el cual la altura hasta cualquier lado tenga una longitud AB.

37. Construya los tres bisectores de ángulo y luego el círculo inscrito para el $\triangle RST$ obtuso.

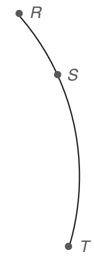


Ejercicios 37, 38

38. Construya los tres bisectores perpendiculares de los lados y luego el círculo circunscrito para el $\triangle RST$ obtuso.

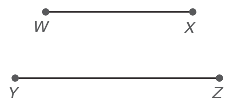
39. Utilice el teorema siguiente para localizar el centro del círculo del cual $\widehat{RT}$ es una parte.

Teorema: El bisector perpendicular de una cuerda pasa por el centro de un círculo.



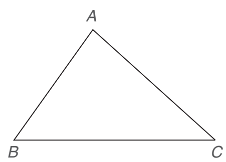
***40.** Utilice el teorema siguiente para construir el medio geométrico de las longitudes numéricas de los segmentos $\overline{WX}$ y $\overline{YZ}$.

Teorema: La longitud de la altura de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es el medio geométrico entre las longitudes de los segmentos de la hipotenusa.



41. Utilice el teorema siguiente para construir un triángulo semejante al triángulo dado pero con lados que son del doble de longitud de los del triángulo dado.

Teorema: Si los tres pares de lados para dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes (LLL~).



***42.** Compruebe este teorema del lugar geométrico:

El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos fijos es el bisector perpendicular del segmento de recta que une esos puntos.

7.2 Concurrencia de rectas

CONCEPTOS CLAVE

Rectas concurrentes	Circuncentro	Ortocentro
Incentro	Circuncírculo	Centroide
Incírculo		

En esta sección se consideran las rectas que comparten un punto común.

DEFINICIÓN

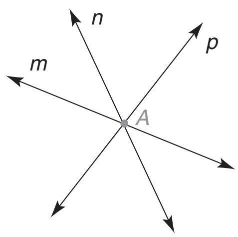
Un número de rectas son **concurrentes** si tienen exactamente un punto en común.

Descubra

Un programa de software de cómputo puede ser útil para demostrar la concurrencia de las rectas descritas en cada teorema de esta sección.

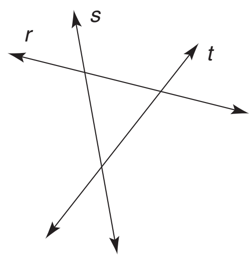
Las tres rectas en la figura 7.12 son concurrentes en el punto A. Las tres rectas en la figura 7.13 no son concurrentes aunque cualquier par de rectas (como r y s) se intersecan.

Partes de rectas (rayos o segmentos) son concurrentes si son partes de rectas concurrentes y si las partes comparten un punto común.



m, n y p *son* concurrentes

Figura 7.12



r, s y t *no* son concurrentes

Figura 7.13

GEE *Ejercicios 1, 2*

TEOREMA 7.2.1

Los tres bisectores de ángulo de los ángulos de un triángulo son concurrentes.

Para las demostraciones informales de esta sección no se establece Dado o Demuestre. En cursos más avanzados estas partes de la demostración son obvias.

EJEMPLO 1

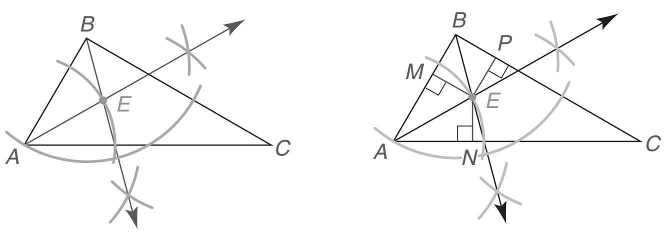
Proporcione una demostración informal del teorema 7.2.1.

Demostración En la figura 7.14(a), los bisectores del $\angle BAC$ y del $\angle ABC$ se intersecan en el punto E.

Debido a que el bisector del $\angle BAC$ es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del $\angle BAC$, se sabe que $\overline{EM} \cong \overline{EN}$ en la figura 7.14(b). De manera similar, $\overline{EM} \cong \overline{EP}$ ya que E está en el bisector del $\angle ABC$.

Recuerde

Un punto en el bisector de un ángulo es equidistante de los lados del ángulo.



(a) (b)

Figura 7.14

Por la propiedad transitiva de la congruencia se tiene que $\overline{EP} \cong \overline{EN}$.

Como el bisector de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo, E está también en el bisector del tercer ángulo, $\angle ACB$. Por tanto, los bisectores de ángulo son concurrentes en el punto E. ■

El punto E en el cual convergen los bisectores de ángulo en el ejemplo 1 es el **incentro** del triángulo. Como se muestra en el ejemplo siguiente, el término *incentro* está bien aplicado ya que este punto es el *centro* del círculo *in*scrito del triángulo.

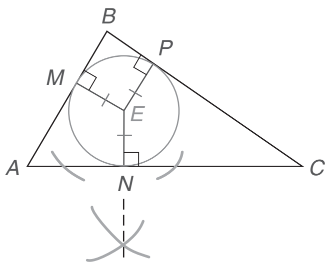


Figura 7.15

EJEMPLO 2

Complete la construcción del círculo inscrito para el $\triangle ABC$ en la figura 7.14(b).

Solución Después de encontrar el incentro E se necesita la longitud del radio. Debido a que $\overline{EN} \perp \overline{AC}$ (como se muestra en la figura 7.15), la longitud de $\overline{EN}$ (o $\overline{EM}$ o $\overline{EP}$) es el radio deseado; por tanto, el círculo está completo.

NOTA: Los lados del triángulo son tangentes para el círculo inscrito (o incírculo) del triángulo. El *in*círculo se encuentra *dentro* del triángulo. ■

También se puede circunscribir un círculo respecto a un triángulo. La construcción depende del teorema siguiente, cuya demostración se bosqueja en el ejemplo 3.

GEE
Ejercicios 3-7

TEOREMA 7.2.2

Los tres bisectores perpendiculares de los lados de un triángulo son concurrentes.

EJEMPLO 3

Proporcione una demostración informal del teorema 7.2.2. Vea el $\triangle ABC$ en la figura 7.16.

Demostración Sean $\overline{FS}$ y $\overline{FR}$ los bisectores perpendiculares de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Vea la figura 7.16(a). Utilizando el teorema 7.1.2, el punto de concurrencia F es equidistante de los puntos extremos de $\overline{BC}$; por tanto, $\overline{BF} \cong \overline{FC}$. De la misma manera, $\overline{AF} \cong \overline{FC}$. Por la propiedad transitiva se deduce que $\overline{AF} \cong \overline{BF}$; una vez más citando el teorema 7.1.2, F debe estar en el bisector perpendicular de $\overline{AB}$ debido a que este punto es equidistante de los puntos extremos de $\overline{AB}$. Por tanto, F es el punto de concurrencia.

Recuerde

Un punto en el bisector perpendicular de un segmento de recta es equidistante de los puntos extremos del segmento de recta.

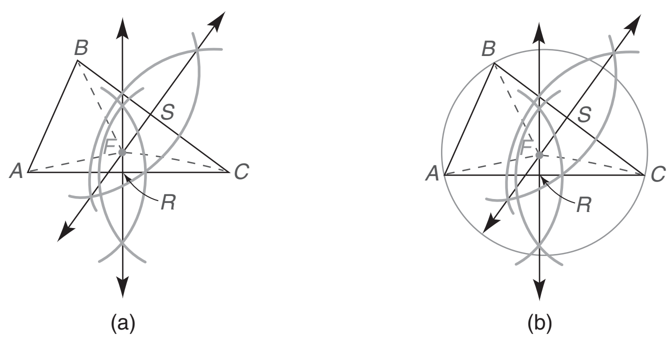


Figura 7.16 ■

El punto en el cual convergen los bisectores perpendiculares de los lados de un triángulo es el **circuncentro** del triángulo. El término *circuncentro* se recuerda con facilidad como el *centro* del círculo *circun*scrito.

EJEMPLO 4

Complete la construcción del círculo circunscrito para el $\triangle ABC$ que se dio en la figura 7.16(a).

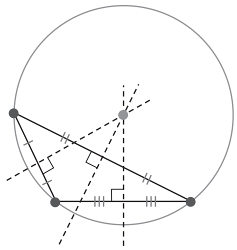


Figura 7.17

Solución Ya se definió el centro del círculo como el punto F. Para completar la construcción se utiliza F como el centro y un radio de longitud igual a la distancia desde F hasta cualquiera de los vértices A, B o C. El círculo circunscrito se muestra en la figura 7.16(b).

NOTA: Los lados del triángulo inscrito son cuerdas del círculo circunscrito, que se denomina **circuncírculo** del triángulo. El circuncírculo de un polígono se encuentra fuera del polígono, excepto donde contiene los vértices del polígono. ■

El incentro y el circuncentro de un triángulo por lo general son puntos distintos. Sin embargo, es posible que los dos centros coincidan en un tipo especial de triángulo. Aunque el incentro de un triángulo siempre se encuentra en el interior del triángulo, el circuncentro de un triángulo obtuso se encontrará en el exterior del triángulo. Vea la figura 7.17. El circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa.

GEE

Ejercicios 8-12

Para completar el análisis de la concurrencia se incluye un teorema que comprende las alturas de un triángulo y un teorema que implica las medianas de un triángulo.

TEOREMA 7.2.3

Las tres alturas de un triángulo son concurrentes.

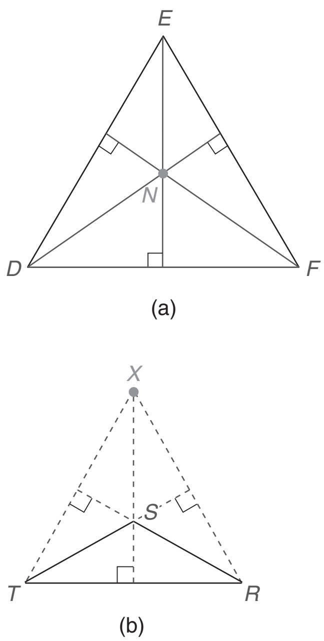


Figura 7.18

El punto de concurrencia para las tres alturas de un triángulo es el **ortocentro** del triángulo. En la figura 7.18(a), el punto N es el ortocentro del $\triangle DEF$. Para el triángulo obtuso en la figura 7.18(b) se observa que el ortocentro X se encuentra en el exterior del $\triangle RST$.

En vez de demostrar el teorema 7.2.3, se bosqueja una parte de la demostración. En la figura 7.19(a), el $\triangle MNP$ se muestra con sus alturas. Para demostrar que las alturas son concurrentes se requiere

1. que se tracen rectas auxiliares a través de N paralela a $\overline{MP}$, a través de M paralela a $\overline{NP}$ y a través de P paralela a $\overline{NM}$. [Vea la figura 7.19(b).]
2. que se demuestre que las alturas del $\triangle MNP$ son bisectores perpendiculares de los lados del $\triangle RST$ recién formado; por tanto, las alturas $\overline{PX}$, $\overline{MY}$ y $\overline{NZ}$ son concurrentes (una consecuencia del teorema 7.2.2).

BOSQUEJO DE LA DEMOSTRACIÓN QUE $\overline{PX}$ ES EL BISECTOR $\perp$ DE $\overline{RS}$:

Debido a que $\overline{PX}$ es una altura del $\triangle MNP$, $\overline{PX} \perp \overline{MN}$. Pero $\overline{RS} \parallel \overline{MN}$ por construcción. Debido a que una recta perpendicular a una de dos rectas paralelas debe ser perpendicular a la otra, se tiene que $\overline{PX} \perp \overline{RS}$. Ahora se necesita demostrar que $\overline{PX}$ biseca $\overline{RS}$. Por construcción, $\overline{MR} \parallel \overline{NP}$ y $\overline{RP} \parallel \overline{MN}$, por tanto $MRPN$ es un paralelogramo. Entonces $\overline{MN} \cong \overline{RP}$ ya que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. Por construcción, $MPSN$ también es un paralelogramo y $\overline{MN} \cong \overline{PS}$. Por la propiedad transitiva de la congruencia, $\overline{MN} \cong \overline{PS}$. Por tanto, $\overline{RS}$ se biseca en el punto P y $\overline{PX}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{RS}$.

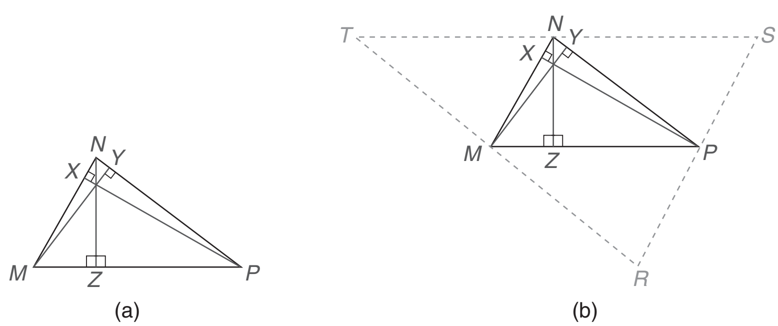


Figura 7.19

En la figura 7.19(b) se podrían utilizar argumentos similares (que conduzcan a una demostración larga) para demostrar que $\overline{NZ}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{TS}$ y también que $\overline{MY}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{TR}$. Debido a que los bisectores perpendiculares concurrentes de los lados del $\triangle RST$ también son las alturas del $\triangle MNP$, estas alturas deben ser concurrentes.

La intersección de cualquiera de las dos alturas determina el ortocentro de un triángulo. En el ejemplo 5 se utiliza este hecho. Si se construyera la tercera altura, contendría el mismo punto de intersección (el ortocentro).

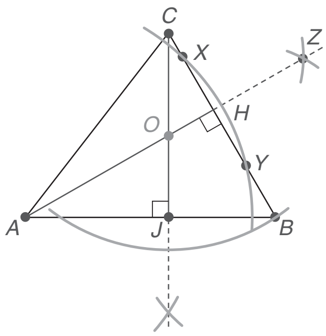


Figura 7.20

EJEMPLO 5

Construya el ortocentro del $\triangle ABC$ en la figura 7.20.

Solución Primero se construye la altura de A a $\overline{BC}$; aquí se traza un arco de A para intersecar $\overline{BC}$ en X y Y. Ahora se trazan arcos iguales desde X y Y que se intersequen en Z. $\overline{AH}$ es la altura deseada. Se repite el proceso para construir la altura $\overline{CJ}$ desde el vértice C hasta el lado $\overline{AB}$. El punto de intersección O es el ortocentro del $\triangle ABC$. ■

Recuerde que una mediana de un triángulo une un vértice con el punto medio del lado opuesto del triángulo. Mediante la construcción se puede demostrar que las tres medianas de un triángulo son concurrentes. La demostración del teorema siguiente se analiza en el capítulo 10.

GEE
Ejercicios 13-16

TEOREMA 7.2.4

Las tres medianas de un triángulo son concurrentes en un punto que está a dos tercios de la distancia desde cualquier vértice hasta el punto medio del lado opuesto.

El punto de concurrencia para las tres medianas es el **centroide** del triángulo. En la figura 7.21, el punto C es el centroide del $\triangle RST$. De acuerdo con el teorema 7.2.4, $RC = \frac{2}{3}(RM)$, $SC = \frac{2}{3}(SN)$ y $TC = \frac{2}{3}(TP)$.

Descubra

En una hoja de papel trace un triángulo y sus medianas. Marque la figura igual que en la figura 7.21.

a) Encuentre el valor de $\frac{RC}{RM}$.

b) Encuentre el valor de $\frac{SC}{CN}$.

RESPUESTAS

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{1}$ o 2

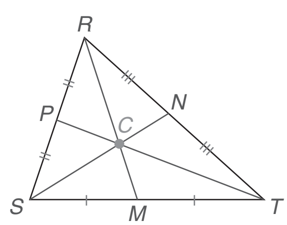


Figura 7.21

EJEMPLO 6

Suponga que las medianas del $\triangle RST$ en la figura 7.21 tienen longitudes $RM = 12$, $SN = 15$ y $TP = 18$. El centroide del $\triangle RST$ es el punto C. Encuentre la longitud de:

a) RC b) CM c) SC

Solución

a) $RC = \frac{2}{3}(RM)$, por tanto $RC = \frac{2}{3}(12) = 8$.
b) $CM = RM - RC$, por tanto $CM = 12 - 8 = 4$.
c) $SC = \frac{2}{3}(SN)$, por tanto $SC = \frac{2}{3}(15) = 10$. ■

Las relaciones siguientes también se implican por el teorema 7.2.4. En la figura 7.21 $RC = 2(CM)$, $SC = 2(CN)$ y $CT = 2(PC)$. De manera equivalente, $CM = \frac{1}{2}(RC)$, $CN = \frac{1}{2}(SC)$ y $PC = \frac{1}{2}(CT)$.

EJEMPLO 7

DADO: En la figura 7.22(a), el $\triangle RST$ isósceles con $RS = RT = 15$ y $ST = 18$; las medianas $\overline{RZ}$, $\overline{TX}$ y $\overline{SY}$ convergen en el centroide Q.

ENCUENTRE: RQ y QZ.

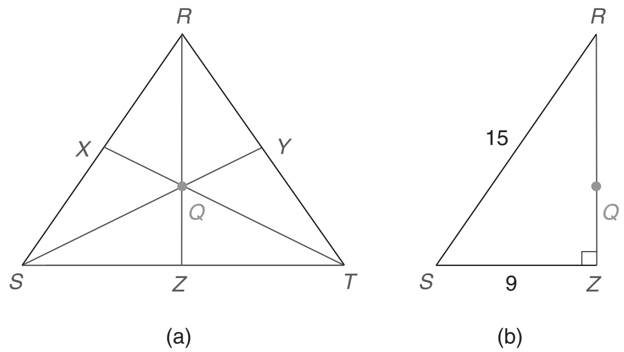


Figura 7.22

Solución La mediana $\overline{RZ}$ separa el $\triangle RST$ en dos triángulos rectángulos congruentes, el $\triangle RZS$ y el $\triangle RZT$; esto se deduce de LLL. Con Z el punto medio de $\overline{ST}$, $SZ = 9$.

Utilizando el teorema de Pitágoras con $\triangle RZS$ en la figura 7.22(b), se tiene

$$\begin{aligned}(RS)^2 &= (RZ)^2 + (SZ)^2\\ 15^2 &= (RZ)^2 + 9^2\\ 225 &= (RZ)^2 + 81\\ (RZ)^2 &= 144\\ RZ &= 12\end{aligned}$$

GEE

Por el teorema 7.2.4, $RQ = \frac{2}{3}(RZ) = \frac{2}{3}(12) = 8$

Ejercicios 17-22 Como $QZ = \frac{1}{2}(RQ)$, se deduce que $QZ = 4$. ■

Para los bisectores de ángulo de ciertos cuadriláteros es *posible* que sean congruentes. De igual forma, los bisectores perpendiculares de los lados de un cuadrilátero *pueden* ser concurrentes. Por supuesto, hay cuatro bisectores de ángulo y cuatro bisectores perpendiculares de lados a considerar. En el ejemplo 8 se analiza esta situación.

EJEMPLO 8

Utilice intuición y la figura 7.23 para decidir cuáles de los siguientes son concurrentes.

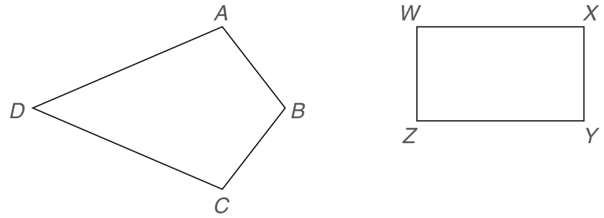


Figura 7.23

a) Los bisectores de ángulo de una cometa
b) Los bisectores perpendiculares de los lados de una cometa
c) Los bisectores de ángulo de un rectángulo
d) Los bisectores perpendiculares de los lados de un rectángulo

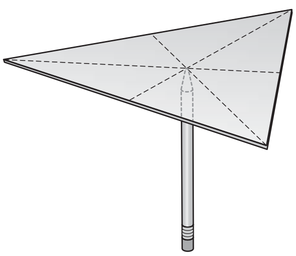
Solución

a) Los bisectores de ángulo de la cometa son concurrentes en un punto (el incentro de la cometa).
b) Los bisectores $\perp$ de los lados de la cometa no son concurrentes (a menos que el $\angle A$ y el $\angle B$ sean ángulos rectos).
c) Los bisectores de ángulo del rectángulo no son concurrentes (a menos que el rectángulo sea un cuadrado).
d) Los bisectores $\perp$ de los lados del rectángulo son concurrentes (el circuncentro del rectángulo es también el punto de intersección de las diagonales).

NOTA: El estudiante debe hacer dibujos para comprobar los resultados en el ejemplo 8. ■

Descubra

Tome una pieza de cartón o papel grueso. Trace un triángulo y recórtelo. Ahora utilice una regla para marcar los puntos medios de cada lado y trace las medianas para ubicar el centroide. Coloque la punta de un bolígrafo o un lápiz en el centroide del triángulo y observe qué tan bien puede equilibrar la región triangular.

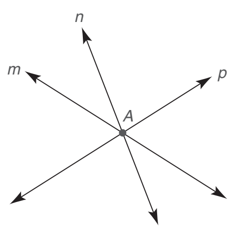


El centroide de una región triangular en ocasiones se denomina *centro de masa* o *centro de gravedad*. Esto se debe a que la región de espesor uniforme se "equilibra" sobre el punto conocido como su centroide. Considere la actividad Descubra de la izquierda.

Ejercicios 7.2

1. En la figura, ¿son concurrentes las rectas m, n y p?

2. Nombre el punto de concurrencia para las rectas m, n y p, si existe uno.



Ejercicios 1, 2

3. ¿Cuál es el nombre general del punto de concurrencia para los tres bisectores de ángulo de un triángulo?

4. ¿Cuál es el nombre general del punto de concurrencia para las tres alturas de un triángulo?

5. ¿Cuál es el nombre general del punto de concurrencia para los tres bisectores perpendiculares de los lados de un triángulo?

6. ¿Cuál es el nombre general del punto de concurrencia para las tres medianas de un triángulo?

7. ¿Cuáles rectas o segmentos de recta o rayos se deben trazar o construir en un triángulo para localizar su
a) incentro?
b) circuncentro?
c) ortocentro?
d) centroide?

8. ¿Realmente es necesario construir los tres bisectores de ángulo de los ángulos de un triángulo para localizar su incentro?

9. ¿Realmente es necesario construir los tres bisectores perpendiculares de los lados de un triángulo para localizar su circuncentro?

10. Para localizar el ortocentro, ¿es necesario construir las tres alturas de un triángulo rectángulo?

11. ¿Para qué tipo de triángulo son iguales los bisectores de ángulo, las medianas, los bisectores perpendiculares de los lados y las alturas?

12. ¿Qué punto en un triángulo rectángulo es el ortocentro del triángulo rectángulo?

13. ¿Qué punto en un triángulo rectángulo es el circuncentro del triángulo rectángulo?

14. ¿El centroide se debe encontrar en la altura o en la base de un triángulo isósceles?

15. Trace un triángulo y, por construcción, encuentre su incentro.

16. Trace un triángulo agudo y, por construcción, encuentre su circuncentro.

17. Trace un triángulo obtuso y, por construcción, encuentre su circuncentro.

18. Trace un triángulo agudo y, por construcción, encuentre su ortocentro.

19. Trace un triángulo obtuso y, por construcción, encuentre su ortocentro.

(SUGERENCIA: Tendrá que extender los lados opuestos a los ángulos agudos.)

20. Trace un triángulo agudo y, por construcción, encuentre el centroide del triángulo.

(SUGERENCIA: Inicie construyendo los bisectores perpendiculares de los lados.)

21. Trace un triángulo obtuso y, por construcción, encuentre el centroide del triángulo.

(SUGERENCIA: Inicie construyendo los bisectores perpendiculares de los lados.)

22. ¿Está siempre ubicado el incentro en el interior del triángulo?

23. ¿Está siempre ubicado el circuncentro en el interior del triángulo?

24. Encuentre la longitud del radio del círculo inscrito para un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8.

25. Encuentre la distancia desde el circuncentro hasta cada vértice de un triángulo equilátero cuyos lados miden 10.

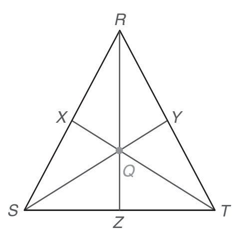
26. Un triángulo tiene ángulos que miden 30, 30 y 120°. Si los lados congruentes miden 6 unidades cada uno, encuentre la longitud del radio del círculo circunscrito.

27. *Dado:* $\triangle RST$ isósceles
$RS = RT = 17$ y $ST = 16$
Medianas $\overline{RZ}$, $\overline{TX}$ y $\overline{SY}$ convergen en el centroide Q

Encuentre: RQ y SQ

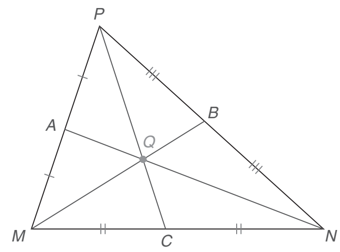
28. *Dado:* $\triangle RST$ isósceles
$RS = RT = 10$ y
$ST = 16$
Medianas $\overline{RZ}$, $\overline{TX}$ y $\overline{SY}$ convergen en Q

Encuentre: RQ y QT



Ejercicios 27, 28

29. En el $\triangle MNP$, las medianas $\overline{MB}$, $\overline{NA}$ y $\overline{PC}$ se intersecan en el centroide Q.
a) Si $MQ = 8$, encuentre QB.
b) Si $QC = 3$, encuentre PQ.
c) Si $AQ = 3.5$, encuentre AN.



Ejercicios 29, 30

30. En el $\triangle MNP$, las medianas $\overline{MB}$, $\overline{NA}$ y $\overline{PC}$ se intersecan en el centroide Q.
a) Encuentre QB si $MQ = 8.2$
b) Encuentre PQ si $QC = \frac{7}{2}$
c) Encuentre AN si $AQ = 4.6$.

31. Trace un triángulo. Construya su círculo inscrito.

32. Trace un triángulo. Construya su círculo circunscrito.

33. ¿Para qué tipo de triángulo serán los mismos el incentro y el circuncentro?

34. ¿Un rectángulo tiene (a) un incentro? ¿(b) un circuncentro?

35. ¿Un cuadrado tiene (a) un incentro? ¿(b) un circuncentro?

36. ¿Un pentágono regular tiene (a) un incentro? ¿(b) un circuncentro?

37. ¿Un rombo tiene (a) un incentro? ¿(b) un circuncentro?

38. ¿Un trapezoide isósceles tiene (a) un incentro? ¿(b) un circuncentro?

39. Una compañía distribuidora planea en Illinois una sucursal que estará a la misma distancia de cada uno de sus sitios de distribución principales en Chicago, San Luis e Indianápolis. Utilice un método de construcción para ubicar la posición aproximada de la compañía distribuidora.

(**NOTA:** Trace el contorno de los dos estados en su propia hoja de papel.)

40. Se tienen planes para ubicar una agencia de respuesta a desastres en un área que es propensa a la acción de los tornados. La agencia se ubicará a distancias iguales de Wichita, Tulsa y Oklahoma City. Utilice un método de construcción para ubicar la posición aproximada de la agencia.

(**NOTA:** Trace el contorno de los dos estados en su propia hoja de papel.)

***41.** Un círculo se inscribe en un triángulo isósceles con catetos de longitud 10 pulg y una base de longitud 12 pulg. Encuentre la longitud del radio para cada círculo.

7.3 Más acerca de polígonos regulares

CONCEPTOS CLAVE
- Polígono regular
- Centro y ángulo central de un polígono regular
- Radio y apotema de un polígono regular

En esta sección se desarrollan varias propiedades interesantes de los polígonos regulares. Por ejemplo, cada polígono regular tiene tanto un círculo inscrito como un círculo circunscrito; además, estos dos círculos son concéntricos. En el ejemplo 1 se utilizan bisectores de los ángulos de un cuadrado para localizar el centro del círculo inscrito. El centro, que se determina utilizando los bisectores de cualesquiera dos ángulos consecutivos, es equidistante de los lados del cuadrado.

Recuerde

Un polígono regular es equilátero y equiángulo.

EJEMPLO 1

Dado el cuadrado *ABCD* en la figura 7.24(a) construya el $\odot O$ inscrito.

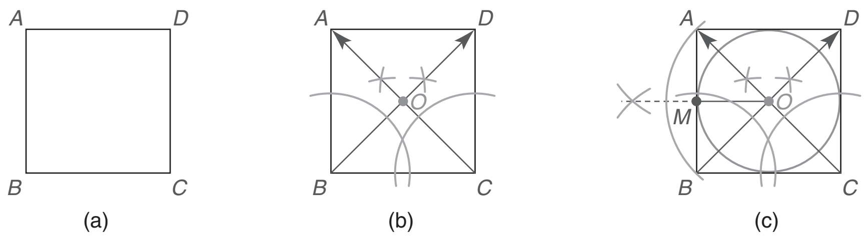


Figura 7.24

Solución Figura 7.24(b): El centro de un círculo inscrito se debe encontrar a la misma distancia de cada lado. El centro O es el punto de concurrencia de los bisectores de ángulo del cuadrado. Por tanto, para identificar el punto O se construyen los bisectores de ángulo del $\angle B$ y del $\angle C$.

Figura 7.24(c): Se construye $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, OM es la distancia de O a $\overline{AB}$ y la longitud del radio del círculo inscrito. Por último, se construye el $\odot O$ inscrito con radio $\overline{OM}$ como se muestra. ■

En el ejemplo 2 se utilizan los bisectores perpendiculares de dos lados consecutivos de un hexágono regular para localizar el centro del círculo circunscrito. El centro determina un punto que es equidistante de los vértices del hexágono.

EJEMPLO 2

Dado el hexágono regular *MNPQRS* en la figura 7.25(a), construya el $\odot X$ circunscrito.

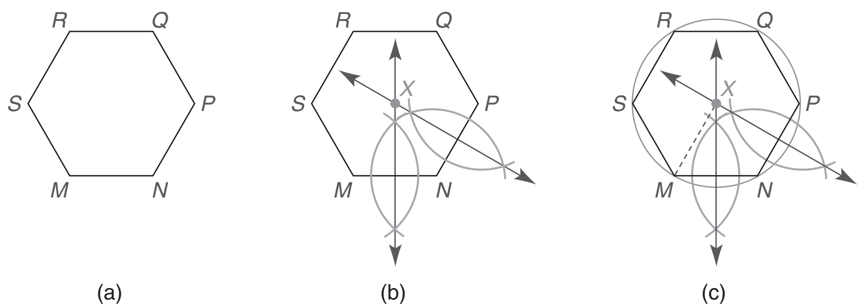


Figura 7.25

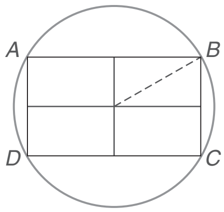


Figura 7.26

Solución Figura 7.25(a): El centro de un círculo circunscrito se debe encontrar a la misma distancia de cada vértice del hexágono. El centro X es el punto de concurrencia de los bisectores perpendiculares de dos lados consecutivos del hexágono. En la figura 7.25(b) se construyen los bisectores perpendiculares de $\overline{MN}$ y $\overline{NP}$ para localizar el punto X.

Figura 7.25(c): Donde XM es la distancia desde X hasta el vértice M se utiliza el radio $\overline{XM}$ para construir el $\odot X$ circunscrito. ■

Para un rectángulo que no es un polígono regular sólo se puede circunscribir el círculo (vea la figura 7.26). ¿Por qué? Para un rombo (que tampoco es un polígono regular), sólo se puede inscribir el círculo (vea la figura 7.27). ¿Por qué?

Como se verá se pueden construir círculos inscrito y circunscrito para polígonos regulares debido a que son equiláteros y equiángulos. En la figura 7.28 se muestran algunos de los polígonos regulares.

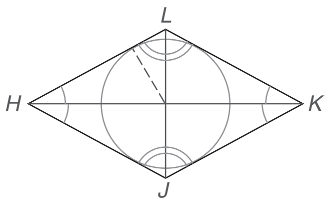
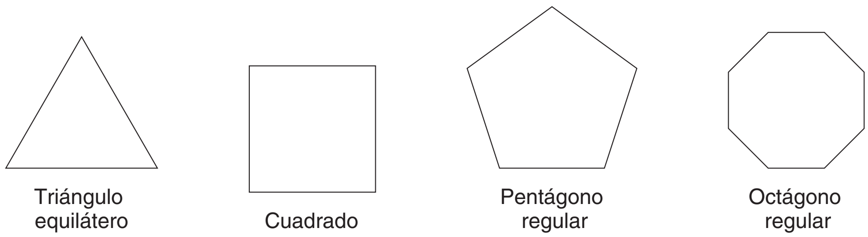


Figura 7.27



Ejercicios 1-6

Figura 7.28

En el capítulo 2 se vio que la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono con n lados está dada por $S = (n - 2)180$. A su vez, la medida I de cada ángulo interno de un polígono regular de n lados está dada por $I = \frac{(n-2)180}{n}$. La suma de las medidas de los ángulos externos de cualquier polígono siempre es 360°. Por tanto, la medida E de cada ángulo externo de un polígono regular de n lados es $E = \frac{360}{n}$.

EJEMPLO 3

a) Encuentre la medida de cada ángulo interno de un polígono regular con 15 lados.
b) Encuentre el número de lados de un polígono regular si cada ángulo interno mide 144°.

Solución

a) Puesto que todos los n ángulos miden lo mismo, la fórmula para la medida de cada ángulo interno,

$$I = \frac{(n-2)180}{n}$$

será

$$I = \frac{(15-2)180}{15}$$

que se simplifica a 156°.

b) Dado que $I = 144°$, se puede determinar el número de lados resolviendo la ecuación

$$\frac{(n - 2)180}{n} = 144$$

Entonces
$$\begin{aligned} (n - 2)180 &= 144n \\ 180n - 360 &= 144n \\ 36n &= 360 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

NOTA: En el ejemplo 3(a) se podría haber determinado la medida de cada ángulo externo y luego utilizar el hecho de que el ángulo interno es su suplemento. Con $n = 15$, $E = \frac{360°}{n}$ conduce a $E = 24°$. Se tiene que $I = 180° - 24°$ o $156°$. En el ejemplo 3(b) el hecho de que $I = 144°$ conduce a $E = 36°$. A su vez, $E = \frac{360°}{n}$ será $36° = \frac{360°}{n}$, lo que conduce a $n = 10$. ■

Ejercicios 7, 8

Los polígonos regulares permiten inscribir y circunscribir un círculo. La demostración del teorema siguiente establecerá las relaciones siguientes:

1. Los centros de los círculos inscrito y circunscrito de un polígono regular son los mismos.
2. Los bisectores de ángulo de dos ángulos consecutivos o los bisectores perpendiculares de dos lados consecutivos se pueden utilizar para ubicar el centro común del círculo inscrito y del círculo circunscrito.
3. El radio del círculo inscrito es cualquier segmento de recta desde el centro trazado perpendicular a un lado del polígono regular; el radio del círculo circunscrito une el centro con cualquier vértice del polígono regular.

TEOREMA 7.3.1

Un círculo se puede circunscribir (o inscribir) respecto a cualquier polígono regular.

DADO: Polígono regular *ABCDEF* [vea la figura 7.29(a)].

DEMUESTRE: Un círculo *O* se puede circunscribir respecto a *ABCDEF* y un círculo con centro *O* se puede inscribir en *ABCDEF*.

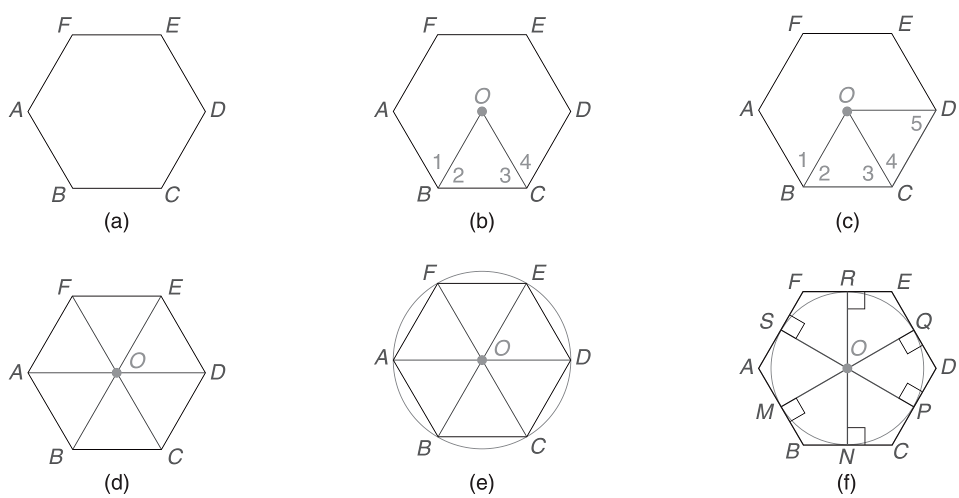


Figura 7.29

DEMOSTRACIÓN: Sea O el punto donde convergen los bisectores de ángulo para el $\angle ABC$ y el $\angle BCD$. [Vea la figura 7.29(b) de la página 340.] Entonces $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$.

Puesto que $\angle ABC \cong \angle BCD$ (por la definición de un polígono regular), se tiene que

$$\frac{1}{2}\text{m}\angle ABC = \frac{1}{2}\text{m}\angle BCD$$

A su vez, $\text{m}\angle 2 = \text{m}\angle 3$, por tanto $\angle 2 \cong \angle 3$. Entonces $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ (los lados opuestos $\cong$ de $\angle$s de un $\triangle$ también son $\cong$).

Del hecho de que $\angle 3 \cong \angle 4$, $\overline{OC} \cong \overline{OC}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, se deduce que $\triangle OCB \cong \triangle OCD$ por LAL. [Vea la figura 7.29(c).] A su vez, $\overline{OC} \cong \overline{OD}$ por PCTCC, por tanto $\angle 4 \cong \angle 5$ debido a que se encuentran opuestos a $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$.

Ya que $\angle 5 \cong \angle 4$ y $\text{m}\angle 4 = \frac{1}{2}\text{m}\angle BCD$, se tiene que $\text{m}\angle 5 = \frac{1}{2}\text{m}\angle BCD$. Pero $\angle BCD \cong \angle CDE$ ya que éstos son ángulos de un polígono regular. Por tanto, $\text{m}\angle 5 = \frac{1}{2}\text{m}\angle CDE$ y $\overline{OD}$ biseca $\angle CDE$.

Continuando este procedimiento, se puede demostrar que $\overline{OE}$ biseca $\angle DEF$, $\overline{OF}$ biseca $\angle EFA$ y $\overline{OA}$ biseca $\angle FAB$. Los triángulos resultantes, $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOE$, $\triangle EOF$ y $\triangle FOA$, son congruentes por ALA. [Vea la figura 7.29(d).] Por PCTCC, $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD} \cong \overline{OE} \cong \overline{OF}$. Con O como centro y $\overline{OA}$ como radio, el círculo O se puede circunscribir respecto a $ABCDEF$, como se muestra en la figura 7.29(e).

Dado que las alturas correspondientes de $\triangle$s $\cong$ también son congruentes, se observa que $\overline{OM} \cong \overline{ON} \cong \overline{OP} \cong \overline{OQ} \cong \overline{OR} \cong \overline{OS}$, donde éstas son las alturas de las bases de los triángulos.

Una vez más con O como el centro, pero ahora con un radio igual a la longitud OM, se completa el círculo inscrito $ABCDEF$. [Vea la figura 7.29(f).] ■

En la demostración del teorema 7.3.1 se trazó un hexágono regular. El método de demostración no debería de cambiar, sin importar el número de lados del polígono elegido. En la demostración, el punto O fue el centro común de los círculos circunscrito e inscrito para $ABCDEF$.

Debido a que cualquier polígono regular se puede inscribir en un círculo, cualquier polígono regular es cíclico.

DEFINICIÓN

El **centro de un polígono regular** es el centro común para los círculos inscrito y circunscrito.

NOTA: La definición anterior no indica cómo localizar el centro de un polígono regular. El centro es la intersección de los bisectores de ángulo de dos ángulos consecutivos; de manera alterna, la intersección de los bisectores perpendiculares de dos lados consecutivos se puede utilizar para localizar el centro del polígono regular. Observe que un polígono regular tiene un centro, ya sea que se muestre o no cualquiera de los círculos.

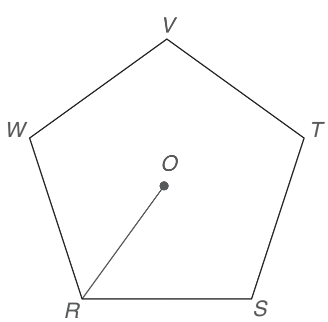


Figura 7.30

En la figura 7.30, el punto O es el centro del pentágono regular $RSTVW$. En esta figura, $\overline{OR}$ se denomina "radio" del pentágono regular.

DEFINICIÓN

Un **radio de un polígono regular** es cualquier segmento de recta que une el centro del polígono regular con uno de sus vértices.

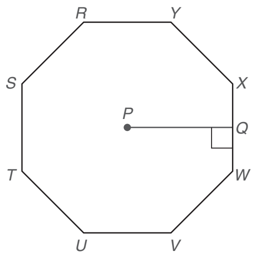


Figura 7.31

En la demostración del teorema 7.3.1, se vio que "todos los radios de un polígono regular son congruentes".

DEFINICIÓN

Una **apotema** de un polígono regular es cualquier segmento de recta trazado desde el centro de ese polígono hasta uno de los lados.

En el octágono regular *RSTUVWXY* con centro *P* (vea la figura 7.31), el segmento $\overline{PQ}$ es una apotema. Cualquier polígono regular de *n* lados tiene *n* apotemas y *n* radios. La demostración del teorema 7.3.1 establece que "Todas las apotemas de un polígono regular son congruentes".

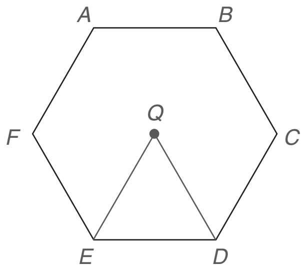


Figura 7.32

DEFINICIÓN

Un **ángulo central de un polígono regular** es un ángulo formado por dos radios consecutivos del polígono regular.

En el hexágono regular *ABCDEF* con centro *Q* (vea la figura 7.32), el ángulo *EQD* es un ángulo central. Debido a las congruencias de los triángulos en la demostración del teorema 7.3.1, se observa que "todos los ángulos centrales de un polígono regular son congruentes". Esto conduce al teorema 7.3.2.

TEOREMA 7.3.2

La medida del ángulo central de un polígono regular de *n* lados está dada por $c = \frac{360}{n}$.

En el ejemplo 4 se aplica el teorema 7.3.2.

EJEMPLO 4

a) Encuentre la medida del ángulo central de un polígono regular de 9 lados.
b) Encuentre el número de lados de un polígono regular cuyo ángulo central mide 72°.

Solución

a) $c = \frac{360}{9} = 40°$
b) $72 = \frac{360}{n} \rightarrow 72n = 360 \rightarrow n = 5$ lados ■

Los dos teoremas siguientes se deducen de la demostración del teorema 7.3.1.

TEOREMA 7.3.3

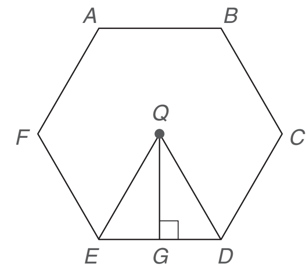
Cualquier radio de un polígono regular biseca el ángulo en el vértice hacia el cual se traza.

TEOREMA 7.3.4

Cualquier apotema de un polígono regular biseca el lado del polígono hacia el cual se traza.

EJEMPLO 5

Dado que cada lado del hexágono regular *ABCDEF* tiene una longitud de 4 pulg, encuentre la longitud del:



a) Radio $\overline{QE}$
b) Apotema $\overline{QG}$

Solución

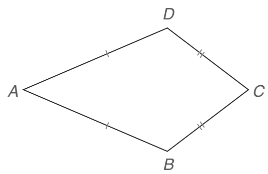
a) Por el teorema 7.3.2, la medida del $\angle EQD$ es $\frac{360°}{6}$, o 60°. Con $\overline{QE} \cong \overline{QD}$, $\triangle QED$ es equiángulo y equilátero. Entonces $QE = 4$ pulg.

b) Con la apotema $\overline{QG}$ como se muestra, el $\triangle QEG$ es un triángulo 30°-60°-90° en el cual $m\angle EQD = 30°$. Por el teorema 7.3.4, $EG = 2$ pulg. Con $\overline{QG}$ opuesto al ángulo de 60° del $\triangle QEG$, se deduce que $QG = 2\sqrt{3}$ pulg. ■

GEE
Ejercicios 9-20

Ejercicios 7.3

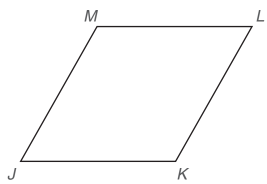
1. Describa, si es posible, ¿cómo inscribiría un círculo dentro de la cometa *ABCD*?



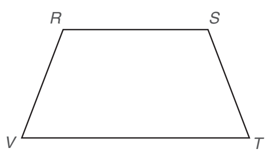
Ejercicios 1, 2

2. ¿Qué condición se debe satisfacer para que sea posible circunscribir un círculo respecto a la cometa *ABCD*?

3. Describa, si es posible, ¿cómo inscribiría un círculo en el rombo *JKLM*?



4. ¿Qué condición se debe satisfacer para que sea posible circunscribir un círculo respecto al trapezoide *RSTV*?



En los ejercicios 5 al 8, realice las construcciones.

5. Inscriba un octágono regular dentro de un círculo.

6. Inscriba un triángulo equilátero dentro de un círculo.

7. Circunscriba un cuadrado respecto a un círculo.

8. Circunscriba un triángulo equilátero respecto a un círculo.

9. Encuentre el perímetro de un octágono regular si la longitud de cada lado es 3.4 pulg.

10. En un polígono regular con cada lado de longitud 6.5 cm, el perímetro es 130 cm. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular?

11. Si el perímetro de un dodecágono regular (12 lados) es 99.6 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?

12. Si la apotema de un cuadrado mide 5 cm, encuentre el perímetro del cuadrado.

13. Encuentre las longitudes de la apotema y el radio de un cuadrado cuyos lados tienen una longitud de 10 pulg.

14. Encuentre las longitudes de la apotema y el radio de un hexágono regular cuyos lados tienen una longitud de 6 cm.

15. Encuentre las longitudes del lado y del radio de un triángulo equilátero cuya longitud de la apotema es 8 pies.

16. Encuentre las longitudes del lado y del radio de un hexágono regular cuya longitud de la apotema es 10 m.

17. Encuentre la medida del ángulo central de un polígono regular de

a) 3 lados. c) 5 lados.
b) 4 lados. d) 6 lados.

18. Encuentre la medida del ángulo central de un polígono regular de

a) 8 lados. c) 9 lados.
b) 10 lados. d) 12 lados.

19. Encuentre el número de lados de un polígono regular que tiene un ángulo central que mide

a) 90°. c) 60°.
b) 45°. d) 24°.

20. Encuentre el número de lados de un polígono regular que tiene un ángulo central que mide

a) 30°. c) 36°.
d) 72°. d) 20°.

21. Encuentre la medida de cada ángulo interno de un polígono regular cuyo ángulo central mide

a) 40°. c) 60°.
b) 45°. d) 90°.

22. Encuentre la medida de cada ángulo externo de un polígono regular cuyo ángulo central mide

a) 30°. c) 45°.
b) 40°. d) 120°.

23. Encuentre el número de lados para un polígono regular en el que la medida de cada ángulo interno es 60° mayor que la medida de cada ángulo central.

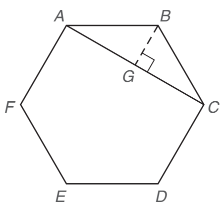
24. Encuentre el número de lados para un polígono regular en el que la medida de cada ángulo interno es 90° mayor que la medida de cada ángulo central.

25. ¿Existe un polígono regular para el cual cada ángulo central mida

a) 40°? c) 60°?
b) 50°? d) 70°?

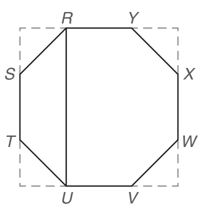
26. Dado el hexágono regular *ABCDEF* con cada lado de longitud 6, encuentre la longitud de la diagonal $\overline{AC}$.

(SUGERENCIA: Con G en $\overline{AC}$, trace $\overline{BG} \perp \overline{AC}$.)



27. Dado el octágono regular *RSTUVWXY* con cada lado de longitud 4, encuentre la longitud *RU*.

(SUGERENCIA: Los lados extendidos, como se muestra, forman un cuadrado.)

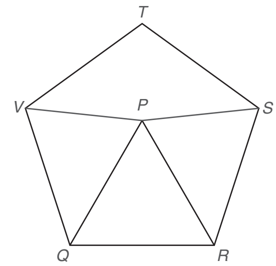


28. Dado que *RSTVQ* es un pentágono regular y el $\triangle PQR$ es equilátero en la figura siguiente, determine

a) el *tipo* de triángulo representado por el $\triangle VPQ$.
b) el *tipo* de cuadrilátero representado por *TVPS*.

29. *Dado:* Pentágono regular *RSTVQ* con $\triangle PQR$ equilátero

Encuentre: $m\angle VPS$



Ejercicios 28, 29

30. *Dado:* Pentágono regular *JKLMN* (no se muestra) con diagonales $\overline{LN}$ y $\overline{KN}$

Encuentre: $m\angle LNK$

***31.** *Demuestre:* Si un círculo se divide en *n* arcos congruentes ($n \geq 3$), las cuerdas determinadas al unir puntos extremos consecutivos de estos arcos forman un polígono regular.

***32.** *Demuestre:* Si un círculo se divide en *n* arcos congruentes ($n \geq 3$), la tangente trazada en los puntos extremos de estos arcos forman un polígono regular.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

El valor de π

En geometría, cualesquiera dos figuras que tienen la misma forma se describen como semejantes. Ya que todos los círculos tienen la misma forma, se dice que todos los círculos son semejantes entre sí. Al igual que la proporcionalidad existe entre lados correspondientes de triángulos semejantes, se puede demostrar una proporcionalidad entre las circunferencias (distancias alrededor) y diámetros (distancias a través) de círculos. Al representar las circunferencias de los círculos en la figura 7.33 por C_1, C_2 y C_3 y sus longitudes correspondientes de los diámetros por d_1, d_2 y d_3, se puede afirmar que

$$\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2} = \frac{C_3}{d_3} = k$$

para alguna constante de proporcionalidad k.

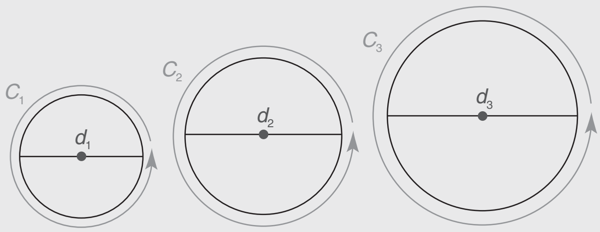


Figura 7.33

Se denota la constante k descrita antes por la letra griega π. Por tanto, $\pi = \frac{C}{d}$ en cualquier círculo. Se deduce que $C = \pi d$ o $C = 2\pi r$ (ya que $d = 2r$ en cualquier círculo). Al aplicar estas fórmulas para la circunferencia de un círculo con frecuencia se deja π en la respuesta, de manera que el resultado sea exacto. Cuando se necesita una aproximación de la circunferencia (y más adelante del área) de un círculo, se utilizan varias sustituciones comunes para π. Entre éstas están $\pi \approx \frac{22}{7}$ y $\pi \approx 3.14$. En una calculadora se puede visualizar el valor $\pi \approx 3.1415926535$.

Dado que π se necesita en muchas aplicaciones que comprenden la circunferencia o el área de un círculo con frecuencia se requiere su aproximación; pero encontrar una aproximación precisa de π no fue rápido ni fácil. La fórmula para la circunferencia se puede expresar como $C = 2\pi r$, pero la fórmula para el área del círculo es $A = \pi r^2$. A ésta y otras fórmulas del área se les pondrá más atención en el capítulo 8.

En la bibliografía hay varias referencias al valor de π. Una de las primeras se encuentra en la *Biblia*; en el versículo 23 del libro I Reyes, Capítulo 7 se describe la distancia alrededor de un tanque como tres veces la distancia a través del mismo (lo que sugiere que π es igual a 3, una aproximación muy burda). Tal vez en esa época no se requería mayor precisión en algunas aplicaciones.

En el contenido del papiro Rhind (un documento de más de 3 000 años de antigüedad), el escriba Ahmes da la fórmula para el área de un círculo como $\left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$. Para determinar la aproximación egipcia de π, se necesita desarrollar esta expresión como se muestra:

$$\left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\cdot 2r\right)^2 = \left(\frac{16}{9}r\right)^2 = \frac{256}{81}r^2$$

En la fórmula para el área del círculo, el valor de π es el multiplicador (coeficiente) de r^2. Como este coeficiente es $\frac{256}{81}$ (que tiene el equivalente decimal de 3.1604), los egipcios tenían una aproximación mejor de π que la referida en el libro I Reyes.

Arquímedes, el brillante geómetra griego, sabía que la fórmula para el área de un círculo era $A = \frac{1}{2}Cr$ (con C la circunferencia y r la longitud del radio). Su fórmula es equivalente a la que se utiliza en la actualidad y se desarrolla como sigue:

$$A = \frac{1}{2}Cr = \frac{1}{2}(2\pi r)r = \pi r^2$$

La segunda proposición en el trabajo de Arquímedes *Medida del círculo* desarrolla una relación entre el área de un círculo y el área de un cuadrado en el que está inscrito. (Vea la figura 7.34.) En particular Arquímedes afirmó que la relación del área del círculo a la del cuadrado era 11:14. Esto conduce a un conjunto de ecuaciones y a una aproximación del valor de π.

$$\frac{\pi r^2}{(2r)^2} \approx \frac{11}{14}$$
$$\frac{\pi r^2}{4r^2} \approx \frac{11}{14}$$
$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{11}{14}$$
$$\pi \approx 4 \cdot \frac{11}{14} \approx \frac{22}{7}$$

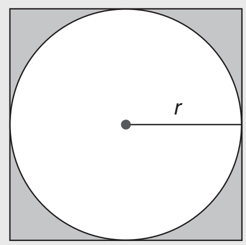


Figura 7.34

Después Arquímedes mejoró su aproximación de π demostrando que

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Las calculadoras actuales dan aproximaciones excelentes para el número irracional π. Sin embargo, se debe recordar que π es un número irracional que sólo se puede expresar como un valor exacto mediante el símbolo π.

PERSPECTIVA DE APLICACIÓN

El círculo de nueve puntos

En el estudio de la geometría existe un dato curioso conocido como círculo de nueve puntos; una curiosidad ya que su valor práctico consiste en el razonamiento necesario para comprobar su credibilidad.

En el $\triangle ABC$, en la figura 7.35, se ubican los puntos siguientes:

> M, N y P, los puntos medios de los lados del $\triangle ABC$, D, E y F, los puntos en el $\triangle ABC$ determinados por sus alturas, y X, Y y Z, los puntos medios de los segmentos de recta determinados por el ortocentro O y los vértices del $\triangle ABC$.

Mediante estos nueve puntos es posible trazar o construir el círculo que se muestra en la figura 7.35.

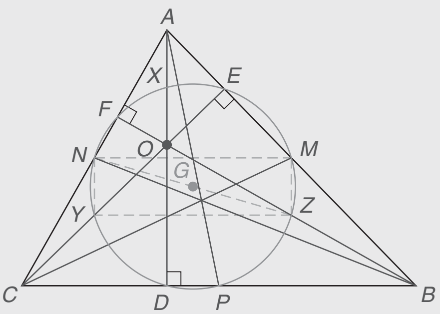


Figura 7.35

Para comprender por qué se puede trazar el círculo de nueve puntos, se demuestra que el cuadrilátero $NMZY$ es un paralelogramo y un rectángulo. Dado que $\overline{NM}$ une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, se sabe que $\overline{NM} \parallel \overline{CB}$ y $NM = \frac{1}{2}(CB)$. De igual forma, Y y Z son los puntos medios de los lados del $\triangle OBC$, por tanto $\overline{YZ} \parallel \overline{CB}$ y $YZ = \frac{1}{2}(CB)$. Por el teorema 4.2.1, $NMZY$ es un paralelogramo. Entonces $\overline{NY}$ debe ser paralelo a $\overline{MZ}$. Con $\overline{CB} \perp \overline{AD}$ se deduce que $\overline{NM}$ también debe ser perpendicular a $\overline{AD}$. A su vez, $\overline{MZ} \perp \overline{NM}$ y $NMZY$ es un rectángulo en la figura 7.35. Es posible circunscribir un círculo respecto a cualquier rectángulo; de hecho, la longitud del radio del círculo circunscrito es la mitad de una diagonal del rectángulo, por lo que se elige $r = \frac{1}{2}(NZ) = NG$. Este círculo con certeza contiene los puntos N, M, Z y Y.

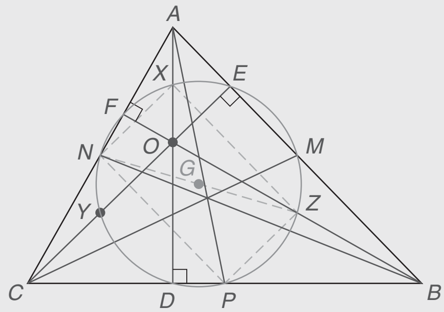


Figura 7.36

Aunque no se dan los detalles también se puede demostrar que el cuadrilátero $XZPN$ de la figura 7.36 también es un rectángulo. Además, $\overline{NZ}$ también es una diagonal del rectángulo $XZPN$. Entonces se puede elegir el radio del círculo circunscrito para el rectángulo $XZPN$ que tenga la longitud $r = \frac{1}{2}(NZ) = NG$. Debido a que tiene el mismo centro G y la misma longitud del radio r que el círculo que se circunscribió respecto al rectángulo $NMZY$, se observa que el mismo círculo debe contener los puntos N, X, M, Z, P y Y.

Por último se necesita demostrar que el círculo en la figura 7.37 con centro G y radio $r = \frac{1}{2}(NZ)$ contendrá los puntos D, E y F. Esto se puede efectuar mediante un argumento indirecto. Si se supone que estos puntos *no* se encuentran en el círculo, entonces se contradice el hecho de que un ángulo inscrito en un semicírculo debe ser un ángulo recto. Por supuesto, $\overline{AD}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CE}$ fueron alturas del $\triangle ABC$, por lo que los ángulos inscritos en D, E y F deben medir 90°; a su vez, estos ángulos se deben encontrar dentro de semicírculos. En la figura 7.35 $\angle NFZ$ interseca un arco (un semicírculo) determinado por el diámetro $\overline{NZ}$. Por tanto D, E y F están en el mismo círculo que tiene centro G y radio r. Por lo que ¡el círculo descrito en los párrafos anteriores es el círculo de nueve puntos anticipado!

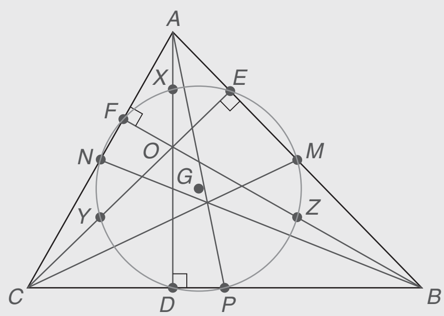


Figura 7.37

Resumen

UNA VISTA RETROSPECTIVA AL CAPÍTULO 7

En el capítulo 7 se utilizó el concepto de lugar geométrico de puntos para establecer la concurrencia de relaciones lineales que se abordaron en la sección 7.2. A su vez, estos conceptos de lugar geométrico y concurrencia permitieron demostrar que un polígono regular tiene un círculo inscrito y uno circunscrito; en particular, estos círculos tienen un centro común.

UNA VISTA PRELIMINAR DEL CAPÍTULO 8

Un objetivo del capítulo siguiente es abordar las áreas de triángulos, de ciertos cuadriláteros y de polígonos regulares. Se considerarán perímetros de polígonos y la circunferencia de un círculo. Se estudia el área de un círculo y el área de un sector de un círculo. Los triángulos rectángulos especiales tendrán un papel importante al determinar las áreas de estas figuras planas.

CONCEPTOS CLAVE

7.1

Lugar geométrico de puntos en un plano • Lugar geométrico de puntos en el espacio

7.2

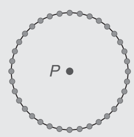
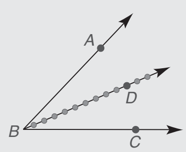
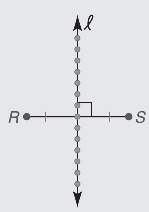
Rectas concurrentes • Incentro • Incírculo • Circuncentro • Circuncírculo • Ortocentro • Centroide

7.3

Polígono regular • Centro y ángulo central • Radio • Apotema

TABLA 7.1 Una vista general del capítulo 7

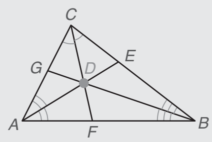
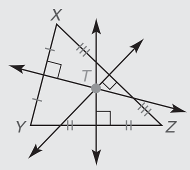
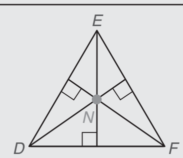
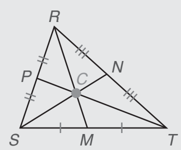
▶ Problemas selectos de lugar geométrico (en un plano)

LUGAR GEOMÉTRICO	FIGURA	DESCRIPCIÓN
Lugar geométrico de puntos que están a una distancia fija r de un punto fijo P		El círculo con centro P y radio r
Lugar geométrico de puntos que son equidistantes de los lados de un ángulo		El bisector $\overrightarrow{BD}$ del $\angle ABC$
Lugar geométrico de puntos que son equidistantes de los puntos extremos de un segmento de recta		El bisector perpendicular ℓ de $\overline{RS}$

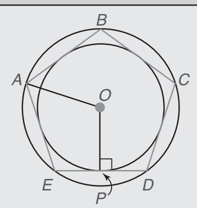
continúa

TABLA 7.1 *(continuación)*

▶ Concurrencia de rectas (en un triángulo)

TIPO DE RECTAS	FIGURA	PUNTO DE CONCURRENCIA
Bisectores de ángulo		Incentro D de $\triangle ABC$
Bisectores perpendiculares de los lados		Circuncentro T de $\triangle XYZ$
Alturas		Ortocentro N de $\triangle DEF$
Medianas		Centroide C del $\triangle RST$

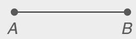
▶ Propiedades de polígonos regulares

POLÍGONO REGULAR	FIGURA	DESCRIPCIÓN
El punto O es el centro del pentágono regular $ABCDE$.		$\overline{OA}$ es un radio de $ABCDE$; $\overline{OA}$ biseca $\angle BAE$. $\overline{OP}$ es una apotema de $ABCDE$; $\overline{OP}$ es el bisector perpendicular del lado $\overline{ED}$.

Capítulo 7 EJERCICIOS DE REPASO

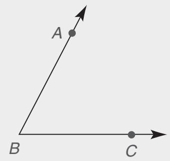
En los ejercicios de repaso 1 al 6 utilice las figuras mostradas.

1. Construya un triángulo rectángulo de manera que un cateto tenga una longitud AB y el otro tenga el doble de la longitud AB.



2. Construya un triángulo rectángulo de manera que un cateto tenga una longitud AB y la hipotenusa tenga el doble de la longitud de AB.

3. Construya un triángulo isósceles con ángulo vértice B y catetos de longitud $\overline{AB}$ (desde el segmento de recta que se muestra).



Ejercicios 1-6

4. Construya un triángulo isósceles con ángulo vértice B y una altura con la longitud de $\overline{AB}$ desde el vértice B hasta la base.

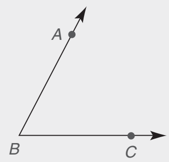
5. Construya un cuadrado con lados de longitud AB.

6. Construya un rombo con lado $\overline{AB}$ y $\angle ABC$.

En los ejercicios de repaso 7 al 13 bosqueje y describa el lugar geométrico en un plano.

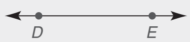
7. Encuentre el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del $\angle ABC$.

8. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que están a 1 pulg de un punto dado B.



Ejercicios 7, 8

9. Encuentre el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos D y E.



Ejercicios 9, 10

10. Encuentre el lugar geométrico de los puntos que están a $\frac{1}{2}$ pulg de $\overleftrightarrow{DE}$.

11. Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios de los radios de un círculo.

12. Encuentre el lugar geométrico de los centros de todos los círculos que pasan por dos puntos dados.

13. ¿Cuál es el lugar geométrico del centro de un centavo que rueda alrededor y permanece tangente a una moneda de medio dólar?

En los ejercicios de repaso 14 al 17 bosqueje y describa el lugar geométrico en el espacio.

14. Encuentre el lugar geométrico de los puntos a 2 cm de un punto dado A.

15. Encuentre el lugar geométrico de los puntos a 1 cm de un plano dado P.

16. Encuentre el lugar geométrico de los puntos a menos de 3 unidades de un punto dado.

17. Encuentre el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos planos paralelos.

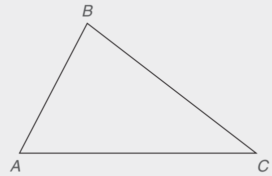
En los ejercicios de repaso 18 al 23 utilice métodos de construcción con la figura adjunta.

18. *Dado:* $\triangle ABC$
Encuentre: El incentro

19. *Dado:* $\triangle ABC$
Encuentre: El circuncentro

20. *Dado:* $\triangle ABC$
Encuentre: El ortocentro

21. *Dado:* $\triangle ABC$
Encuentre: El centroide

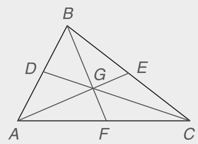


Ejercicios 18-23

22. Utilice el resultado del ejercicio 18 para inscribir un círculo en el $\triangle ABC$.

23. Utilice el resultado del ejercicio 19 para circunscribir un círculo respecto al $\triangle ABC$.

24. *Dado:* $\triangle ABC$ con medianas $\overline{AE}$, $\overline{DC}$, $\overline{BF}$
Encuentre: a) BG si $BF = 18$
b) GE si $AG = 4$
c) DG si $CG = 4\sqrt{3}$



Ejercicios 24, 25

25. *Dado:* $\triangle ABC$ con medianas $\overline{AE}$, $\overline{DC}$, $\overline{BF}$
$AG = 2x + 2y$, $GE = 2x - y$
$BG = 3y + 1$, $GF = x$
Encuentre: BF y AE

26. Para un pentágono regular, encuentre la medida de cada
a) ángulo central.
b) ángulo interno.
c) ángulo externo.

27. Para un decágono regular (10 lados), encuentre la medida de cada
a) ángulo central.
b) ángulo interno.
c) ángulo externo.

28. En un polígono regular cada ángulo central mide 45°.
a) ¿Cuántos lados tiene el polígono regular?
b) Si cada lado mide 5 cm y cada apotema tiene una longitud aproximada de 6 cm, ¿cuál es el perímetro del polígono?

29. En un polígono regular, la apotema mide 3 pulg. Cada lado del mismo polígono regular mide 6 pulg.
a) Encuentre el perímetro del polígono regular.
b) Encuentre la longitud del radio para este polígono.

30. ¿Puede un círculo circunscribirse respecto a cada una de las figuras siguientes?
a) Paralelogramo c) Rectángulo
b) Rombo d) Cuadrado

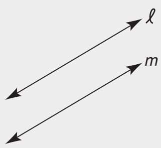
31. ¿Puede inscribirse un círculo en cada una de las figuras siguientes?
a) Paralelogramo c) Rectángulo
b) Rombo d) Cuadrado

32. La longitud del radio de un círculo inscrito en un triángulo equilátero es 7 pulg. Encuentre la longitud del radio del triángulo.

33. La longitud del radio de un círculo inscrito en un hexágono regular es 10 cm. Encuentre el perímetro del hexágono.

Capítulo 7 EXAMEN

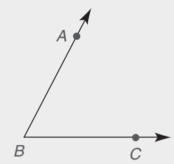
1. Trace y describa el lugar geométrico de los puntos en el plano que son equidistantes de las rectas paralelas ℓ y m.



____

____

2. Trace y describa el lugar geométrico de los puntos en el plano que son equidistantes de los lados del $\angle ABC$.



____

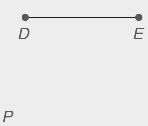
____

3. Trace y describa el lugar geométrico de los puntos en el plano que son equidistantes de los puntos extremos de $\overline{DE}$.

____

____

4. Describa el lugar geométrico de los puntos en un plano que están a una distancia de 3 cm del punto P.



Ejercicios 4, 5

____

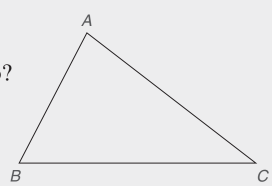
____

5. Describa el lugar geométrico de los puntos *en el espacio* que están a una distancia de 3 cm del punto P.

____

____

6. Para un triángulo dado (como el $\triangle ABC$), ¿qué *palabra* describe el punto de concurrencia para
a) los tres bisectores de ángulo? ____________________
b) las tres medianas? ____________________



Ejercicios 6, 7

7. Para un triángulo dado (como el $\triangle ABC$), ¿qué *palabra* describe el punto de concurrencia para
a) los tres bisectores perpendiculares de los lados? __________
b) las tres alturas? __________

8. ¿Para qué tipo de triángulo los bisectores de ángulo son bisectores perpendiculares de los lados, y las alturas y medianas son iguales? ___________

9. ¿Cuáles de los siguientes *deben* ser concurrentes en un punto interno de cualquier triángulo?
bisectores de ángulo bisectores perpendiculares de lados
alturas medianas _______________________

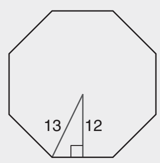
10. Clasifique como verdadero/falso:
a) Un círculo se puede inscribir en cualquier polígono regular. __________
b) Un polígono regular se puede circunscribir respecto a cualquier círculo. __________
c) Un círculo se puede circunscribir en cualquier rectángulo. __________
d) Un círculo se puede circunscribir respecto a cualquier rombo. __________

11. Un triángulo equilátero tiene un radio de longitud 3 pulg. Encuentre la longitud de
a) una apotema. __________
b) un lado. __________

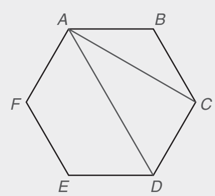
12. Para un pentágono regular, encuentre la medida de cada
a) ángulo central. __________
b) ángulo interno. __________

13. La medida de cada ángulo central de un polígono regular es 36°. ¿Cuántos lados tiene este polígono regular? ___________

14. Para un octágono regular la longitud de la apotema es aproximadamente 12 cm y la longitud del radio es aproximadamente 13 cm. Hasta el centímetro más cercano, encuentre el perímetro del octágono regular. ___________



15. Para el hexágono regular $ABCDEF$ la longitud del lado $\overline{AB}$ es 4 pulg. Encuentre la longitud exacta de
a) la diagonal $\overline{AC}$. __________
b) la diagonal $\overline{AD}$. __________



Capítulo 8

Áreas de polígonos y círculos

© Digital Vision/Getty Images

CONTENIDO

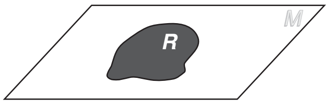
Hay un DVD disponible que cuenta con un video con explicación de conceptos, problemas de ejemplo y aplicaciones. Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

¡Poderoso! La forma única y el tamaño masivo del Pentágono en Washington, D.C., manifiesta el concepto de resistencia. En este capítulo, se introduce el concepto de área. El área de una región plana acotada es una medida de tamaño que tiene aplicaciones en construcción, agricultura, bienes raíces y más. Algunas de las unidades que se utilizan para medir el área incluyen la pulgada cuadrada y el centímetro cuadrado. Aunque las áreas de regiones cuadradas y rectangulares por lo general se calculan con facilidad, también se desarrollarán fórmulas para las áreas de regiones poligonales menos comunes. En particular, la sección 8.3 se dedica a áreas de polígonos regulares, como el Pentágono que se muestra en la fotografía. Muchas aplicaciones en el mundo real del concepto de área se encuentran en los ejercicios de este capítulo.

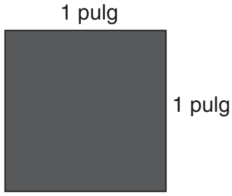
8.1 Área y postulados iniciales

CONCEPTOS CLAVE

Región plana
Unidad cuadrada
Postulados de área
Área del rectángulo, paralelogramo y triángulo
Altura y base de un paralelogramo o triángulo



(a)



(b)

Figura 8.1

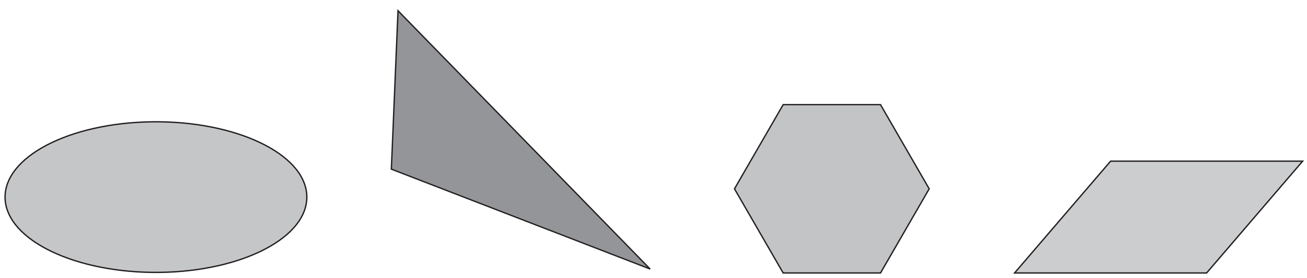
Debido a que las rectas son *unidimensionales*, al medir un segmento de recta sólo se considera la longitud. Un segmento de recta se mide en unidades lineales como pulgadas, centímetros o yardas. Cuando un segmento de recta mide 5 centímetros, se escribe $AB = 5$ cm o simplemente $AB = 5$ (si las unidades son aparentes o no se establecen). El instrumento de medición es la regla.

Un plano es una superficie *bidimensional* infinita. Una parte cerrada o acotada del plano se denomina **región**. Cuando se mide una región como R en el plano M [vea la figura 8.1(a)], a esta medición se le llama "área de la región plana". La unidad empleada para medir el área se denomina **unidad cuadrada** ya que es un cuadrado con cada lado de longitud 1 [vea la figura 8.1(b)]. La medida del área de la región R es el número de unidades cuadradas no sobrepuestas que se pueden colocar adyacentes entre sí en la región.

Las unidades cuadradas (no unidades lineales) se utilizan para medir el área. Utilizando un exponente, se escriben pulgadas cuadradas como pulg^2. La unidad representada por la figura 8.1(b) es 1 pulgada cuadrada o 1 pulg^2.

Una aplicación del área comprende medir el área de un piso que se cubrirá con una alfombra, que con frecuencia se mide en yardas cuadradas (yd^2). Otra aplicación del área implica calcular el número de cuadrados o tejas asfálticas necesarias para cubrir un techo; en esta situación, un "cuadrado" es el número de tejas necesarias para cubrir una sección de 100 pies^2 del techo.

En la figura 8.2, las regiones tienen áreas medibles y están acotadas por figuras encontradas en capítulos anteriores. Una región está **acotada** si se puede distinguir entre su interior y su exterior; al calcular el área, se mide el interior de la región.



(a) (b) (c) (d)

Figura 8.2

Se puede medir el área de la región dentro de un triángulo [vea la figura 8.2(b)]. Sin embargo, en realidad no se puede medir el área del propio triángulo (tres segmentos de recta no tienen área). No obstante, al área de la región dentro de un triángulo comúnmente se le refiere como área del triángulo.

El análisis anterior no define de manera formal una región o su área. Estos conceptos se aceptan como los términos indefinidos en el postulado siguiente.

POSTULADO 18 ▶ (Postulado del área)

Correspondiente a cada región acotada existe un número positivo único A, conocido como el área de esa región.

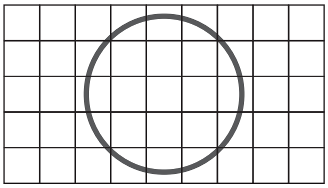


Figura 8.3

Una manera para estimar el área de una región es colocarla en una cuadrícula, como se muestra en la figura 8.3. Al contar sólo el número de cuadrados completos dentro de la región se obtiene una aproximación que es menor que el área real. Por otro lado, al contar cuadrados que están dentro o parcialmente dentro se obtiene una aproximación que es mayor que el área real. Una estimación buena del área de una región con frecuencia se da por el promedio de las aproximaciones menor y mayor justamente descritas. Si el área del círculo que se muestra en la figura 8.3 está entre 9 y 21 unidades cuadradas, se podría estimar el área como $\frac{9 + 21}{2}$ o 15 unidades cuadradas.

Para desarrollar otra propiedad del área, considere el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ (que son congruentes) en la figura 8.4. Un triángulo se puede colocar sobre el otro de manera que coincidan. ¿Cómo se relacionan las áreas de los dos triángulos? La respuesta se encuentra en el postulado siguiente.

Figura 8.4

POSTULADO 19

Si dos figuras planas cerradas son congruentes, entonces sus áreas son iguales.

Descubra

Complete esta analogía: Una pulgada es la longitud de un segmento de recta como una _?_ _?_ es al área de una región plana.

RESPUESTA

Pulgada cuadrada

EJEMPLO 1

En la figura 8.5, los puntos B y C trisecan $\overline{AD}$; $\overline{EC} \perp \overline{AD}$. Nombre dos triángulos con áreas iguales.

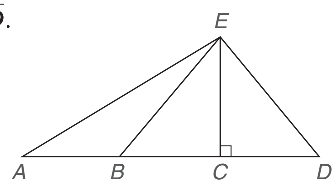


Figura 8.5

Solución $\triangle ECB \cong \triangle ECD$ por LAL. Entonces el $\triangle ECB$ y el $\triangle ECD$ tienen áreas iguales de acuerdo con el postulado 19.

NOTA: El $\triangle EBA$ también es igual en área al $\triangle ECB$ y al $\triangle ECD$, pero esta relación no se puede establecer hasta que se considere el teorema 8.1.3. ■

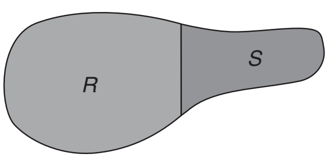


Figura 8.6

Considere la figura 8.6. Toda la región está acotada por una curva y luego subdividida por un segmento de recta en regiones menores R y S. Estas regiones tienen una frontera común y no se traslapan. Debido a que un área numérica se puede asociar con cada región R y S, el área de $R \cup S$ (se lee "R unión S" y significa región R unida a la región S) es igual a la suma de las áreas de R y S. Esto conduce al postulado 20, en el cual A_R representa el "área de la región R", A_S representa el "área de la región S" y $A_{R \cup S}$ representa el "área de la región $R \cup S$".

POSTULADO 20 ▶ (Postulado área-adición)

Sean R y S dos regiones acotadas que no se traslapan. Entonces

$$A_{R \cup S} = A_R + A_S$$

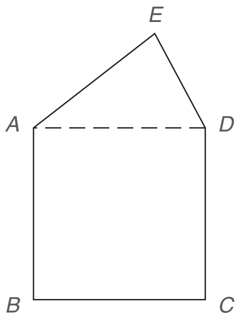


Figura 8.7

EJEMPLO 2

En la figura 8.7, el pentágono $ABCDE$ se compone del cuadrado $ABCD$ y del $\triangle ADE$. Si el área del cuadrado es 36 pulg^2 y la del $\triangle ADE$ es 12 pulg^2, encuentre el área del pentágono $ABCDE$.

Solución El cuadrado $ABCD$ y el $\triangle ADE$ no se traslapan y tienen una frontera común $\overline{AD}$. Por el postulado área-adición,

Área (pentágono $ABCDE$) = área (cuadrado $ABCD$) + área ($\triangle ADE$)
Área (pentágono $ABCDE$) = 36 pulg^2 + 12 pulg^2 = 48 pulg^2 ■

Es conveniente proporcionar un subíndice para A (área) que nombre la figura cuya área se indica. El principio que se utiliza en el ejemplo 2 se establece de manera conveniente y compacta en la forma

GEE
Ejercicios 1-5

$$A_{ABCDE} = A_{ABCD} + A_{ADE}$$

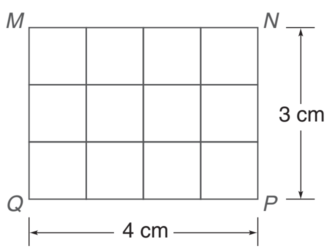


Figura 8.8

ÁREA DE UN RECTÁNGULO

Descubra

Estudie el rectángulo *MNPQ* en la figura 8.8 y observe que tiene dimensiones de 3 y 4 cm. El número de cuadrados, de 1 cm de lado, en el rectángulo es 12. En vez de contar el número de cuadrados en la figura, ¿cómo se puede calcular el área?

RESPUESTA

Multiplique $3 \times 4 = 12$.

Advertencia

Aunque 1 pie = 12 pulg, 1 pie^2 = 144 pulg^2. Vea la figura 8.9.

En la actividad anterior, Descubra, la unidad de área es cm^2. La multiplicación de dimensiones se maneja como la multiplicación algebraica. Compare

$$3x \cdot 4x = 12x^2 \qquad \text{y} \qquad 3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$$

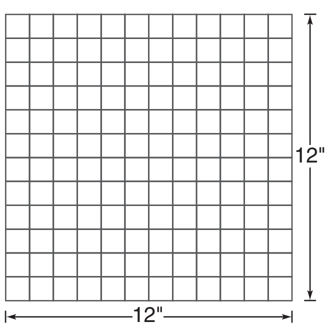


Figura 8.9

Si las unidades para medir las dimensiones de una región *no* son las mismas, entonces se deben convertir a unidades semejantes para calcular el área. Por ejemplo, si se necesita multiplicar 2 pies por 6 pulg, se observa que 2 pies = 2(12 pulg) = 24 pulg, por tanto A = 2 pies · 6 pulg = 24 pulg · 6 pulg y A = 144 pulg^2. De manera alterna, 6 pulg = $6(\frac{1}{12}$ pies$) = \frac{1}{2}$ pie por lo que A = 2 pies$\cdot\frac{1}{2}$ pie = 1pie^2. Debido a que el área es única, se sabe que 1 pie^2 = 144 pulg^2. Vea la figura 8.9.

Recuerde que un lado de un rectángulo se denomina *base* y que cualquier lado perpendicular a la base se denomina *altura* del rectángulo. En el enunciado del postulado 21, se supone que b y h están medidas en las mismas unidades.

POSTULADO 21

El área A de un rectángulo cuya base tiene longitud b y cuya altura tiene longitud h está dada por $A = bh$.

También es común describir las dimensiones de un rectángulo como su longitud ℓ y su ancho w. Entonces el área del rectángulo se escribe $A = \ell w$.

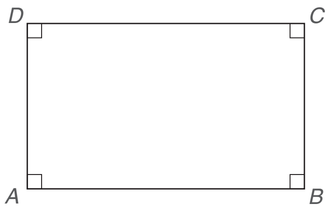


Figura 8.10

EJEMPLO 3

Encuentre el área del rectángulo $ABCD$ en la figura 8.10 si $AB = 12$ cm y $AD = 7$ cm.

Solución Como da lo mismo qué dimensión se elija como base b y qué como altura h, arbitrariamente se elije $AB = b = 12$ cm y $AD = h = 7$ cm. Entonces

$$\begin{aligned} A &= bh \\ &= 12 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} \\ &= 84 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Si no se dan las unidades de las dimensiones de una región, se supone que son semejantes. En ese caso, simplemente se da el área como un número de unidades cuadradas.

TEOREMA 8.1.1

El área A de un cuadrado cuyos lados son cada uno de longitud s está dada por $A = s^2$.

GEE

Ejercicios 6-10

No se presenta la demostración del teorema 8.1.1, que se deduce inmediatamente del postulado 21.

Descubra

Dado que los cuadrados congruentes "cubren" una región plana, es común medir el área en "unidades cuadradas". También es posible cubrir la región con triángulos equiláteros congruentes; sin embargo, el área por lo general *no* se mide en "unidades triangulares". ¿Será posible cubrir una región plana con

a) pentágonos regulares congruentes?
b) hexágonos regulares congruentes?

RESPUESTAS

a) No b) Sí

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO

Una altura de un rectángulo es uno de sus lados, pero eso no es verdadero para un paralelogramo. Una **altura** de un paralelogramo es un segmento perpendicular de un lado al lado opuesto, conocido como **base**. Un lado puede que se tenga que extender para mostrar esta relación altura-base en un dibujo. En la figura 8.11(a), si $\overline{RS}$ se designa como la base, entonces cualquiera de los segmentos $\overline{ZR}$, $\overline{VX}$, o $\overline{YS}$ es una altura correspondiente a esa base (o, para el mismo fin, a la base $\overline{VT}$).

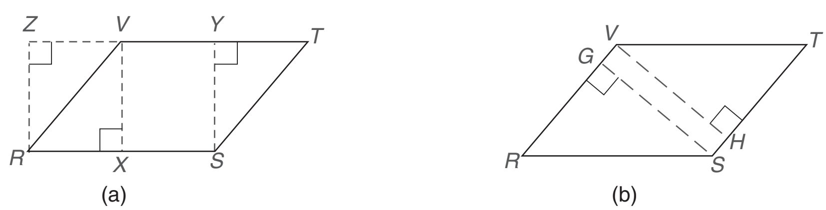


Figura 8.11

Otra mirada al ▱$RSTV$ [en la figura 8.11(b)] muestra que $\overline{ST}$ (o $\overline{VR}$) también se podría haber elegido como la base. Las elecciones posibles para la altura correspondiente en este caso incluyen $\overline{VH}$ y $\overline{GS}$. En el teorema siguiente, ¡es necesario seleccionar una base y una altura trazada hasta esa base!

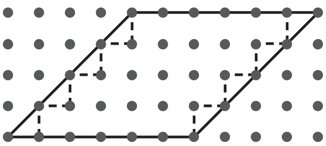
TEOREMA 8.1.2

El área A de un paralelogramo con una base de longitud b y con altura correspondiente de longitud h está dada por

$$A = bh$$

Descubra

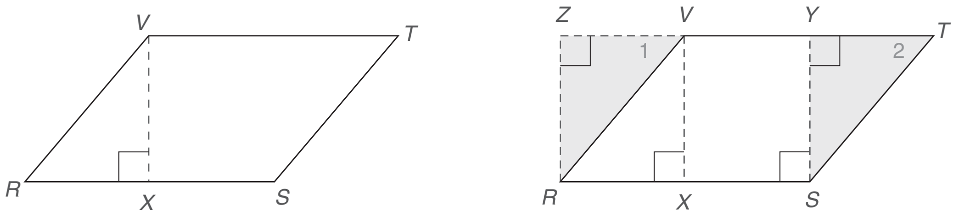
En un tablero geométrico (o tablero con clavijas), se forma un paralelogramo mediante una banda elástica. Con base $b = 6$ y altura $h = 4$, cuente el número de enteros y mitades para encontrar el área del paralelogramo.



RESPUESTA

24 unidades^2

DADO: En la figura 8.12(a), ▱$RSTV$ con $\overline{VX} \perp \overline{RS}$, $RS = b$ y $VX = h$



(a) (b)

Figura 8.12

DEMUESTRE: $A_{RSTV} = bh$

DEMOSTRACIÓN: Construya $\overline{YS} \perp \overline{VT}$ y $\overline{RZ} \perp \overline{VT}$, en el cual se encuentra Z en una extensión de $\overline{VT}$, como se muestra en la figura 8.12(b). El $\angle Z$ recto y el $\angle SYT$ recto son $\cong$. Además, $\overline{ZR} \cong \overline{SY}$ debido a que las rectas paralelas son equidistantes dondequiera.

Como el $\angle 1$ y el $\angle 2$ son ángulos correspondientes $\cong$ para los segmentos paralelos $\overline{VR}$ y $\overline{TS}$, $\triangle RZV \cong \triangle SYT$, por AAL. Entonces $A_{RZV} = A_{SYT}$ ya que los $\triangle$s congruentes tienen áreas iguales.

Dado que $A_{RSTV} = A_{RSYV} + A_{SYT}$, se deduce que $A_{RSTV} = A_{RSYV} + A_{RZV}$. Pero $RSYV \cup RZV$ es el rectángulo $RSYZ$, que tiene el área bh.

Por tanto, $A_{RSTV} = A_{RSYZ} = bh$.

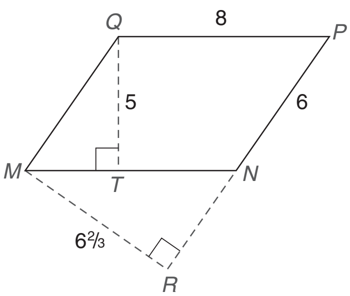


Figura 8.13

EJEMPLO 4

Dado que todas las dimensiones en la figura 8.13 están en pulgadas, encuentre el área del ▱$MNPQ$ utilizando la base

a) MN. b) PN.

Solución

a) $MN = QP = b = 8$ y la altura correspondiente es de longitud $QT = h = 5$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= 8 \text{ pulg} \cdot 5 \text{ pulg} \\ &= 40 \text{ pulg}^2 \end{aligned}$$

b) $PN = b = 6$, por tanto la longitud correspondiente de la altura es $MR = h = 6\frac{2}{3}$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= 6 \cdot 6\frac{2}{3} \\ &= 6 \cdot \frac{20}{3} \\ &= 40 \text{ pulg}^2 \end{aligned}$$

■

En el ejemplo 4, el área del ▱$MNPQ$ no se cambió cuando se utilizó una base diferente y su altura correspondiente para calcular su área. Consulte el postulado 18.

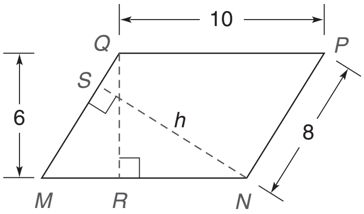


Figura 8.14

EJEMPLO 5

DADO: En la figura 8.14, ▱$MNPQ$ con $PN = 8$ y $QP = 10$
Altura $\overline{QR}$ a la base $\overline{MN}$ tiene longitud $QR = 6$

ENCUENTRE: SN, la longitud de la altura entre $\overline{QM}$ y $\overline{PN}$

Solución Eligiendo $MN = b = 10$ y $QR = h = 6$, se observa que

$$A = bh = 10 \cdot 6 = 60$$

Ahora se elige $PN = b = 8$ y $SN = h$, por tanto $A = 8h$. Como el área del paralelogramo es única, se deduce que

$$8h = 60$$
$$h = \frac{60}{8} = 7.5$$

Ejercicios 11-14

es decir, $SN = 7.5$ ■

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

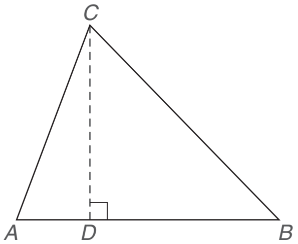
La fórmula utilizada para calcular el área de un triángulo se deduce fácilmente de la fórmula para el área de un paralelogramo. En la fórmula, cualquier lado del triángulo se puede elegir como su base; sin embargo, se debe emplear la longitud de la altura correspondiente para esa base.

TEOREMA 8.1.3

El área A de un triángulo cuya base tiene una longitud b y cuya altura correspondiente tiene longitud h está dada por

$$A = \frac{1}{2}bh$$

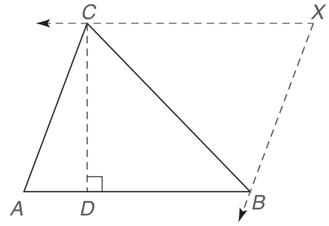
La siguiente es una demostración gráfica del teorema 8.1.3.



(a)

Figura 8.15

DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA 8.1.3



(b)

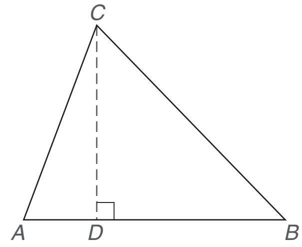
DADO: En la figura 8.15(a), $\triangle ABC$ con
$\overline{CD} \perp \overline{AB}$
$AB = b$ y $CD = h$

DEMUESTRE: $A = \frac{1}{2}bh$

DEMOSTRACIÓN: Sea que las rectas a través de C paralelas a $\overline{AB}$ y a través de B paralelas a $\overline{AC}$ converjan en el punto X [vea la figura 8.15(b)]. Con ▱$ABXC$ y triángulos congruentes ABC y XCB, se observa que $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABXC} = \frac{1}{2}bh$.

EJEMPLO 6

En la figura, encuentre el área del $\triangle ABC$ si $AB = 10$ cm y $CD = 7$ cm.



Solución Con $\overline{AB}$ como la base, $b = 10$ cm.
La altura correspondiente para la base $\overline{AB}$ es $\overline{CD}$, por tanto $h = 7$ cm. Ahora

$$A = \frac{1}{2}bh$$

será

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm}$$

$$A = 35 \text{ cm}^2$$

El teorema siguiente es un corolario del teorema 8.1.3.

Advertencia

La frase *área de un polígono* en realidad significa el área de la región acotada por el polígono.

COROLARIO 8.1.4

El área de un triángulo rectángulo con catetos de longitudes a y b está dada por $A = \frac{1}{2}ab$.

En la demostración del corolario 8.1.4, la longitud de cualquier cateto se puede elegir como la base; a su vez, la longitud de la altura hasta esa base es la longitud del cateto restante. Esto se deduce del hecho que “Los catetos de un triángulo rectángulo son perpendiculares”.

EJEMPLO 7

DADO: En la figura 8.16, el $\triangle MPN$ rectángulo con $PN = 8$ y $MN = 17$
ENCUENTRE: A_{MNP}

Solución Con $\overline{PN}$ como un cateto del $\triangle MPN$, se necesita la longitud del segundo cateto $\overline{PM}$.
Por el teorema de Pitágoras,

$$17^2 = (PM)^2 + 8^2$$
$$289 = (PM)^2 + 64$$

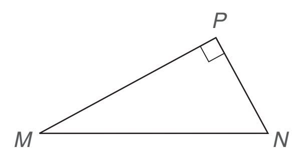


Figura 8.16

Entonces $(PM)^2 = 225$, por tanto $PM = 15$.
Con $PN = a = 8$ y $PM = b = 15$,

$$A = \frac{1}{2}ab$$

será

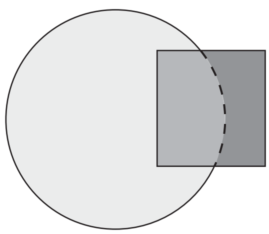
$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 = 60 \text{ unidades}^2$$

GEE
Ejercicios 15-20

Ejercicios 8.1

1. Suponga que dos triángulos tienen áreas iguales. ¿Son congruentes los ángulos? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Son necesariamente congruentes dos cuadrados con áreas iguales? ¿Por qué sí o por qué no?

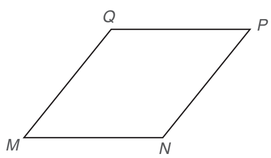
2. El área del cuadrado es 12 y el área del círculo es 30. ¿Es igual a 42 el área de toda la región sombreada? ¿Por qué sí o por qué no?



Ejercicios 2, 3

3. Considere la información en el ejercicio 2, pero suponga que sabe que el área de la región definida por la intersección del cuadrado y el círculo mide 5. ¿Cuál es el área de toda la región coloreada?

4. Si *MNPQ* es un rombo, ¿cuál fórmula de esta sección se debe emplear para calcular su área?

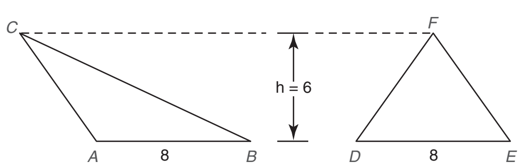


Ejercicios 4–6

5. En el rombo *MNPQ*, ¿cómo se compara la longitud de la altura de Q a $\overline{PN}$ con la longitud de la altura de Q a $\overline{MN}$?

6. Cuando se trazan las diagonales del rombo *MNPQ*, ¿cómo se comparan las áreas de los cuatro triángulos pequeños resultantes entre sí y con el área del rombo dado?

7. El $\triangle ABC$ es un triángulo obtuso con ángulo obtuso A. El $\triangle DEF$ es un triángulo agudo. ¿Cómo se comparan las áreas del $\triangle ABC$ y del $\triangle DEF$?



Ejercicios 7, 8

8. ¿Son congruentes el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$?

En los ejercicios 9 al 18 encuentre las áreas de las figuras que se muestran o que se describen.

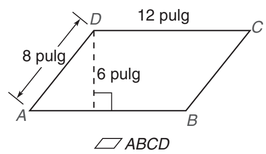
9. La longitud de un rectángulo es 6 cm y su ancho es 9 cm.

10. Un triángulo rectángulo tiene un cateto que mide 20 pulg y una hipotenusa que mide 29 pulg.

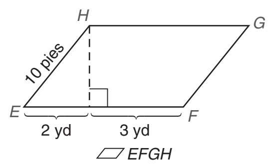
11. Un triángulo 45-45-90 tiene un cateto que mide 6 m.

12. La altura de un triángulo hasta el lado de 15 pulg mide 8 pulg.

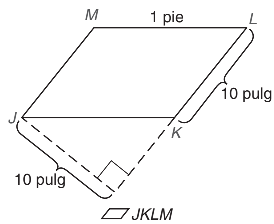
13.



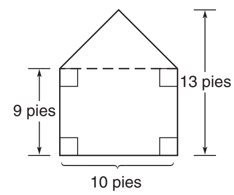
14.



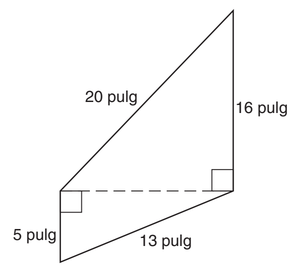
15.



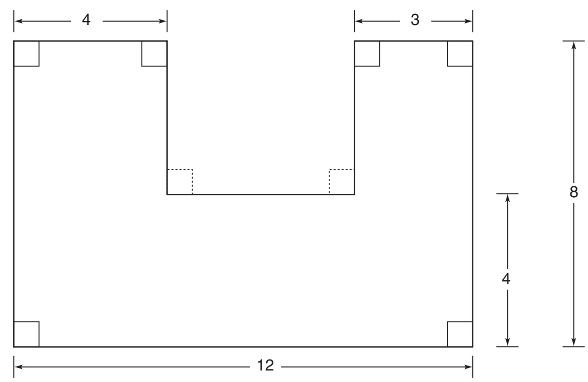
16.



17.

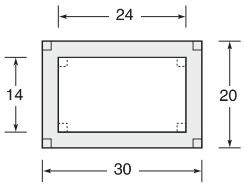


18.

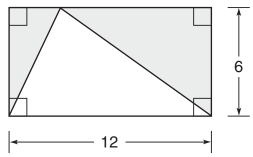


En los ejercicios 19 al 22 encuentre el área de la región sombreada.

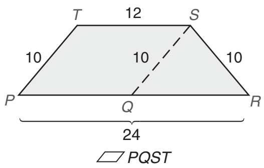
19.



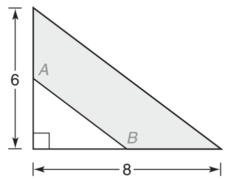
20.



21.

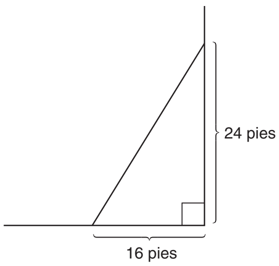


22.

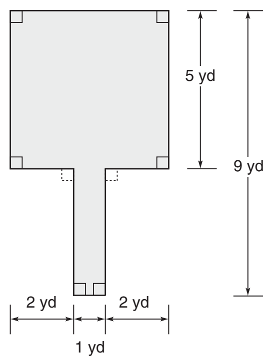


A y *B* son puntos medios.

23. Una esquina triangular de una tienda ha sido acordonada para utilizarla como área para exhibir ornamentos navideños. Encuentre el área de la sección de exhibición.



24. Se comprará una alfombra para la sala y el pasillo. ¿Cuál es el área que se cubrirá?

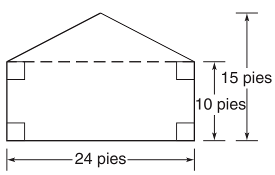


25. El muro exterior (el extremo a dos aguas de la casa que se muestra) se pintará.

a) ¿Cuál es el área del muro exterior?

b) Si cada galón de pintura cubre aproximadamente 105 pies^2, ¿cuántos galones se deben comprar?

c) Si cada galón de pintura está en oferta a \$15.50, ¿cuál es el costo total de la pintura?

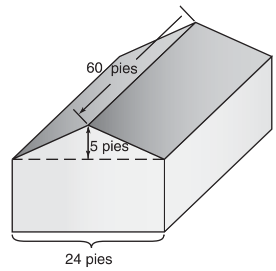


26. El techo de la casa que se muestra necesita cubrirse con tejas asfálticas.

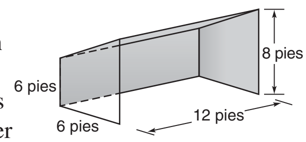
a) Considerando que las secciones frontal y posterior del techo tienen áreas iguales, encuentre el área total que se debe cubrir con tejas.

b) Si la cubierta de techo se vende en cuadrados (cada uno cubre 100 pies^2), ¿cuántos cuadrados se necesitan para completar el trabajo?

c) Si cada cuadrado cuesta \$22.50 y se compra un cuadrado adicional para los recortes alrededor de las ventilas, ¿cuál es el costo total de las tejas?



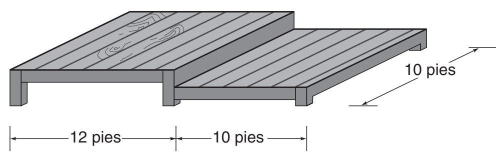
27. Una tienda de playa está diseñada de tal manera que un lado está abierto. Encuentre el número de pies cuadrados de lona necesarios para hacer la tienda.



28. Gary y Carolyn planean construir la plataforma que se muestra.

a) Encuentre el espacio total (área) de piso de la plataforma.

b) Encuentre el costo aproximado de la plataforma si el costo estimado es \$3.20 por pie^2?



29. Una *yarda cuadrada* es un cuadrado con lados de 1 yarda en longitud.

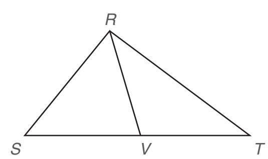
a) ¿Cuántos *pies cuadrados* hay en 1 yarda cuadrada?

b) ¿Cuántas *pulgadas cuadradas* hay en 1 yarda cuadrada?

30. El problema siguiente se basa en este teorema: "Una mediana de un triángulo lo separa en dos triángulos de área igual."

a) Dado el $\triangle RST$ con mediana $\overline{RV}$, explique por qué $A_{RSV} = A_{RVT}$.

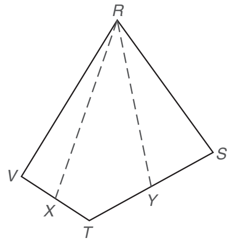
b) Si $A_{RST} = 40.8$ cm^2, encuentre A_{RSV}.



En los ejercicios 31 y 32 X es el punto medio de $\overline{VT}$ y Y es el punto medio de $\overline{TS}$.

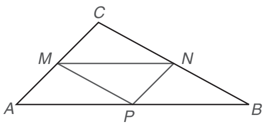
31. Si $A_{RSTV} = 48$ cm², encuentre A_{RYTX}.

32. Si $A_{RYTX} = 13.5$ pulg², encuentre A_{RSTV}.



Ejercicios 31, 32

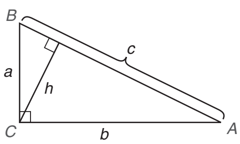
33. Dado el $\triangle ABC$ con puntos medios M, N y P de los lados, explique por qué $A_{ABC} = 4 \cdot A_{MNP}$.



En los ejercicios 34 al 36 proporcione demostraciones en párrafo.

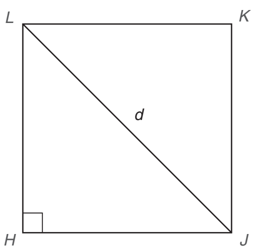
34. *Dado:* $\triangle ABC$ rectángulo

Demuestre: $h = \dfrac{ab}{c}$



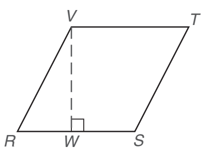
35. *Dado:* Cuadrado $HJKL$ con $LJ = d$

Demuestre: $A_{HJKL} = \dfrac{d^2}{2}$



36. *Dado:* $\square RSTV$ con $\overline{VW} \cong \overline{VT}$

Demuestre: $A_{RSTV} = (RS)^2$



37. *Dado:* El área del $\triangle ABC$ rectángulo (que no se muestra) es 40 pulg²

$m\angle C = 90°$

$AC = x$

$BC = x + 2$

Encuentre: x

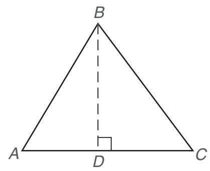
38. Las longitudes de un triángulo rectángulo son enteros pares consecutivos. El valor numérico del área es tres veces el valor del cateto más largo. Encuentre las longitudes de los catetos del triángulo.

***39.** *Dado:* $\triangle ABC$, cuyos lados son 13 pulg, 14 pulg y 15 pulg.

Encuentre: a) BD, la longitud de la altura hasta el lado de 14 pulg

(SUGERENCIA: Utilice el teorema de Pitágoras dos veces.)

b) El área del $\triangle ABC$, utilizando el resultado del inciso (a)



Ejercicios 39, 40

***40.** *Dado:* $\triangle ABC$, cuyos lados son 10, 17 y 21 cm

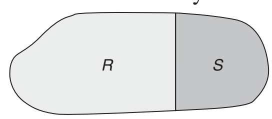
Demuestre: a) BD, la longitud de la altura hasta el lado de 21 cm

b) el área del $\triangle ABC$, utilizando el resultado del inciso (a)

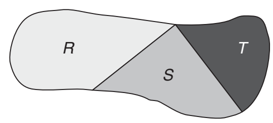
41. Si la base de un rectángulo se incrementa en 20 por ciento y la altura se incrementa en 30 por ciento, ¿en qué porcentaje aumenta el área?

42. Si la base de un rectángulo se incrementa en 20 por ciento pero la altura se disminuye en 30 por ciento, ¿en qué porcentaje cambia el área? ¿El área aumenta o disminuye?

43. Dada la región $R \cup S$, explique por qué $A_{R \cup S} > A_R$.

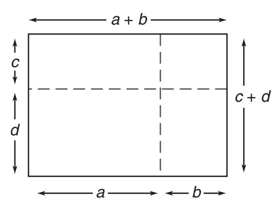


44. Dada la región $R \cup S \cup T$, explique por qué $A_{R \cup S \cup T} = A_R + A_S + A_T$.

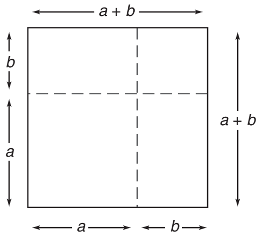


45. El método del álgebra de la multiplicación FOIL (por sus siglas en inglés, First Outer Inner Last, que significa "primero, afuera, adentro y último", y esto se utiliza para multiplicar dos binomios) se ilustra geométricamente en el dibujo. Utilice el dibujo con regiones rectangulares para completar la regla siguiente:

$(a + b)(c + d) =$ ________________________________

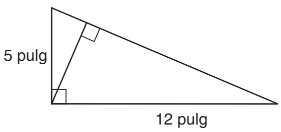


46. Utilice la configuración del cuadrado para completar la regla del álgebra siguiente:
$(a + b)^2 =$ ____________________
(**NOTA:** Simplifique donde sea posible.)

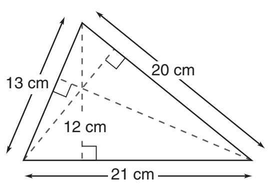


En los ejercicios 47 al 50 utilice el hecho que el área del polígono es única.

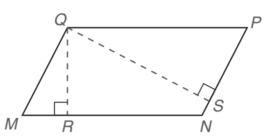
47. En el triángulo rectángulo, encuentre la longitud de la altura trazada hasta la hipotenusa.



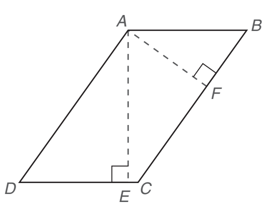
48. En el triángulo cuyos lados tienen longitudes de 13, 20 y 21 cm, la longitud de la altura trazada hasta el lado de 21 cm es 12 cm. Encuentre las longitudes de las alturas restantes del triángulo.



49. En el $\square MNPQ$, $QP = 12$ y $QM = 9$. La longitud de la altura $\overline{QR}$ (hasta el lado $\overline{MN}$) es 6. Encuentre la longitud de la altura $\overline{QS}$ de Q a $\overline{PN}$.



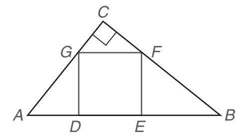
50. En el $\square ABCD$, $AB = 7$ y $BC = 12$. . La longitud de la altura $\overline{AF}$ (hasta el lado $\overline{BC}$), es 5. Encuentre la longitud de la altura $\overline{AE}$ de A a $\overline{DC}$.



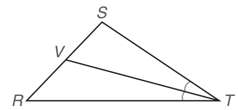
***51.** El área de un rectángulo es 48 pulg^2. Donde x es el ancho y y es la longitud, exprese el perímetro P del rectángulo sólo en términos de x.

***52.** El perímetro de un rectángulo es 32 cm. Donde x es el ancho y y es la longitud, exprese el área A del rectángulo sólo en términos de x.

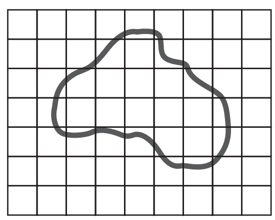
***53.** El cuadrado $DEFG$ está inscrito en el $\triangle ABC$ como se muestra. Si $AD = 6$ y $EB = 8$, encuentre el área del cuadrado $DEFG$.



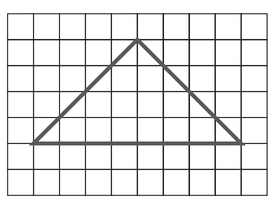
***54.** $\overline{TV}$ biseca el $\angle STR$ del $\triangle STR$. $ST = 6$ y $TR = 9$. Si el área del $\triangle RST$ es 25 m^2, encuentre el área del $\triangle SVT$.



55. a) Encuentre una estimación menor del área de la figura contando el número de cuadrados enteros dentro de la figura.
b) Encuentre una estimación mayor del área de la figura contando los cuadrados enteros y parciales dentro de la figura.
c) Utilice el promedio de los resultados en los incisos (a) y (b) para proporcionar una mejor estimación del área de la figura.
d) ¿Sugiere la intuición que la estimación del área del inciso (c) es la respuesta correcta?



56. a) Encuentre una estimación menor del área de la figura contando cuadrados enteros dentro de la figura.
b) Encuentre una estimación mayor del área de la figura contando cuadrados enteros y parciales dentro de la figura.
c) Utilice el promedio de los resultados en los incisos (a) y (b) para proporcionar una mejor estimación del área de la figura.
d) ¿Sugiere la intuición que la estimación del área del inciso (c) es la respuesta correcta?



8.2 Perímetro y área de polígonos

CONCEPTOS CLAVE

- Perímetro de un polígono
- Semiperímetro de un triángulo
- Fórmula de Herón
- Fórmula de Brahmagupta
- Área de un trapezoide, un rombo y una cometa
- Áreas de polígonos semejantes

Esta sección se inicia con un recordatorio del significado de perímetro.

> **DEFINICIÓN**
>
> El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de todos los lados del polígono.

En la tabla 8.1 se resumen fórmulas del perímetro para algunos tipos de triángulos y en la tabla 8.2 se resumen las fórmulas para los perímetros de tipos de cuadriláteros seleccionadas. Sin embargo, es más importante comprender el concepto de perímetro que memorizar las fórmulas. Vea si puede explicar cada fórmula.

TABLA 8.1
Perímetro de un triángulo

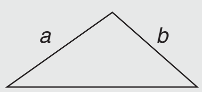
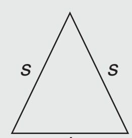
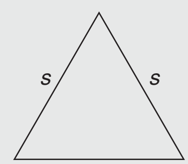
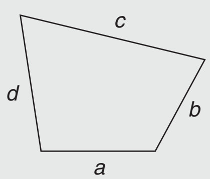
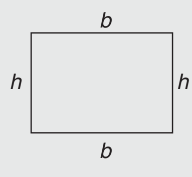
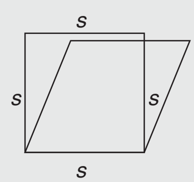
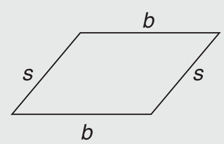
Triángulo escaleno	Triángulo isósceles	Triángulo equilátero
		
$P = a + b + c$	$P = b + 2s$	$P = 3s$

TABLA 8.2
Perímetro de un cuadrilátero

Cuadrilátero	Rectángulo	Cuadrado (o rombo)	Paralelogramo
			
$P = a + b + c + d$	$P = 2b + 2h$ o $P = 2(b + h)$	$P = 4s$	$P = 2b + 2s$ o $P = 2(b + s)$

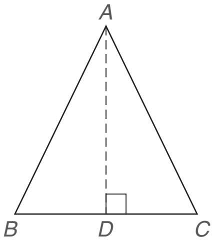


Figura 8.17

EJEMPLO 1

Encuentre el perímetro del $\triangle ABC$ que se muestra en la figura 8.17 si:

a) $AB = 5$ pulg, $AC = 6$ pulg y $BC = 7$ pulg
b) Altura $AD = 8$ cm, $BC = 6$ cm y $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Solución

a) $P_{ABC} = AB + AC + BC$
$= 5 + 6 + 7$
$= 18$ pulg

b) Con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, el $\triangle ABC$ es isósceles. Entonces $\overline{AD}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{BC}$. Si $BC = 6$, se deduce que $DC = 3$. Utilizando el teorema de Pitágoras, se tiene

$$\begin{aligned}(AD)^2 + (DC)^2 &= (AC)^2\\ 8^2 + 3^2 &= (AC)^2\\ 64 + 9 &= (AC)^2\\ AC &= \sqrt{73}\end{aligned}$$

Ahora $P_{ABC} = 6 + \sqrt{73} + \sqrt{73} = 6 + 2\sqrt{73} \approx 23.09$ cm.

NOTA: Como $x + x = 2x$, se tiene $\sqrt{73} + \sqrt{73} = 2\sqrt{73}$. ■

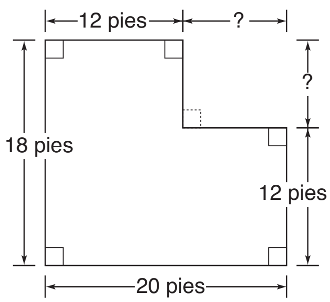


Figura 8.18

En el ejemplo 2 se aplica el concepto de perímetro de una manera más general.

EJEMPLO 2

Mientras remodelan su casa, la familia Gibson ha decidido reemplazar el viejo trabajo de carpintería por una de roble de estilo colonial.

a) Utilizando la planta de piso dada en la figura 8.18, encuentre la cantidad de zoclo (en pies lineales) necesaria para la habitación. ¡*No* descuente los espacios de las puertas!
b) Encuentre el costo del zoclo si el precio es \$1.32 por pie lineal.

Solución

a) Las dimensiones que no se muestran miden $20 - 12$ u 8 pies y $18 - 12$ o 6 pies. El perímetro, o "distancia alrededor", de la habitación es

$$12 + 6 + 8 + 12 + 20 + 18 = 76 \text{ pies lineales}$$

GEE *Ejercicios 1-4*

b) El costo es $76 \cdot \$1.32 = \$100.32$. ■

FÓRMULA DE HERÓN

Si se conocen las longitudes de los lados de un triángulo, la fórmula que por lo general se utiliza es la **fórmula de Herón** (nombrada en honor a Herón de Alejandría, aproximadamente 75 d.C.). Uno de los números encontrados en esta fórmula es el *semiperímetro* de un triángulo, que se define como la mitad del perímetro. Para el triángulo que tiene lados de longitudes a, b y c, el semiperímetro es $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. En el ejemplo 3 se aplica la fórmula de Herón. La demostración de la fórmula de Herón se encuentra en nuestro sitio web.

TEOREMA 8.2.1 ▶ (Fórmula de Herón)

Si los tres lados de un triángulo tienen longitudes a, b y c, entonces el área A del triángulo está dada por

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$

donde el semiperímetro del triángulo es

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

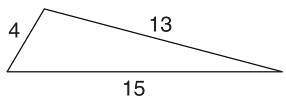


Figura 8.19

EJEMPLO 3

Encuentre el área de un triángulo que tiene lados de longitudes 4, 13 y 15. (Vea la figura 8.19.)

Solución Si se designan los lados como $a = 4$, $b = 13$ y $c = 15$ el semiperímetro del triángulo está dado por $s = \frac{1}{2}(4 + 13 + 15) = \frac{1}{2}(32) = 16$.
Por tanto,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \\ &= \sqrt{16(16 - 4)(16 - 13)(16 - 15)} \\ &= \sqrt{16(12)(3)(1)} = \sqrt{576} = 24 \text{ unidades}^2 \end{aligned}$$ ■

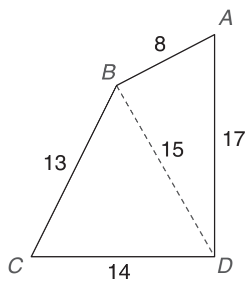


Figura 8.20

Cuando se conocen las longitudes de los lados de un cuadrilátero se puede aplicar la fórmula de Herón para encontrar el área si también se conoce la longitud de una diagonal. En el cuadrilátero $ABCD$ en la figura 8.20, la fórmula de Herón se puede utilizar para demostrar que el área del $\triangle ABD$ es 60 y el área del $\triangle BCD$ es 84. Por tanto, el área del cuadrilátero $ABCD$ es 144 unidades^2.

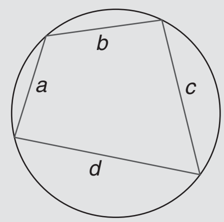
El teorema siguiente se nombró en honor de Brahmagupta, un matemático hindú nacido en 598 d.C. El teorema se incluye sin su demostración demasiado larga. Sucede que la fórmula de Herón para el área de cualquier triángulo en realidad es un caso especial de la fórmula de Brahmagupta, que se utiliza para determinar el área de un cuadrilátero cíclico. En la fórmula de Brahmagupta, al igual que en la fórmula de Herón, la letra s representa el valor numérico del semiperímetro. La fórmula se aplica esencialmente de la misma manera que la fórmula de Herón. Consulte los ejercicios 11, 12, 41 y 42 de esta sección.

TEOREMA 8.2.2 ▶ (Fórmula de Brahmagupta)

Para un cuadrilátero cíclico con lados de longitudes a, b, c y d, el área está dada por

$$A = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)},$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$



La fórmula de Brahmagupta se convierte en la fórmula de Herón cuando la longitud d del cuarto lado se contrae (la longitud d tiende a 0) de manera que el cuadrilátero se vuelve un triángulo con lados de longitudes a, b y c.

Los teoremas siguientes de esta sección contienen *subíndices numéricos*. En la práctica, los subíndices permiten distinguir cantidades. Por ejemplo, las longitudes de las dos bases desiguales de un trapezoide se escriben b_1 (léase "b subíndice 1") y b_2. En particu-

GEE
Ejercicios 5-8

lar, b_1 representa la longitud numérica de la primera base y b_2 representa la longitud de la segunda base. En la tabla siguiente se ilustra el uso de los subíndices numéricos.

Teorema	**Símbolo con subíndice**	**Significado**
Teorema 8.2.3	b_1	Longitud de la *primera* base de un rombo
Corolario 8.2.5	d_2	Longitud de la *segunda* diagonal de un rombo
Teorema 8.2.7	A_1	Área del *primer* triángulo

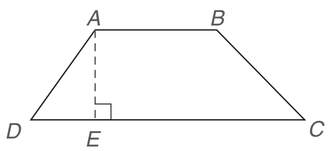


Figura 8.21

ÁREA DE UN TRAPEZOIDE

Recuerde que los dos lados paralelos de un trapezoide son sus *bases*. La *altura* es cualquier segmento de recta que se trace perpendicular de una base a la otra. En la figura 8.21 $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son bases y $\overline{AE}$ es una altura para el trapezoide.

Para desarrollar los teoremas restantes se utiliza la fórmula más común para el área de un triángulo (que es, $A = \frac{1}{2}bh$). En el teorema 8.2.3, b_1 y b_2 representan las longitudes de las bases del trapezoide. (En algunos libros, b representa la longitud de la base *más corta* y B representa la longitud de la base *más larga*.)

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Demostración de relaciones de área

Regla general: Muchas relaciones de área dependen del uso del postulado área-adición.

Ilustración: En la demostración del teorema 8.2.3, el área del trapezoide se desarrolla como la suma de las áreas de dos triángulos.

TEOREMA 8.2.3

El área A de un trapezoide cuyas bases tienen longitudes b_1 y b_2 y cuya altura tiene longitud h está dada por

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

DADO: Trapezoide $ABCD$ con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $AB = b_1$ y $DC = b_2$.

DEMUESTRE: $A_{ABCD} = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

DEMOSTRACIÓN: Trace $\overline{AC}$ como se muestra en la figura 8.22(a). Ahora el $\triangle ADC$ tiene una altura de longitud h y una base de longitud b_2. Como se muestra en la figura 8.22(b),

$$A_{ADC} = \frac{1}{2}hb_2$$

Además, el $\triangle ABC$ tiene una altura de longitud h y una base de longitud b_1. [Vea la figura 8.22(c).] Entonces

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}hb_1$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= A_{ABC} + A_{ADC} \\ &= \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2 \\ &= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) \end{aligned}$$

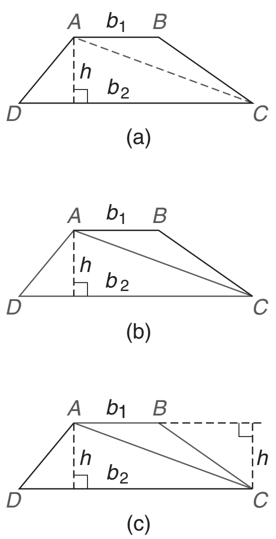


Figura 8.22

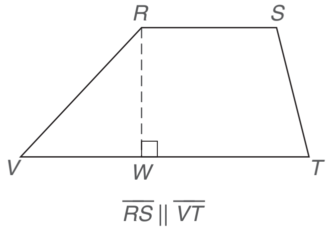


Figura 8.23

EJEMPLO 4

Dado que $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$, encuentre el área del trapezoide en la figura 8.23. Observe que $RS = 5$, $TV = 13$ y $RW = 6$.

Solución Sea $RS = 5 = b_1$ y $TV = 13 = b_2$. Además, $RW = h = 6$. Ahora,

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

Será

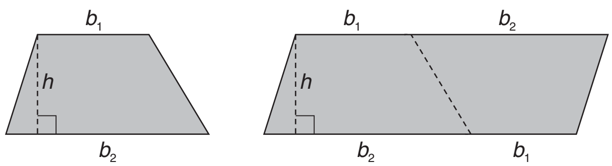
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 6(5 + 13) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 18 \\ &= 3 \cdot 18 = 54 \text{ unidades}^2 \end{aligned}$$

La actividad siguiente refuerza la fórmula para el área de un trapezoide.

Descubra

Corte dos trapezoides que sean copias entre sí y coloque uno al lado del otro para formar un paralelogramo.

a) ¿Cuál es la longitud de la base del paralelogramo?
b) ¿Cuál es el área del paralelogramo?
c) ¿Cuál es el área del trapezoide?



RESPUESTAS

a) $b_1 + b_2$ b) $h(b_1 + b_2)$ c) $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

CUADRILÁTEROS CON DIAGONALES PERPENDICULARES

GEE *Ejercicios 9-12*

El teorema siguiente conduce a los corolarios 8.2.5 y 8.2.6, donde la fórmula encontrada en el teorema 8.2.4 también se utiliza para encontrar el área de un rombo y una cometa.

TEOREMA 8.2.4

El área de cualquier cuadrilátero con diagonales perpendiculares de longitudes d_1 y d_2 está dada por

$$A = \frac{1}{2}d_1 d_2$$

DADO: Cuadrilátero $ABCD$ con $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ [vea la figura 8.24(a) en la página 368.]

DEMUESTRE: $A_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1 d_2$

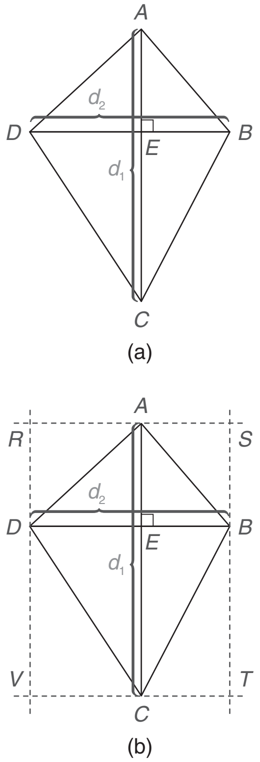


Figura 8.24

DEMOSTRACIÓN: A través de los puntos A y C, trace rectas paralelas a $\overline{DB}$. De igual forma, trace rectas paralelas a $\overline{AC}$ a través de los puntos B y D. Sean los puntos de intersección de estas rectas R, S, T y V, como se muestra en la figura 8.24(b). Debido a que cada uno de los cuadriláteros *ARDE*, *ASBE*, *BECT* y *CEDV* es un paralelogramo que contiene un ángulo recto, cada uno es un rectángulo. Además, $A_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot A_{ARDE}$, $A_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot A_{ASBE}$, $A_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \cdot A_{BECT}$, y $A_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot A_{CEDV}$.

Entonces $A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot A_{RSTV}$. Pero *RSTV* es un rectángulo, ya que es un paralelogramo que contiene un ángulo recto. Como *RSTV* tiene dimensiones d_1 y d_2 [vea la figura 8.24(d)], su área es $d_1 d_2$. Por sustitución, $A_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2$. ■

ÁREA DE UN ROMBO

Recuerde que un rombo es un paralelogramo con dos lados adyacentes congruentes; a su vez, se demostró que los cuatro lados eran congruentes. Debido a que las diagonales de un rombo son perpendiculares, se tiene el corolario siguiente del teorema 8.2.4. Vea la figura 8.25.

COROLARIO 8.2.5

El área A de un rombo cuyas diagonales tienen longitudes d_1 y d_2 está dada por

$$A = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

El corolario 8.2.5 y el corolario 8.2.6 son consecuencias inmediatas del teorema 8.2.4. En el ejemplo 5 se ilustra el corolario 8.2.5.

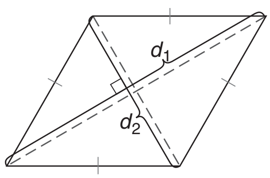


Figura 8.25

EJEMPLO 5

Encuentre el área del rombo *MNPQ* en la figura 8.26 si $MP = 12$ y $NQ = 16$.

Solución Por el corolario 8.2.5,

$$A_{MNPQ} = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96 \text{ unidades}^2$$

■

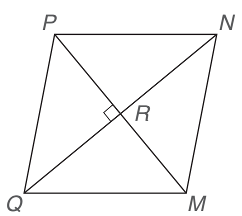


Figura 8.26

En problemas que comprenden un rombo con frecuencia se utiliza el hecho de que sus diagonales son perpendiculares. Si se conoce la longitud de un lado y la longitud de cualquier diagonal, la longitud de la otra diagonal se puede determinar aplicando el teorema de Pitágoras.

ÁREA DE UNA COMETA

Para una cometa, en el ejercicio 27 de la sección 4.2 se demostró que una diagonal es el bisector perpendicular de la otra. (Vea la figura 8.27.)

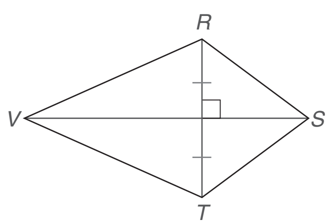


Figura 8.27

COROLARIO 8.2.6

El área A de una cometa cuyas diagonales tienen longitudes d_1 y d_2 está dada por

$$A = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

En el ejemplo 6 se aplica el corolario 8.2.6.

EJEMPLO 6

Encuentre la longitud de $\overline{RT}$ en la figura 8.28 si el área de la cometa $RSTV$ es 360 pulg^2 y $SV = 30$ pulg.

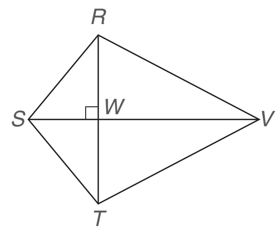


Figura 8.28

Solución $A = \frac{1}{2}d_1d_2$ será $360 = \frac{1}{2}(30)d$, en donde d es la longitud de la diagonal restante $\overline{RT}$.
Entonces $360 = 15d$, lo que significa que $d = 24$.
Entonces $RT = 24$ pulg. ■

GEE
Ejercicios 13-17

ÁREAS DE POLÍGONOS SEMEJANTES

Recuerde

Las alturas correspondientes de triángulos semejantes tienen la misma relación proporcional que cualquier par de lados correspondientes.

En el teorema siguiente se comparan las áreas de triángulos semejantes. En la figura 8.29, se hace referencia a las áreas de triángulos semejantes como A_1 y A_2. El triángulo con área A_1 tiene lados de longitudes a_1, b_1 y c_1 y el triángulo con área A_2 tiene lados de longitudes a_2, b_2 y c_2. Donde a_1 corresponde a a_2, b_1 a b_2, y c_1 a c_2, el teorema 8.2.7 implica que

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \quad \text{o} \quad \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 \quad \text{o} \quad \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2$$

Sólo se demostró la primera relación; las otras demostraciones son análogas.

TEOREMA 8.2.7

La relación proporcional de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la relación proporcional de las longitudes de cualesquiera dos lados correspondientes; es decir,

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$$

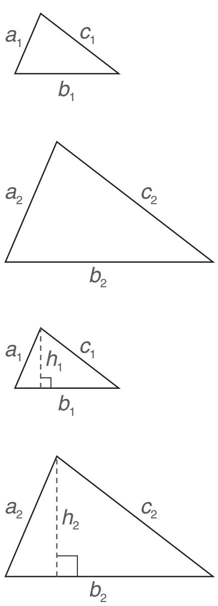


Figura 8.29

DADO: Triángulos semejantes como se muestran en la figura 8.29

DEMUESTRE: $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$

DEMOSTRACIÓN: Para los triángulos semejantes, h_1 y h_2 son las longitudes respectivas de las alturas hasta los lados correspondientes de longitudes b_1 y b_2. Ahora, $A_1 = \frac{1}{2}b_1h_1$ y $A_2 = \frac{1}{2}b_2h_2$, por tanto

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2}b_1h_1}{\frac{1}{2}b_2h_2} \quad \text{o} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$

Simplificando, se tiene

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$

Debido a que los triángulos son semejantes, se sabe que $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2}$. Como las alturas correspondientes de triángulos semejantes tienen la misma relación proporcional que un par de lados correspondientes (teorema 5.3.2), también se sabe que $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2}$. Mediante sustitución, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$ se vuelve $\frac{A_1}{A_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_1}{a_2}$. Entonces $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$. ■

Ya que el teorema 8.2.7 se puede ampliar para cualquier par de polígonos semejantes, también se podría demostrar que la relación proporcional de las áreas de dos cuadrados es igual al cuadrado de la relación proporcional de las longitudes de cualesquiera dos lados. En el ejemplo 7 se aplica esta relación.

EJEMPLO 7

Utilice la relación proporcional $\frac{A_1}{A_2}$ para comparar las áreas de:

a) Dos triángulos semejantes en donde los lados del primer triángulo son $\frac{1}{2}$ de los lados del segundo triángulo
b) Dos cuadrados en donde cada lado del primer cuadrado es 3 veces la longitud de cada lado del segundo cuadrado

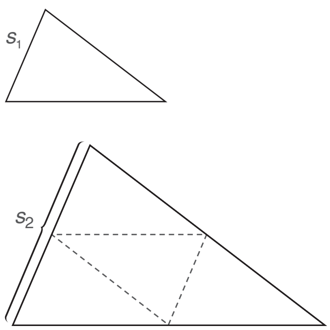


Figura 8.30

Solución

a) $s_1 = \frac{1}{2}s_2$, por tanto $\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{2}$. (Vea la figura 8.30.)
Ahora $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2$, de manera que $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ o $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{4}$. Es decir, el área del primer triángulo es $\frac{1}{4}$ del área del segundo triángulo.

b) $s_1 = 3s_2$ por tanto $\frac{s_1}{s_2} = 3$. (Vea la figura 8.31.)
$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2$, de manera que $\frac{A_1}{A_2} = (3)^2$ o $\frac{A_1}{A_2} = 9$. Es decir, el área del primer cuadrado es 9 veces el área del segundo cuadrado.

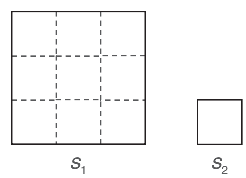


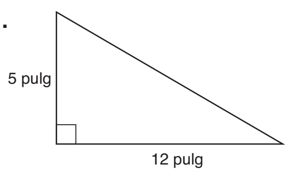
Figura 8.31

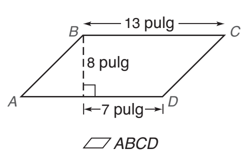
NOTA: Para el ejemplo 7, las figuras 8.30 y 8.31 proporcionan evidencia visual de la relación descrita en el teorema 8.2.7. ■

GEE *Ejercicios 18-21*

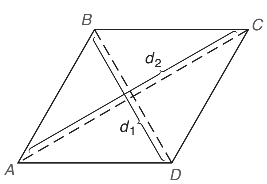
Ejercicios 8.2

En los ejercicios 1 al 8 encuentre el perímetro de cada figura.

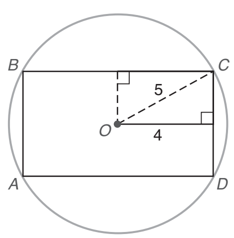
1. 

2. 

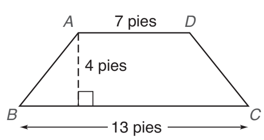
▱ *ABCD*

3. 

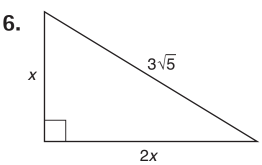
▱ *ABCD* con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$d_1 = 4$ m
$d_2 = 10$ m

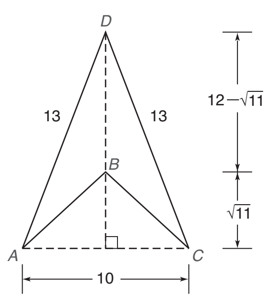
4. 

▱ *ABCD* en ⊙ *O*

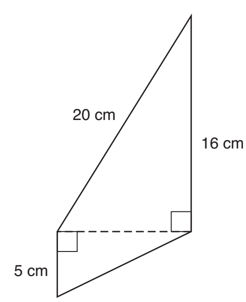
5. 

Trapezoide *ABCD* con $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

6. 

7. 

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$ en cuadrilátero cóncavo *ABCD*

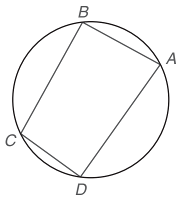
8. 

En los ejercicios 9 y 10 utilice la fórmula de Herón.

9. Encuentre el área de un triángulo cuyos lados miden 13, 14 y 15 pulg.

10. Encuentre el área de un triángulo cuyos lados miden 10, 17 y 21 cm.

Para los ejercicios 11 y 12 utilice la fórmula de Brahmagupta.

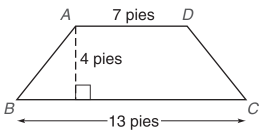


11. Para el cuadrilátero cíclico $ABCD$, encuentre el área si $AB = 39$ mm, $BC = 52$ mm, $CD = 25$ mm y $DA = 60$ mm

12. Para el cuadrilátero cíclico $ABCD$, encuentre el área si $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $CD = 2$ cm y $DA = 9$ cm.

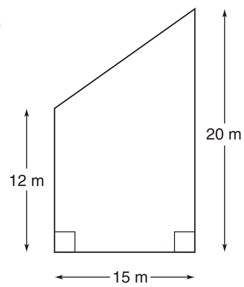
En los ejercicios 13 al 18 encuentre el área del polígono dado.

13.

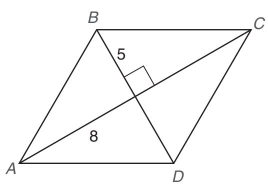


Trapezoide $ABCD$ con $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

14.

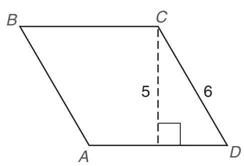


15.



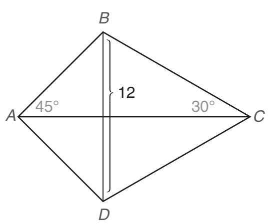
▱$ABCD$

16.



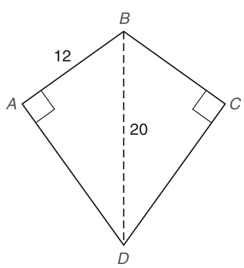
▱$ABCD$ con $\overline{BC} \cong \overline{CD}$

17.



Cometa $ABCD$ con $BD = 12$
$m\angle BAC = 45°$, $m\angle BCA = 30°$

18.



Cometa $ABCD$

19. En un triángulo de perímetro 76 pulg, la longitud del primer lado es el doble de la longitud del segundo lado y la longitud del tercer lado es 12 pulg mayor que la longitud del segundo lado. Encuentre las longitudes de los tres lados.

20. En un triángulo cuya área es 72 pulg^2, la base tiene una longitud de 8 pulg. Encuentre la longitud de la altura correspondiente.

21. Un trapezoide tiene un área de 96 cm^2. Si la altura tiene una longitud de 8 cm y una base tiene una longitud de 9 cm, encuentre la longitud de la otra base.

22. La diferencia numérica entre el área de un cuadrado y el perímetro de ese cuadrado es 32. Encuentre la longitud de un lado del cuadrado.

23. Encuentre la relación proporcional $\frac{A_1}{A_2}$ de las áreas de dos triángulos semejantes si:

a) La relación proporcional de lados correspondientes es $\frac{s_1}{s_2} = \frac{3}{2}$.

b) Las longitudes de los lados del primer triángulo son 6, 8 y 10 pulg y las del segundo triángulo son 3, 4 y 5 pulg.

24. Encuentre la relación proporcional $\frac{A_1}{A_2}$ de las áreas de dos rectángulos semejantes si:

a) La relación proporcional de lados correspondientes es $\frac{s_1}{s_2} = \frac{2}{5}$.

b) La longitud del primer rectángulo es 6 m y la longitud del segundo rectángulo es 4 m.

En los ejercicios 25 y 26 proporcione una forma de demostración en párrafo. Presente esquemas donde se requiera.

25. *Dado:* $\triangle ABC$ equilátero con cada lado de longitud s

Demuestre: $A_{ABC} = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$

(SUGERENCIA: Utilice la fórmula de Herón.)

26. *Dado:* $\triangle MNQ$ isósceles con $QM = QN = s$ y $MN = 2a$

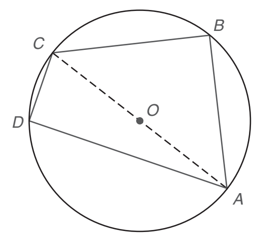
Demuestre: $A_{MNQ} = a\sqrt{s^2 - a^2}$

(**NOTA:** $s > a$.)

En los ejercicios 27 al 30 encuentre el área de la figura que se muestra.

27. *Dado:* En $\odot O$, $OA = 5$, $BC = 6$ y $CD = 4$

Encuentre: A_{ABCD}



28. *Dado:* Hexágono $RSTVWX$ con $\overline{WV} \parallel \overline{XT} \parallel \overline{RS}$

$RS = 10$

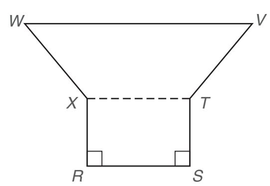
$ST = 8$

$TV = 5$

$WV = 16$

$\overline{WX} \cong \overline{VT}$

Encuentre: A_{RSTVWX}



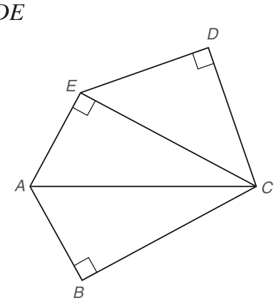
29. *Dado:* Pentágono $ABCDE$

Con $\overline{DC} \cong \overline{DE}$

$AE = AB = 5$

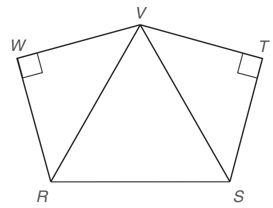
$BC = 12$

Encuentre: A_{ABCDE}



30. *Dado:* Pentágono $RSTVW$ con $m\angle VRS = m\angle VRS = 60°$, $RS = 8\sqrt{2}$, y $\overline{RW} \cong \overline{WV} \cong \overline{VT} \cong \overline{TS}$

Encuentre: A_{RSTVW}

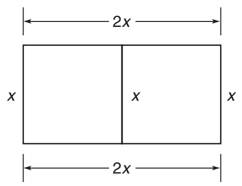


31. Mary Frances tiene un terreno para un jardín rectangular que contiene un área de 48 yd^2. Si compra 28 yd de cerca para delimitar el jardín, ¿cuáles son las dimensiones del terreno rectangular?

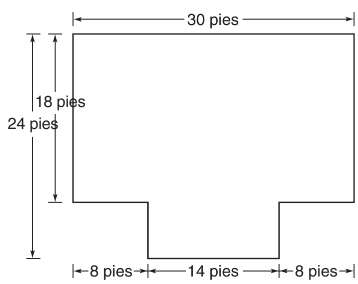
32. El perímetro de un triángulo rectángulo es 12 m. Si la hipotenusa tiene una longitud de 5 m, encuentre las longitudes de los dos catetos.

33. El granjero Watson quiere cercar un terreno rectangular que mide 245 pies por 140 pies.
a) ¿Cuál es la cantidad de cerca que necesita?
b) ¿Cuál es el costo total de la cerca si cuesta $0.59 por pie?

34. El granjero del ejercicio 33 ha decidido emplear la cerca comprada y utilizarla para delimitar los terrenos subdivididos que se muestran.
a) ¿Cuáles son las dimensiones globales de la figura rectangular que se muestra?
b) ¿Cuál es el área total de las figuras que se muestran?



35. Encuentre el área de la habitación cuya planta se muestra.



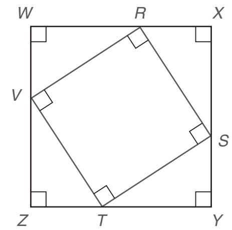
Ejercicios 35, 36

36. Encuentre el perímetro de la habitación en el ejercicio 35.

37. Examine varios rectángulos, cada uno con un perímetro de 40 pulg y encuentre las dimensiones del rectángulo que tenga la mayor área. ¿Qué tipo de figura tiene la mayor área?

38. Examine varios rectángulos, cada uno con un área de 36 $pulg^2$ y encuentre las dimensiones del rectángulo que tenga el menor perímetro. ¿Qué tipo de figura tiene el menor perímetro?

39. El cuadrado $RSTV$ está inscrito en el cuadrado $WXYZ$ como se muestra. Si $ZT = 5$ y $TY = 12$, encuentre
a) el perímetro de $RSTV$
b) el área de $RSTV$



Ejercicios 39, 40

40. El cuadrado $RSTV$ está inscrito en el cuadrado $WXYZ$ como se muestra. Si $ZT = 8$ y $TY = 15$, encuentre
a) el perímetro de $RSTV$
b) el área de $RSTV$

41. Aunque no todas las cometas son cíclicas, una con lados de longitudes 5 pulg, 1 pie, 1 pie y 5 pulg sería cíclica. Encuentre el área de esta cometa. Dé el área resultante en *pulgadas cuadradas*.

42. Aunque no todos los trapezoides son cíclicos, uno con bases de longitudes 12 cm y 28 cm y los dos catetos de longitud 10 cm sería cíclico. Encuentre el área de este trapezoide isósceles.

Para los ejercicios 43 y 44 utilice esta información. Sean a, b y c longitudes enteras de los lados de un triángulo. Si el área del triángulo también es un entero, entonces (a, b, c) se conoce como una tripleta de Herón.

43. ¿Cuál de las siguientes es una tripleta de Herón?
a) (5, 6, 7) b) (13, 14, 15)

44. ¿Cuál de las siguientes es una tripleta de Herón?
a) (9, 10, 17) b) (8, 10, 12)

45. Demuestre que el área de un trapezoide cuya altura tiene longitud h y cuya mediana tiene longitud m es $A = hm$.

Para los ejercicios 46 y 47 utilice la fórmula encontrada en el ejercicio 45.

46. Encuentre el área de un trapezoide con una altura de longitud 4.2 m y una mediana de longitud 6.5 m.

47. Encuentre el área de un trapezoide con una altura de longitud $5\frac{1}{3}$ pies y una mediana de longitud $2\frac{1}{4}$ pies.

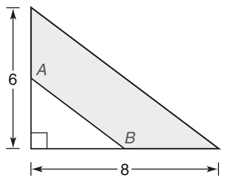
48. Demuestre que el área de un cuadrado cuya longitud de la diagonal es d es $A = \frac{1}{2}d^2$.

Para los ejercicios 49 y 50 utilice la fórmula encontrada en el ejercicio 48.

49. Encuentre el área de un cuadrado cuya diagonal tiene longitud $\sqrt{10}$ pulg.

50. Encuentre el área de un cuadrado cuya diagonal tiene longitud de 14.5 cm.

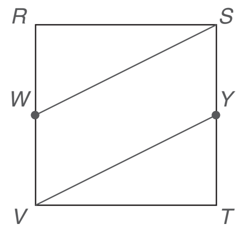
***51.** La región sombreada es la de un trapezoide. Determine la altura del trapezoide.



A y *B* son puntos medios.

52. El trapezoide *ABCD* (que no se muestra) está inscrito en $\odot O$ de manera que el lado $\overline{DC}$ es un diámetro de $\odot O$. Si $DC = 10$ y $AB = 6$, encuentre el área exacta del trapezoide *ABCD*.

53. Cada lado del cuadrado *RSTV* tiene longitud 8. El punto *W* se encuentra en $\overline{VR}$ y el punto *Y* se encuentra en $\overline{TS}$ de manera que forman el paralelogramo *VWSY*, que tiene un área de 16 unidades^2. Encuentre x, la longitud de $\overline{VW}$.



8.3 Polígonos regulares y área

CONCEPTOS CLAVE

- Polígono regular
- Centro y ángulo central de un polígono regular
- Radio y apotema de un polígono regular
- Área de un polígono regular

Los polígonos regulares son, por supuesto, equiláteros y equiángulos. Como se vio en la sección 7.3, se puede inscribir un círculo dentro de cualquier polígono regular y se puede circunscribir un círculo respecto a cualquier polígono regular. Para el hexágono regular *ABCDEF* que se muestra en la figura 8.32, suponga que $\overline{QE}$ y $\overline{QD}$ bisecan los ángulos internos de *ABCDEF* como se muestra. En términos del hexágono *ABCDEF*, recuerde estos términos y teoremas.

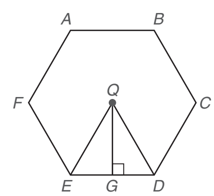


Figura 8.32

1. El punto *Q* es el *centro* del hexágono regular *ABCDEF*. Este punto *Q* es el centro común de los círculos inscrito y circunscrito para el hexágono regular *ABCDEF*.
2. $\overline{QE}$ es un *radio* del hexágono regular *ABCDEF*. Un radio une el centro del polígono regular con un vértice.
3. $\overline{QG}$ es una *apotema* del hexágono regular *ABCDEF*. Una apotema es un segmento de recta trazado desde el centro de un polígono regular de manera que sea perpendicular a un lado del polígono.
4. El $\angle EQD$ es un ángulo central del hexágono regular *ABCDEF*. El punto central *Q* es el vértice de un ángulo central, cuyos lados son radios consecutivos del polígono. La medida de un ángulo central de un polígono regular de n lados es $c = \frac{360°}{n}$.
5. Cualquier radio de un polígono regular biseca el ángulo interior hasta el cual está trazado.
6. Cualquier apotema de un polígono regular biseca el lado hasta el cual está trazado.

Entre los polígonos regulares se encuentran el cuadrado y el triángulo equilátero. Como se vio en la sección 8.1, el área de un cuadrado cuyos lados tienen longitud s está dada por $A = s^2$.

EJEMPLO 1

Encuentre el área del cuadrado cuya longitud de la apotema es $a = 2$ pulg.

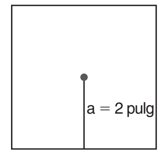


Figura 8.33

Solución La apotema es la distancia desde el centro hasta un lado. Para el cuadrado, $s = 2a$; es decir, $s = 4$ pulg. Entonces $A = s^2$ será $A = 4^2$ y $A = 16$ pulg^2. ■

Ejercicios 1-4

En el ejercicio 25 de la sección 8.2 se demostró que el área de un triángulo equilátero cuyos lados son de longitud s está dada por

$$A = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$$

La siguiente es una demostración gráfica de esta relación de área.

DEMOSTRACIÓN GRÁFICA

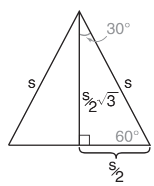


Figura 8.34

DADO: El triángulo equilátero con lados de longitud s

DEMUESTRE: $A = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$

DEMOSTRACIÓN: Con base en el triángulo 30°-60°-90° en la figura 8.34, $A = \frac{1}{2}bh$ se vuelve

$$A = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{s}{2}\sqrt{3}$$

por tanto $A = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$.

EJEMPLO 2

Encuentre el área de un triángulo equilátero (que no se muestra) en el que cada lado mide 4 pulgadas.

Solución $A = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ se vuelve $A = \frac{4^2}{4}\sqrt{3}$ o $A = 4\sqrt{3}$ pulg^2. ■

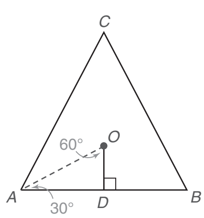


Figura 8.35

EJEMPLO 3

Encuentre el área del triángulo equilátero ABC en el que la apotema $\overline{OD}$ tiene una longitud de 6 cm.

Solución Vea la figura 8.35. Si $OD = 6$ cm, entonces $AD = 6\sqrt{3}$ cm en el triángulo AOD 30°-60°-90° indicado. A su vez, $AB = 12\sqrt{3}$ cm. Ahora $A = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$ será

$$A = \frac{(12\sqrt{3})^2}{4}\sqrt{3} = \frac{432}{4}\sqrt{3} = 108\sqrt{3}\text{ cm}^2$$ ■

Ejercicios 5-8

Ahora se buscará una fórmula general para el área de cualquier polígono regular.

ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

En el capítulo 7 y el capítulo 8 se establecieron las bases para determinar el área de un polígono regular. En la demostración del teorema 8.3.1, la figura elegida es un pentágono regular; sin embargo, la demostración se aplica a un polígono regular de cualquier número de lados.

También vale la pena observar que el perímetro P de un polígono regular es la suma de sus lados iguales. Si hay n lados y cada uno tiene longitud s, el perímetro del polígono regular es $P = ns$.

TEOREMA 8.3.1

El área A de un polígono regular cuyo apotema tiene longitud a y cuyo perímetro es P está dado por

$$A = \frac{1}{2}aP$$

GEE *Ejercicios 9-11*

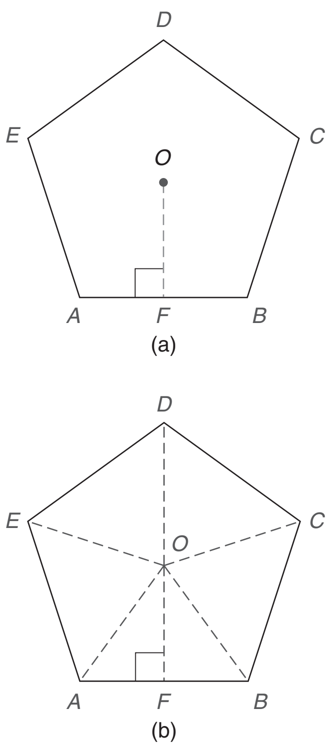


Figura 8.36

DADO: Polígono regular $ABCDE$ en la figura 8.36(a) tal que $OF = a$ y el perímetro de $ABCDE$ es P

DEMUESTRE: $A_{ABCDE} = \frac{1}{2}aP$

DEMOSTRACIÓN: Desde el centro O, trace radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ y $\overline{OE}$. (Vea la figura 8.36(b).] Ahora $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOE$ y $\triangle EOA$ todos son $\cong$ por LLL. Donde s representa la longitud de cada uno de los lados congruentes del polígono regular y a es la longitud de una apotema, el área de cada triángulo es $\frac{1}{2}sa$ (de $A = \frac{1}{2}bh$). Por tanto, el área del pentágono es

$$\begin{aligned} A_{ABCDE} &= \left(\frac{1}{2}sa\right) + \left(\frac{1}{2}sa\right) + \left(\frac{1}{2}sa\right) + \left(\frac{1}{2}sa\right) + \left(\frac{1}{2}sa\right) \\ &= \frac{1}{2}a(s + s + s + s + s) \end{aligned}$$

Dado que la suma $s + s + s + s + s$ o ns representa el perímetro P del polígono, se tiene

$$A_{ABCDE} = \frac{1}{2}aP$$

■

EJEMPLO 4

Utilice $A = \frac{1}{2}aP$ para encontrar el área del cuadrado cuya longitud de la apotema es $a = 2$ pulg.

Solución Para esta repetición del ejemplo 1, vea la figura 8.33 cuando se necesite. Como la longitud de una apotema de un cuadrado es $a = 2$, la longitud del lado es $s = 4$. A su vez, el perímetro es $P = 16$ pulg.

Ahora $A = \frac{1}{2}aP$ será $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 16$, por tanto $A = 16$ pulg^2.

NOTA: Como se esperaba, la respuesta del ejemplo 1 se repite en el ejemplo 4. ■

EJEMPLO 5

Utilice $A = \frac{1}{2}aP$ para encontrar el área del triángulo equilátero cuya apotema tiene una longitud de 6 cm.

Solución Para esta repetición del ejemplo 3, vea la figura 8.35 en la página 374.
Ya que la longitud de la apotema $\overline{OD}$ es 6 cm, la longitud de $\overline{AD}$ es $6\sqrt{3}$ cm.
A su vez, la longitud del lado $\overline{AB}$ es $12\sqrt{3}$ cm. Para el triángulo equilátero, el perímetro es $P = 36\sqrt{3}$ cm.
Ahora, $A = \frac{1}{2}aP$ será $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 36\sqrt{3}$, por tanto $A = 108\sqrt{3}$ cm^2.

NOTA: Como se observa, la respuesta encontrada en el ejemplo 3 se repite en el ejemplo 5. ■

Para los ejemplos 6 y 7, las medidas de los segmentos de recta que representan la longitud de la apotema, el radio o el lado de un polígono regular dependen de relaciones que se desarrollan en el estudio de la trigonometría. Los métodos empleados para encontrar medidas relacionadas se desarrollarán en el capítulo 11 pero de momento no se les presta atención. Muchas de las medidas que se proporcionan en los ejemplos siguientes y en el conjunto de ejercicios para esta sección en realidad son sólo *buenas aproximaciones*.

EJEMPLO 6

En la figura 8.36(a) en la página 375, encuentre el área del pentágono regular *ABCDE* con centro *O* si $OF = 4$ y $AB = 5.9$.

Solución $OF = a = 4$ y $AB = 5.9$. Por tanto, $P = 5(5.9)$ o $P = 29.5$.
En consecuencia,

$$\begin{aligned} A_{ABCDE} &= \frac{1}{2} \cdot 4(29.5) \\ &= 59 \text{ unidades}^2 \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 7

Encuentre el área del octágono regular que se muestra en la figura 8.37. El centro de *PQRSTUVW* es el punto *O*. La longitud de la apotema $\overline{OX}$ es 12.1 cm y la longitud del lado $\overline{QR}$ es 10 cm.

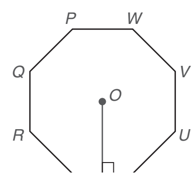


Figura 8.37

Solución Si $QR = 10$ cm, entonces el perímetro del octágono regular *PQRSTUVW* es $8 \cdot 10$ cm u 80 cm. Con la longitud de la apotema siendo $OX = 12.1$ cm, la fórmula del área $A = \frac{1}{2}aP$ se vuelve $A = \frac{1}{2} \cdot 12.1 \cdot 80$, por tanto $A = 484$ cm^2. ■

GEE
Ejercicios 12-15

EJEMPLO 8

Encuentre el área exacta del triángulo equilátero *ABC* en la figura 8.38 si cada lado mide 12 pulg. Utilice la fórmula $A = \frac{1}{2}aP$.

Solución En el $\triangle ABC$, el perímetro es $P = 3 \cdot 12$ o 36 pulg.

Para encontrar la longitud a de una apotema, se traza el radio $\overline{OA}$ desde el centro O hasta el punto A y la apotema $\overline{OM}$ desde O hasta el lado $\overline{AB}$. Como el radio biseca el $\angle BAC$, $m\angle OAB = 30°$. Debido a que la apotema $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $m\angle OMA = 90°$. $\overline{OM}$ también biseca $\overline{AB}$. Utilizando la relación 30°-60°-90° en el $\triangle OMA$, se observa que $a\sqrt{3} = 6$. Por tanto

$$a = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

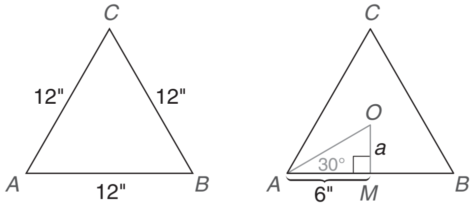


Figura 8.38

Ahora $A = \frac{1}{2}aP$ será $A = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 36 = 36\sqrt{3}$ pulg^2.

NOTA: Utilizando el valor de una calculadora para $\sqrt{3}$ conduce a una aproximación del área en vez de a un área exacta. ■

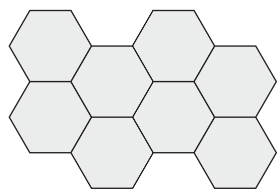
GEE *Ejercicios 12-15*

Descubra

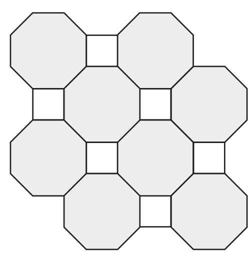
MOSAICOS

Los mosaicos son patrones compuestos estrictamente de polígonos regulares entrelazados y sin traslaparse. Todos los polígonos regulares de un número dado de lados serán congruentes. Los mosaicos son de uso común en diseño, pero en especial en pisos (losetas y laminados). Un *mosaico puro* es el que se forma empleando sólo un polígono regular en el patrón. Un *mosaico impuro* es el que se forma utilizando dos polígonos regulares diferentes.

En el mosaico puro adjunto sólo aparece un hexágono regular. En la naturaleza un panal tiene compartimentos que son hexágonos regulares. Observe que las medidas de los ángulos adyacentes deben sumar 360°; en este caso, $120° + 120° + 120° = 360°$. También sería posible formar un mosaico puro de cuadrados congruentes debido a que la suma de las medidas de los ángulos adyacentes sería $90° + 90° + 90° + 90° = 360°$.



En el mosaico impuro que se muestra se utiliza el octágono regular y el cuadrado. En las aceras de Champaign-Urbana en el campus de la University of Illinois se emplea este patrón de mosaico. Una vez más, se necesita que la suma de las medidas de los ángulos adyacentes sea 360°; para este mosaico impuro, $135° + 135° + 90° = 360°$.



a) ¿Se pueden utilizar triángulos equiláteros congruentes para formar un mosaico puro?
b) ¿Se pueden utilizar dos hexágonos regulares y un cuadrado para construir un mosaico impuro?

RESPUESTAS

a) Sí, ya que $6 \times 60° = 360°$ b) No, debido a que $120° + 120° + 90° \neq 360°$

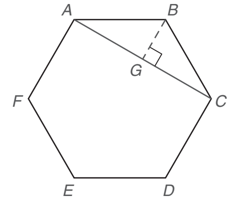
Ejercicios 8.3

1. Encuentre el área de un cuadrado con
   a) lados de longitud 3.5 cm cada uno.
   b) apotema de longitud 4.7 pulg.
2. Encuentre el área de un cuadrado con
   a) un perímetro de 14.8 cm.
   b) radio de longitud $4\sqrt{2}$ pulg.
3. Encuentre el área de un triángulo equilátero con
   a) lados de longitud 2.5 cm cada uno.
   b) apotema de longitud 3 pulg.
4. Encuentre el área de un triángulo equilátero con
   a) un perímetro de 24.6 cm.
   b) radio de longitud 4 pulg.
5. En un polígono regular, cada ángulo central mide 30°. Si cada lado del polígono regular mide 5.7 pulg, encuentre el perímetro del polígono.
6. En un polígono regular, cada ángulo interno mide 135°. Si cada lado del polígono regular mide 4.2 cm, encuentre el perímetro del polígono.
7. Para un hexágono regular, la longitud de la apotema es 10 cm. Encuentre la longitud del radio para el círculo circunscrito para este hexágono.
8. Para un hexágono regular la longitud del radio es 12 pulg. Encuentre la longitud del radio para el círculo inscrito para este hexágono.
9. En un tipo de polígono regular particular la longitud del radio es exactamente la misma que la longitud de un lado del polígono. ¿Qué tipo de polígono regular es?
10. En un tipo de polígono regular particular la longitud de la apotema es exactamente la mitad de la longitud de un lado. ¿Qué tipo de polígono regular es?
11. En un tipo de polígono regular, la medida de cada ángulo interno $\left(I = \frac{(n-2)180°}{n}\right)$ es igual a la medida de cada ángulo central. ¿Qué tipo de polígono regular es?
12. Si el área ($A = \frac{1}{2}aP$) y el perímetro de un polígono regular son numéricamente iguales, encuentre la longitud de la apotema del polígono regular.
13. Encuentre el área de un cuadrado con apotema $a = 3.2$ cm y perímetro $P = 25.6$ cm.
14. Encuentre el área de un triángulo equilátero con apotema $a = 3.2$ cm y perímetro $P = 19.2\sqrt{3}$ cm.
15. Encuentre el área de un triángulo equiángulo con apotema $a = 4.6$ cm y perímetro $P = 27.6\sqrt{3}$ pulg.
16. Encuentre el área de un cuadrado con apotema $a = 8.2$ pies y perímetro $P = 65.6$ pies.

En los ejercicios 17 al 30 utilice la fórmula $A = \frac{1}{2}aP$ para encontrar el área del polígono regular descrito.

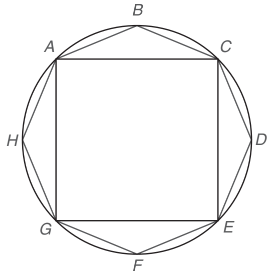
17. Encuentre el área de un pentágono regular con una apotema de longitud $a = 5.2$ cm y cada lado de longitud $s =$ 7.5 cm.
18. Encuentre el área de un pentágono regular con una apotema de longitud $a = 6.5$ pulg y cada lado de longitud $s = 9.4$ pulg.
19. Encuentre el área de un octágono regular con una apotema de longitud $a = 9.8$ pulg y cada lado de longitud $s =$ 8.1 pulg.
20. Encuentre el área de un octágono regular con una apotema de longitud $a = 7.9$ pies y cada lado de longitud $s =$ 6.5 pies.
21. Encuentre el área de un hexágono regular cuyos lados tienen una longitud de 6 cm.
22. Encuentre el área de un cuadrado cuya apotema mide 5 cm.
23. Encuentre el área de un triángulo equilátero cuyo radio mide 10 pulg.
24. Encuentre el área aproximada de un pentágono regular cuya apotema mide 6 pulg y cada uno de sus lados miden aproximadamente 8.9 pulg.
25. En un octágono regular, la relación proporcional aproximada de la longitud de una apotema a la longitud de un lado es 6:5. Para un octágono regular con una apotema de longitud 15 cm, encuentre el área aproximada.
26. En un dodecágono regular (12 lados), la relación proporcional aproximada de la longitud de una apotema a la longitud de un lado es 15:8. Para un dodecágono regular con un lado de longitud 12 pies, encuentre el área aproximada.
27. En un dodecágono regular (12 lados), la relación proporcional aproximada de la longitud de una apotema a la longitud de un lado es 15:8. Para un dodecágono regular con una apotema de longitud 12 pies, encuentre el área aproximada.
28. En un octágono regular, la relación proporcional aproximada de la longitud de una apotema a la longitud de un lado es 6:5. Para un octágono regular con un lado de longitud 15 pies, encuentre el área aproximada.
29. En un polígono regular de 12 lados, la medida de cada lado es 2 pulg y la medida de una apotema es exactamente $(2 + \sqrt{3})$ pulg. Encuentre el área exacta de este polígono regular.
30. En un octágono regular, la medida de cada apotema es 4 cm y cada lado mide exactamente $8(\sqrt{2} - 1)$ cm. Encuentre el área exacta de este polígono regular.
31. Encuentre la relación proporcional del área de un cuadrado circunscrito respecto a un círculo al área de un cuadrado inscrito en el círculo.

*32. Dado el hexágono regular *ABCDEF* con cada lado de longitud 6 y diagonal $\overline{AC}$, encuentre el área del pentágono *ACDEF*.



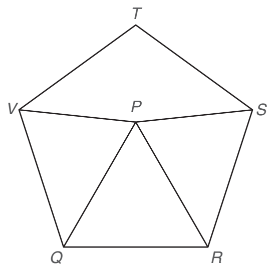
*33. Dado el octágono regular *RSTUVWXY* con cada lado de longitud 4 y diagonal $\overline{RU}$, encuentre el área del hexágono *RYXWVU*.

34. El octágono regular *ABCDEFGH* está inscrito en un círculo cuyo radio es $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ cm. Considerando que el área del octágono es menor que el área del círculo y mayor que el área del cuadrado *ACEG*, descubra los dos enteros entre los cuales se debe encontrar el área del octágono.



(**NOTA:** Para el círculo, utilice $A = \pi r^2$ con $\pi \approx \frac{22}{7}$.)

***35.** Dado el pentágono regular *RSTVQ* y el triángulo equilátero *PQR*, la longitud de una apotema (que no se muestra) de *RSTVQ* es 12, en tanto que la longitud de cada lado del triángulo equilátero es 10. Si $PV \approx 8.2$, encuentre el área aproximada de la cometa *VPST*.



***36.** Considere el pentágono regular *RSTVQ* (que no se muestra). Dado que las diagonales $\overline{QT}$ y $\overline{VR}$ se intersecan en el punto *F*, demuestre que $VF \cdot FR = TF \cdot FQ$.

***37.** Considere un hexágono regular *ABCDEF* (que no se muestra). Al unir los puntos medios de dos lados consecutivos, se forma un hexágono regular menor *MNPQRS*. Demuestre que la relación proporcional de área es

$$\frac{A_{MNPQRS}}{A_{ABCDEF}} = \frac{3}{4}$$

8.4 Circunferencia y área de un círculo

CONCEPTOS CLAVE			
	Circunferencia de un círculo	Longitud de un arco	Área de un círculo
	π (Pi)	Límite	

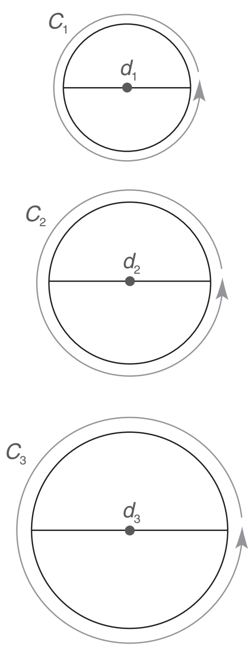


Figura 8.39

En geometría dos figuras que tienen la misma forma se describen como semejantes. Por esta razón, se dice que todos los círculos son semejantes entre sí. Al igual que existe proporcionalidad entre los lados de triángulos semejantes, la experimentación demuestra que existe una proporcionalidad entre las circunferencias (distancias alrededor) y los diámetros (distancias a través) de círculos, consulte la actividad Descubra de la página 380. Representando las circunferencias de los círculos en la figura 8.39 por C_1, C_2 y C_3 y sus longitudes respectivas de los diámetros por d_1, d_2 y d_3, se afirma que

$$\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2} = \frac{C_3}{d_3} = k$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

POSTULADO 22

La relación proporcional de la circunferencia de un círculo a la longitud de su diámetro es una constante positiva única.

Descubra

Encuentre un objeto de forma circular, como la tapa de un frasco. Utilizando una cinta flexible (como la que utilizan las costureras o los carpinteros), mida la distancia alrededor (circunferencia) y la distancia a través (longitud del diámetro) del círculo. Ahora divida la circunferencia C entre la longitud del diámetro d. ¿Cuál es su resultado?

RESPUESTA

La relación proporcional debe ser ligeramente mayor que 3.

La constante de proporcionalidad k descrita en el párrafo de apertura de esta sección, en el postulado 22 y en la actividad Descubra se representa por la letra griega π (pi).

DEFINICIÓN

π es la relación proporcional entre la circunferencia C y la longitud del diámetro d de cualquier círculo; por tanto, $\pi = \frac{C}{d}$ en cualquier círculo.

En el teorema siguiente, las longitudes del diámetro y del radio del círculo se representan por d y r, respectivamente.

TEOREMA 8.4.1

La circunferencia de un círculo está dada por la fórmula

$$C = \pi d \quad \text{o} \quad C = 2\pi r$$

DADO: Círculo O con longitud del diámetro d y longitud del radio r. (Vea la figura 8.40.)

DEMUESTRE: $C = 2\pi r$

DEMOSTRACIÓN: Por el postulado 22, $\pi = \frac{C}{d}$. Multiplicando cada lado de la ecuación por d, se tiene $C = \pi d$. Dado que $d = 2r$ (la longitud del diámetro es el doble de la del radio), la fórmula para la circunferencia se puede escribir $C = \pi(2r)$, o $C = 2\pi r$. ■

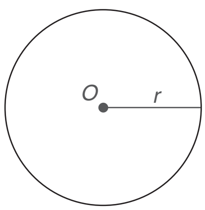


Figura 8.40

VALOR DE π

Al calcular la circunferencia de un círculo, por lo general en la respuesta se deja el símbolo π para enunciar un resultado *exacto*. Sin embargo, el valor de π es irracional y no se puede representar exactamente por una fracción común o por un decimal terminal. Cuando se necesita una aproximación de π, se utiliza una calculadora. Las aproximaciones de π que se han utilizado comúnmente a través de la historia incluyen $\pi \approx \frac{22}{7}$, $\pi \approx 3.14$ y $\pi \approx 3.1416$. Aunque estos valores aproximados se han empleado durante siglos, su calculadora proporciona una mayor precisión. En una calculadora se visualizará que $\pi \approx 3.141592654$.

GEE
Ejercicios 1-2

Exploración tecnológica

Utilice software de cómputo si dispone de él.

1. Trace un círculo con centro O.
2. A través de O, trace el diámetro $\overline{AB}$.
3. Mida la circunferencia C y la longitud d del diámetro $\overline{AB}$.
4. Demuestre que $\frac{C}{d} \approx 3.14$.

EJEMPLO 1

En el $\odot O$ en la figura 8.41, $OA = 7$ cm. Utilizando $\pi \approx \frac{22}{7}$,

a) encuentre la circunferencia aproximada C de $\odot O$.
b) encuentre la longitud aproximada del arco menor $\overset{\frown}{AB}$.

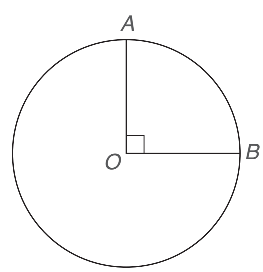


Figura 8.41

Solución

a) $C = 2\pi r$
$= 2 \cdot \frac{22}{\cancel{7}} \cdot \cancel{7}$
$= 44$ cm

b) Ya que la medida en grados del $\overset{\frown}{AB}$ es 90°, se tiene $\frac{90}{360}$ o $\frac{1}{4}$ de la circunferencia para la longitud de arco. Entonces

$$\text{longitud de } \overset{\frown}{AB} = \frac{90}{360} \cdot 44 = \frac{1}{4} \cdot 44 = 11 \text{ cm}$$ ■

Recuerde

En la perspectiva histórica en el capítulo 7 se pueden encontrar más antecedentes respecto al valor de π.

EJEMPLO 2

La circunferencia exacta de un círculo es 17π pulg.

a) Encuentre la longitud del radio.
b) Encuentre la longitud del diámetro.

Solución

a)
$$C = 2\pi r$$
$$17\pi = 2\pi r$$
$$\frac{17\pi}{2\pi} = \frac{2\pi r}{2\pi}$$
$$r = \frac{17}{2} = 8.5 \text{ pulg.}$$

b) Como $d = 2r$, $d = 2(8.5)$ o $d = 17$ pulg. ■

Figura 8.42

EJEMPLO 3

Una junta circular delgada se utiliza como sello para evitar que el aceite se fugue de un depósito (vea la figura 8.42). Si la junta tiene un radio de 2.37 pulg, utilice el valor de π proporcionado por su calculadora para encontrar la circunferencia de la junta hasta la centésima de pulgada más cercana.

Solución Utilizando la calculadora con $C = 2\pi r$, se tiene $C = 2 \cdot \pi \cdot 2.37$ o $C \approx 14.89114918$. Redondeando hasta la centésima de pulgada más cercana, $C \approx 14.89$ pulg. ■

GEE
Ejercicios 3-5

LONGITUD DE UN ARCO

En el ejemplo 1(b), se utilizó la frase *longitud de arco* dentro de una definición. De manera informal la longitud de un arco es la distancia entre los puntos extremos del arco como si se midiera a lo largo de una línea recta. Si se midiera un tercio de la circunferencia de la junta de caucho (un arco de 120°) en el ejemplo 3, se esperaría que la longitud fuera ligeramente menor que 5 pulg. Esta medición se podría efectuar sosteniendo firmemente la parte de la junta en una línea recta, pero no tan fuertemente que ocasione que estire.

Se pueden hacer dos observaciones adicionales respecto a la medición de una longitud de arco.

1. La relación proporcional de la medida en grados m de un arco a 360 (la medida en grados de todo el círculo) es la misma que la relación proporcional de la longitud ℓ del arco a la circunferencia; es decir, $\frac{m}{360} = \frac{\ell}{C}$.
2. Al igual que $m\widehat{AB}$ denota la medida en grados de un arco, $\ell\widehat{AB}$ denota la longitud del arco. Mientras que $m\widehat{AB}$ se mide en grados, $\ell\widehat{AB}$ se mide en unidades lineales como pulgadas, pies o centímetros.

TEOREMA 8.4.2

En un círculo cuya circunferencia es C, la longitud ℓ de un arco cuya medida en grados es m está dada por

$$\ell = \frac{m}{360} \cdot C$$

NOTA: Para el arco AB, $\ell\widehat{AB} = \frac{m\widehat{AB}}{360} \cdot C$.

GEE
Ejercicios 6-8

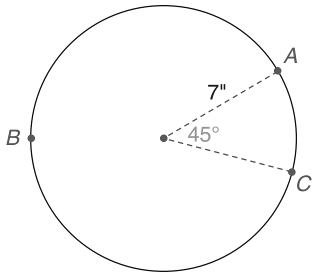


Figura 8.43

EJEMPLO 4

Encuentre la longitud aproximada del arco mayor ABC en un círculo de radio 7 pulg si $m\widehat{AC} = 45°$. Vea la figura 8.43. Utilice $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Solución $m\widehat{ABC} = 360° - 45° = 315°$. El teorema 8.4.2 establece que $\ell\widehat{ABC} = \frac{m\widehat{ABC}}{360} \cdot C$, o $\ell\widehat{ABC} = \frac{315}{360} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7$, lo que se puede simplificar a $\ell\widehat{ABC} = 38\frac{1}{2}$ pulg. ■

LÍMITES

En el análisis que sigue se utiliza el término indefinido *límite*; en la práctica, un límite representa una medida numérica. En algunas situaciones se busca un límite superior, un límite inferior o los dos. En el ejemplo siguiente se ilustra este concepto.

EJEMPLO 5

Encuentre el límite superior (número mayor posible) para la longitud de una cuerda en un círculo cuya longitud del radio es 5 cm.

Solución Considerando varias cuerdas en el círculo en la figura 8.44, se observa que la longitud mayor posible de una cuerda es la del diámetro. Por tanto, el límite de la longitud de una cuerda es 10 cm.

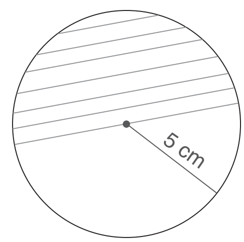


Figura 8.44

NOTA: En el ejemplo 5 el límite inferior es 0. ■

GEE *Ejercicios 9-11*

ÁREA DE UN CÍRCULO

Ahora considere el problema de encontrar el área de un círculo. Para hacer esto, considere un polígono regular de n lados inscrito en el círculo. Conforme se permite que n sea mayor (con frecuencia se escribe como $n \rightarrow \infty$ y se lee "n tiende al infinito"), se pueden hacer dos observaciones:

1. La longitud de una apotema del polígono regular tiende a la longitud de un radio del círculo como su límite ($a \rightarrow r$).
2. El perímetro del polígono regular tiende a la circunferencia del círculo como su límite ($P \rightarrow C$).

En la figura 8.45, el área de un polígono regular inscrito con n lados tiende al área del círculo como su límite conforme n aumenta. Utilizando las observaciones 1 y 2, se hace la afirmación siguiente. Debido a que la fórmula para el área de un polígono regular es

$$A = \frac{1}{2}aP$$

el área del círculo circunscrito está dada por el límite

$$A = \frac{1}{2}rC$$

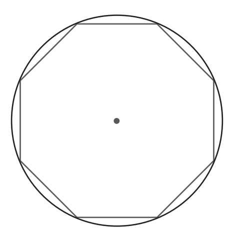


Figura 8.45

Como $C = 2\pi r$, esta fórmula se convierte en

$$A = \frac{1}{\cancel{2}} r(\cancel{2}\pi r) \qquad \text{o} \qquad A = \pi r^2$$

Con base en el análisis anterior se enuncia el teorema 8.4.3.

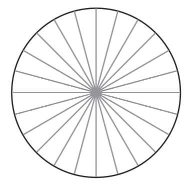
TEOREMA 8.4.3

El área A de un círculo cuyo radio tiene longitud r está dada por $A = \pi r^2$.

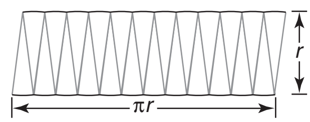
Otra justificación de la fórmula $A = \pi r^2$ se da en la actividad Descubra siguiente.

Descubra

Área de un círculo



Utilice un transportador para dividir un círculo en varios “sectores” congruentes. Por ejemplo, ángulos centrales de 15° dividirán el círculo en $\frac{360}{15} = 24$ sectores. Si estos sectores se alternan como se muestra, la figura resultante se aproxima a un paralelogramo. Con el paralelogramo con base de longitud πr (mitad de la circunferencia del círculo) y una altura de longitud r (radio del círculo), el área del paralelogramo (y del círculo) se puede ver que es $A = (\pi r)r$ o $A = \pi r^2$.



EJEMPLO 6

Encuentre el área aproximada de un círculo cuyo radio tiene una longitud de 10 pulg. (Utilice $\pi \approx 3.14$.)

Solución $A = \pi r^2$ se vuelve $A = 3.14(10)^2$. Entonces

$$A = 3.14(100) = 314 \text{ pulg}^2$$

■

EJEMPLO 7

El área aproximada de un círculo es 38.5 cm^2. Encuentre la longitud del radio del círculo. $\left(\text{Utilice } \pi \approx \frac{22}{7}.\right)$

Solución Sustituyendo los valores conocidos, la fórmula $A = \pi r^2$ se vuelve $38.5 = \frac{22}{7} \cdot r^2$, o $\frac{77}{2} = \frac{22}{7} \cdot r^2$. Multiplicando cada lado de la ecuación por $\frac{7}{22}$ se tiene

$$\frac{7}{{}_{2}\cancel{22}} \cdot \frac{\cancel{77}^{7}}{2} = \frac{\cancel{7}}{\cancel{22}} \cdot \frac{\cancel{22}}{\cancel{7}} \cdot r^2$$

o

$$r^2 = \frac{49}{4}$$

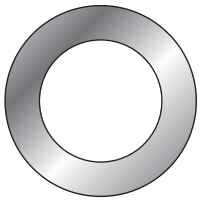


Figura 8.46

Tomando la raíz cuadrada positiva para la longitud aproximada del radio,

$$r = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ cm}$$

■

Una figura plana acotada por círculos concéntricos se conoce como *anillo* o *annulus* (vea la figura 8.46). La pieza de hardware conocida como *rondana* tiene la forma de un anillo.

GEE

Ejercicios 12-17

EJEMPLO 8

Una máquina corta rondanas de una pieza plana de metal. El radio del límite circular interno de la rondana es 0.3 pulg y el radio del límite circular externo es 0.5 pulg. ¿Cuál es el área del anillo? Dé una respuesta exacta y una aproximada redondeada a décimas de una pulgada cuadrada. Utilizando la respuesta aproximada, determine el número de pulgadas cuadradas de material utilizadas para producir 1000 rondanas. En la figura 8.46 se ilustra la forma de una rondana.

Solución Con R como el radio mayor y r el radio menor, $A = \pi R^2 - \pi r^2$. Entonces $A = \pi(0.5)^2 - \pi(0.3)^2$ o $A = 0.16\pi$. El número exacto de pulgadas cuadradas al producir una rondana es 0.16π pulg^2 o aproximadamente 0.5 pulg^2. Cuando se producen 1000 rondanas, se utilizan aproximadamente 500 pulg^2 de metal. ■

A muchos estudiantes se les dificulta recordar cuál expresión ($2\pi r$ o πr^2) se utiliza en la fórmula para la circunferencia o área de un círculo. Esto es comprensible ya que cada expresión contiene un 2, un radio r y el factor π. Para recordar que $C = 2\pi r$ da la circunferencia y $A = \pi r^2$ da el área, *piense en las unidades implicadas*. Considerando un círculo de radio 3 pulg, $C = 2\pi r$ se vuelve $C = 2 \times 3.14 \times 3$ pulg o la circunferencia es igual a 18.84 *pulgadas*. (La *distancia alrededor* de un círculo se mide en unidades *lineales* como pulgadas.) Para el círculo de radio 3 pulg, $A = \pi r^2$ se vuelve $A = 3.14 \times 3$ pulg $\times$ 3 pulg o el área es igual a 28.26 pulg^2. (El área de una región circular se mide en unidades *cuadradas*.)

Ejercicios 8.4

1. Encuentre la circunferencia y el área exactas de un círculo cuyo radio tiene una longitud de 8 cm.

2. Encuentre la circunferencia y el área exactas de un círculo cuyo diámetro tiene una longitud de 10 pulg.

3. Encuentre la circunferencia y el área aproximadas de un círculo cuyo radio tiene una longitud de $10\frac{1}{2}$ pulg. Utilice $\pi \approx \frac{22}{7}$.

4. Encuentre la circunferencia y el área aproximadas de un círculo cuyo diámetro es 20 cm. Utilice $\pi \approx 3.14$.

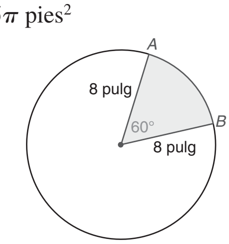
5. Encuentre las longitudes exactas de un radio y un diámetro de un círculo cuya circunferencia es:
a) 44π pulg   b) 60π pies

6. Encuentre las longitudes aproximadas de un radio y un diámetro de un círculo cuya circunferencia es:
a) 88 pulg $\left(\text{utilice } \pi \approx \frac{22}{7}.\right)$ b) 157 m (utilice $\pi \approx 3.14$).

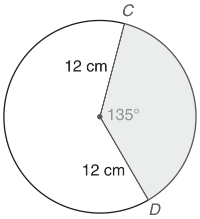
7. Encuentre las longitudes exactas de un radio y un diámetro de un círculo cuya área es:
a) 25π pulg^2 b) 2.25π cm^2

8. Encuentre la longitud exacta de un radio y la circunferencia exacta de un círculo cuya área es:
a) 36π m^2 b) 6.25π pies^2

9. Encuentre la longitud exacta $\ell\widehat{AB}$, donde $\widehat{AB}$ se refiere al arco menor del círculo.



10. Encuentre la longitud exacta $\ell\widehat{CD}$ del arco menor que se muestra.



11. Utilice el valor π de su calculadora para encontrar la circunferencia aproximada de un círculo con radio de 12.38 pulg.

12. Utilice el valor π de su calculadora para encontrar el área aproximada de un círculo con radio de 12.38 pulg.

13. Un disco circular de metal cuya área es 143 cm^2 se utiliza como disco removible en un servicio eléctrico en una fábrica. Utilice el valor π de su calculadora para encontrar el radio del disco hasta la décima de centímetro más cercana.

14. Una rondana de seguridad circular cuya circunferencia externa mide 5.48 cm se utiliza en una caja de conexiones eléctricas para mantener en posición un cable eléctrico. Utilice el valor π de su calculadora para encontrar el radio externo hasta la décima de centímetro más cercana.

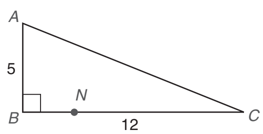
15. El ángulo central correspondiente a una zapata de freno circular mide 60°. ¿Aproximadamente cuál es la longitud de la superficie curva de la zapata de freno si la longitud del radio es 7 pulg?

16. Utilice su calculadora para encontrar las longitudes aproximadas del radio y del diámetro de un círculo cuya área es 56.35 $pulg^2$.

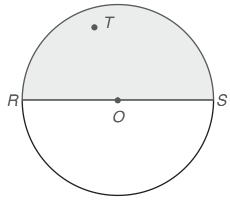
17. Un rectángulo tiene un perímetro de 16 pulg. ¿Cuál es el límite (valor máximo posible) del área del rectángulo?

18. Dos lados de un triángulo miden 5 pulg y 7 pulg. ¿Cuál es el límite de la longitud del tercer lado?

19. Sea N cualquier punto en el lado $\overline{BC}$ del triángulo rectángulo ABC. Encuentre los límites superior e inferior para la longitud de $\overline{AN}$.

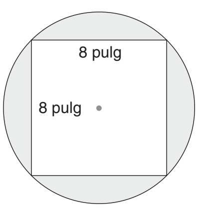


20. ¿Cuál es el límite de m$\angle RTS$ si T se encuentra en el interior de la región sombreada?



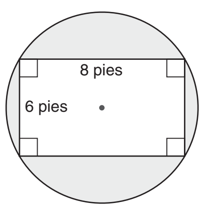
En los ejercicios 21 al 24 encuentre las áreas exactas de las regiones sombreadas.

21.

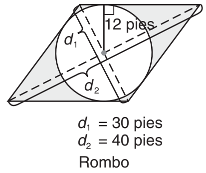


Cuadrado inscrito en un círculo

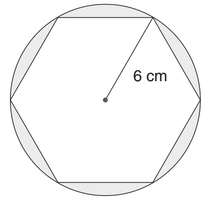
22.



23.



24.



Hexágono regular inscrito en un círculo

En los ejercicios 25 y 26 utilice el valor π de su calculadora para resolver cada problema. Redondee las respuestas hasta el entero más cercano.

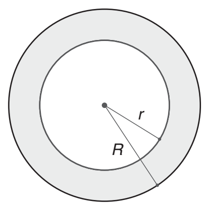
25. Encuentre la longitud del radio de un círculo cuya área es 154 cm^2.

26. Encuentre la longitud del diámetro de un círculo cuya circunferencia es 157 pulg.

27. Suponiendo que un arco de 90° tiene una longitud exacta de 4π pulg, encuentre la longitud del radio del círculo.

28. La relación proporcional de la circunferencia de dos círculos es 2:1. ¿Cuál es la relación proporcional de las áreas?

29. Dados círculos concéntricos con radios de longitudes R y r, donde $R > r$, explique por qué $A_{\text{anillo}} = \pi(R + r)(R - r)$.



30. Dado un círculo con diámetro de longitud d, explique por qué $A_{\text{círculo}} = \frac{1}{4}\pi d^2$.

31. Los radios de dos círculos concéntricos difieren en longitud en exactamente 1 pulg. Si sus áreas difieren en exactamente 7π $pulg^2$, encuentre las longitudes de los radios de los dos círculos.

En los ejercicios 32 al 42, utilice el valor π de su calculadora a menos que otra cosa se indique. Redondee las respuestas hasta dos lugares después del punto.

32. La alfombra en la entrada circular de una iglesia necesita reemplazarse. El diámetro de la región circular que se cubrirá con la alfombra es 18 pies.

a) ¿Qué longitud (en pies) de una tira metálica de protección se necesita para sujetar la circunferencia de la alfombra?

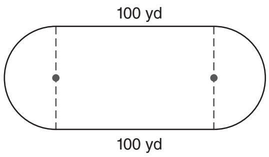
b) Si las tiras metálicas se venden en longitudes de 6 pies, ¿cuántas se necesitan?

(**NOTA:** Suponga que las tiras se pueden doblar para seguir el círculo y que se pueden colocar extremo con extremo.)

c) Si el costo de la tira metálica es $1.59 por pie lineal, encuentre el costo de las tiras metálicas necesarias.

33. En la sala central de un gimnasio, se pintará un emblema circular grande. El diseño circular tiene un radio de longitud 8 pies.
a) ¿Cuál es el área que se pintará?
b) Si una pinta de pintura cubre 70 pies^2, ¿cuántas pintas de pintura se necesitan para terminar el trabajo?
c) Si cada pinta de pintura cuesta \$2.95, encuentre el costo de la pintura necesaria.

34. Se construirá una pista alrededor de un campo de futbol en una secundaria. Si las partes laterales rectas tienen una longitud de 100 yd, ¿cuál es la longitud del radio necesaria para cada uno de los semicírculos que se muestran si la longitud total alrededor de la pista será de 440 yd?

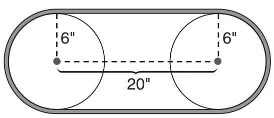


35. Un jardín circular en un centro comercial tiene un diámetro de 40 pies. El área necesita volver a plantarse.
a) ¿Cuál es el área total que se debe plantar? (Utilice $\pi \approx 3.14$.)
b) Si 1 lb de semillas se utiliza para cubrir una región de 60 pies^2, ¿cuántas libras de semillas se necesitan?
c) Si el costo de 1 lb de semillas es \$1.65, ¿cuál es el costo total necesario de semillas para pasto?

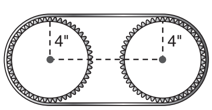
36. Encuentre el área aproximada de un polígono regular que tiene 20 lados si la longitud de su radio es 7 cm.

37. Encuentre el perímetro aproximado de un polígono regular que tiene 20 lados si la longitud de su radio es 7 cm.

38. En un sistema de dos poleas, los centros de las poleas están separados 20 pulg. Si el radio de cada polea mide 6 pulg, ¿cuál es la longitud de la banda utilizada en el sistema de poleas?



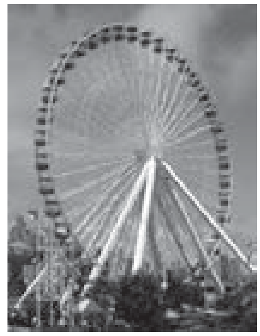
39. Si dos engranes, cada uno de radio 4 pulg, se utilizan en un sistema de mando por cadena con una cadena de longitud 54 pulg, ¿cuál es la distancia entre los centros de los engranes?



40. Una pizza con un diámetro de 12 pulg cuesta \$6.95. Una pizza con diámetro de 16 pulg con los mismos ingredientes cuesta \$9.95. ¿Cuál pizza es la mejor compra?

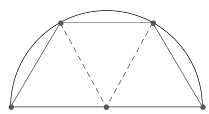
41. Un satélite de comunicaciones tiene una órbita circular 375 millas arriba de la Tierra. Si el radio de la Tierra es de aproximadamente 4000 mi, ¿qué distancia recorre el satélite en una órbita completa?

42. El radio de la trayectoria circular de la rueda de la fortuna es de 40 pies. Si un paseo de 12 revoluciones se hace en 3 minutos, ¿a qué velocidad en *pies por segundo* se mueve un pasajero en un carro durante el paseo?

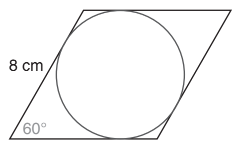


43. El diámetro de un carrusel es de 30 pies. A toda velocidad hace una revolución completa en 6 s. ¿A qué velocidad, en *pies por segundo*, se mueve un caballo en el borde exterior?

44. La superficie de una mesa es semicircular cuando sus tres hojas plegables congruentes se utilizan. ¿En cuánto aumenta el área de la mesa cuando se elevan las hojas plegables? Dé su respuesta hasta el porcentaje *entero* más cercano.



*** 45.** Dado que la longitud de cada lado de un rombo es 8 cm y que un ángulo interno (que se muestra) mide 60°, encuentre el área del círculo inscrito.



8.5 Más acerca de relaciones en el círculo

CONCEPTOS CLAVE

- Sector
- Área y perímetro de un sector
- Segmento de un círculo
- Área y perímetro de un segmento
- Área de un triángulo con un círculo inscrito

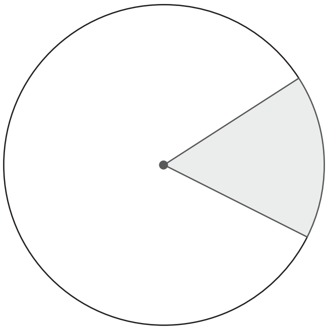


Figura 8.47

DEFINICIÓN

Un **sector** de un círculo es una región acotada por dos radios del círculo y un arco intersecado por esos radios. (Vea la figura 8.47.)

Un sector por lo general se presentará sombreado para evitar confusión acerca de si el arco relacionado es un arco mayor o uno menor. En términos simples, el sector de un círculo por lo general tiene la forma de una rebanada de pastel.

ÁREA DE UN SECTOR

Al igual que la longitud de un arco es parte de la circunferencia de un círculo, el área de un sector es parte del área de este círculo. Cuando las fracciones se ilustran utilizando círculos, $\frac{1}{4}$ se representa sombreando un sector de 90° y $\frac{1}{3}$ se representa sombreando un sector de 120° (vea la figura 8.48). Así, se hace la suposición siguiente acerca de la medida del área de un sector.

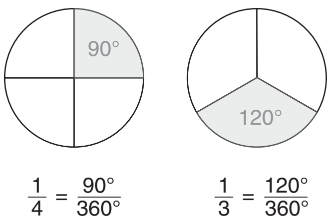


Figura 8.48

POSTULADO 23

La relación proporcional de la medida en grados m del arco (o ángulo central) de un sector a 360° es la misma que la relación proporcional del área del sector al área del círculo; es decir,

$$\frac{\text{área del sector}}{\text{área del círculo}} = \frac{m}{360}.$$

TEOREMA 8.5.1

En un círculo de radio r, el área A de un sector cuyo arco tiene una medida m en grados está dada por

$$A = \frac{m}{360}\pi r^2.$$

El teorema 8.5.1 se deduce directamente del postulado 23.

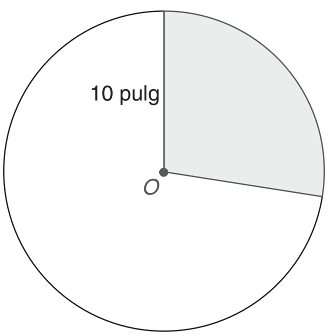


Figura 8.49

EJEMPLO 1

Si m$\angle O = 100°$, encuentre el área del sector de 100° que se muestra en la figura 8.49. Utilice su calculadora y redondee la respuesta hasta la centésima de pulgada cuadrada más cercana.

Solución

$$A = \frac{m}{360}\pi r^2$$

será

$$A = \frac{100}{360} \cdot \pi \cdot 10^2 \approx 87.27 \text{ pulg}^2$$ ■

En aplicaciones con círculos, con frecuencia se buscan respuestas exactas para la circunferencia y el área, por lo que simplemente en el resultado se deja π. Por ejemplo, en un círculo con longitud del radio de 5 pulg, la circunferencia exacta es 10π pulg y el área exacta se expresa como 25π pulg^2.

Dado que un sector está acotado por dos radios y un arco, el perímetro de un sector es la suma de las longitudes de los dos radios y la longitud de su arco. En el ejemplo 2 se aplica esta fórmula, $P_{\text{sector}} = 2r + \ell\widehat{AB}$.

EJEMPLO 2

Encuentre el perímetro del sector que se muestra en la figura 8.49 en la página 387. Utilice el valor π de su calculadora y redondee su respuesta hasta la centésima de pulgada más cercana.

Solución Como $r = 10$ y $m\angle O = 100°$, $\ell\widehat{AB} = \frac{100}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10 \approx 17.45$ pulg.
Ahora $P_{\text{sector}} = 2r + \ell\widehat{AB}$ será $P_{\text{sector}} = 2(10) + 17.45 \approx 37.45$ pulg. ■

Dado que un semicírculo es la mitad de un círculo, una región semicircular corresponde a un ángulo central de 180°. Como se enuncia en el corolario siguiente para el teorema 8.5.1, el área de un semicírculo es $\frac{180}{360}$ (o la mitad) del área del círculo completo.

GEE
Ejercicios 1-6

COROLARIO 8.5.2

El área de una región semicircular de longitud de radio r es $A = \frac{1}{2}\pi r^2$.

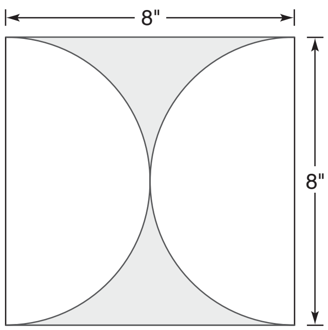


Figura 8.50

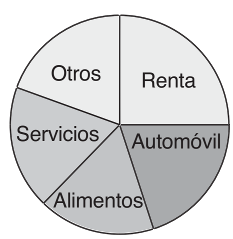
EJEMPLO 3

En la figura 8.50 se muestra un cuadrado con lados de 8 pulg y con semicírculos cortados. Encuentre el área sombreada exacta dejando π en la respuesta.

Solución Para encontrar el área sombreada A, se observa que $A + 2 \cdot A_{\text{semicírculo}} = A_{\text{cuadrado}}$. Se deduce que $A = A_{\text{cuadrado}} - 2 \cdot A_{\text{semicírculo}}$.
Si el lado del cuadrado mide 8 pulg, entonces el radio de cada semicírculo es 4 pulg. Ahora $A = 8^2 - 2\left(\frac{1}{2}\pi \cdot 4^2\right)$ o $A = 64 - 2(8\pi)$, por tanto $A = (64 - 16\pi)$ pulg^2. ■

Descubra

En estadística para representar el desglose de un presupuesto se utiliza una gráfica circular. En la gráfica circular que se muestra está sombreado un sector de 90° (un cuarto del área del círculo) para mostrar que 25% del ingreso de una persona (un cuarto de su ingreso) se dedica al pago de la renta. ¿Qué medida en grados del sector se debe sombrear si un sector indica que el 20% del ingreso de una persona se destina al pago de la mensualidad de su automóvil?



RESPUESTA
72° (de 20% de 360°)

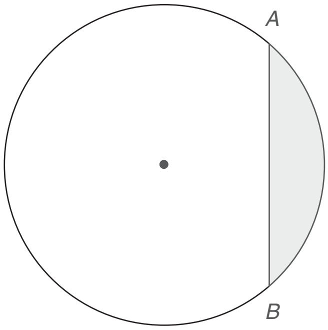


Figura 8.51

ÁREA DE UN SEGMENTO

DEFINICIÓN

Un **segmento** de un círculo es una región acotada por una cuerda y su arco menor (o mayor).

En la figura 8.51 el segmento está acotado por la cuerda $\overline{AB}$ y su arco menor $\overset{\frown}{AB}$. Una vez más, se evita confusión sombreando el segmento cuya área o perímetro se busca.

EJEMPLO 4

Encuentre el área del segmento acotado por una cuerda y un arco cuya medida es 90°. El radio tiene una longitud de 12 pulg, como se muestra en la figura 8.52.

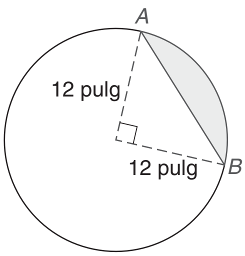


Figura 8.52

Solución Sea $A_\triangle$ el área del triángulo que se muestra. Como $A_\triangle + A_{\text{segmento}} = A_{\text{sector}}$,

$$\begin{aligned} A_{\text{segmento}} &= A_{\text{sector}} - A_\triangle \\ &= \frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 12^2 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \\ &= (36\pi - 72) \text{ pulg}^2. \end{aligned}$$ ■

En el ejemplo 4 los límites del segmento que se muestra son la cuerda $\overline{AB}$ y el arco menor $\overset{\frown}{AB}$. Por tanto, el perímetro del segmento está dado por $P_{\text{segmento}} = AB + \ell\overset{\frown}{AB}$. En el ejemplo 5 se utiliza esta fórmula.

EJEMPLO 5

Encuentre el perímetro exacto del segmento que se muestra en la figura 8.53. Luego utilice su calculadora para aproximar esta respuesta hasta la centésima de pulgada más cercana.

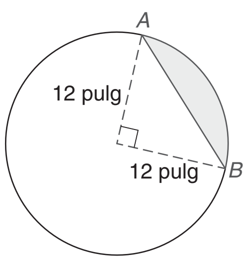


Figura 8.53

Solución Como $\ell\overset{\frown}{AB} = \frac{90}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$, se tiene $\ell\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 12 = 6\pi$ pulg.

Utilizando el teorema de Pitágoras o la relación 45°-45°-90°, $AB = 12\sqrt{2}$.

Ahora $P_{\text{segmento}} = AB + \ell\overset{\frown}{AB}$ se vuelve $P_{\text{segmento}} = (12\sqrt{2} + 6\pi)$ pulg. Utilizando una calculadora se encuentra que el perímetro aproximado es 35.82 pulg. ■

GEE *Ejercicios 7-11*

ÁREA DE UN TRIÁNGULO CON UN CÍRCULO INSCRITO

TEOREMA 8.5.3

Sea que P represente el perímetro de un triángulo y r represente la longitud del radio de su círculo inscrito, el área del triángulo está dada por

$$A = \frac{1}{2}rP$$

DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA 8.5.3

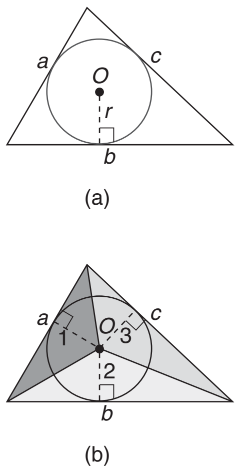


Figura 8.54

DADO: Un triángulo con perímetro P, cuyos lados miden a, b y c; el radio del círculo inscrito mide r. Vea la figura 8.54(a).

DEMUESTRE: $A = \frac{1}{2}rP$

DEMOSTRACIÓN: En la figura 8.54(b), el triángulo se ha separado en tres triángulos menores (cada uno con altura r). De aquí

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$
$$A = \tfrac{1}{2}r \cdot a + \tfrac{1}{2}r \cdot b + \tfrac{1}{2}r \cdot c$$
$$A = \tfrac{1}{2}r(a + b + c)$$
$$A = \tfrac{1}{2}rP$$

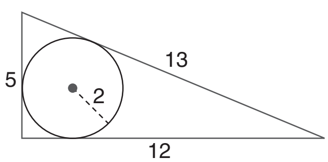


Figura 8.55

EJEMPLO 6

Encuentre el área de un triángulo cuyos lados miden 5 cm, 12 cm y 13 cm si el radio del círculo inscrito es 2 cm. Vea la figura 8.55.

Solución Con las longitudes dadas de los lados, el perímetro del triángulo es $P = 5 + 12 + 13 = 30$ cm. Utilizando $A = \frac{1}{2}rP$, se tiene $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30$ o $A = 30\text{ cm}^2$. ■

Ya que el triángulo que se muestra en el ejemplo 6 es un triángulo rectángulo $(5^2 + 12^2 = 13^2)$, el área del triángulo se podría haber determinado utilizando $A = \frac{1}{2}ab$ o $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. La ventaja proporcionada por el teorema 8.5.3 yace en aplicaciones donde se necesita determinar la longitud del radio del círculo inscrito de un triángulo.

EJEMPLO 7

En un ático las vigas de madera que soportan el techo forman un triángulo cuyos lados miden 4 pies, 6 pies y 6 pies; vea la figura 8.56 en la página 391. Hasta la pulgada más cercana, encuentre el radio del conducto circular mayor de aire frío que se puede pasar por la abertura formada por las vigas.

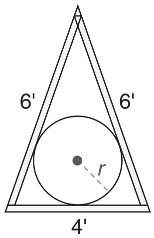


Figura 8.56

Solución Donde s es el semiperímetro del triángulo, la fórmula de Herón establece que $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Debido a que $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(4+6+6) = 8$, se tiene que $A = \sqrt{8(8-4)(8-6)(8-6)} = \sqrt{8(4)(2)(2)} = \sqrt{128}$. La expresión del área se puede simplificar a $\sqrt{64} \cdot \sqrt{2}$, por tanto $A = 8\sqrt{2}$ pies^2.

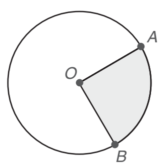
Recordando el teorema 8.5.3, se sabe que $A = \frac{1}{2}rP$. La sustitución conduce a $8\sqrt{2} = \frac{1}{2}r(4+6+6)$, u $8\sqrt{2} = 8r$. Entonces $r = \sqrt{2}$. Donde $r \approx 1.414$ pies, se deduce que $r \approx 1.414(12 \text{ pulg})$ o $r \approx 16.97$ pulg ≈ 17 pulg.

Ejercicios 11-15

NOTA: Si el conducto es un tubo flexible de plástico, probablemente se pueda emplear un conducto con un radio de 17 pulg. Si el conducto fuera de metal rígido o de plástico grueso, quizá se tendría que restringir el radio a 16 pulg. ■

Ejercicios 8.5

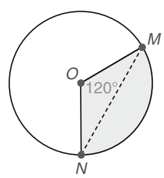
1. En el círculo, la longitud del radio es 10 pulg y la longitud $\overset{\frown}{AB}$ es 14 pulg. ¿Cuál es el perímetro del sector sombreado?



Ejercicios 1, 2

2. Si el área del círculo es 360 pulg^2, ¿cuál es el área del sector si su ángulo central mide 90°?

3. Si el área del sector de 120° es 50 cm^2, ¿cuál es el área del círculo completo?



Ejercicios 3, 4

4. Si el área del sector de 120° es 40 cm^2 y el área del $\triangle MON$ es 16 cm^2, ¿cuál es el área del segmento acotado por la cuerda $\overline{MN}$ y $\overset{\frown}{MN}$?

5. Suponga que un círculo de radio r está inscrito en un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud s. Encuentre una expresión para el área del triángulo en términos de r y s.

(SUGERENCIA: Utilice el teorema 8.5.3.)

6. Suponga que un círculo de radio r está inscrito en un rombo cuyos lados tienen longitud s. Encuentre una expresión para el área del rombo en términos de r y s.

7. Encuentre el perímetro de un segmento de círculo cuyos límites son una cuerda que mide 24 mm (milímetros) y un arco de longitud 30 mm.

8. Un sector con perímetro de 30 pulg tiene un arco limitante de longitud 12 pulg. Encuentre la longitud del radio del círculo.

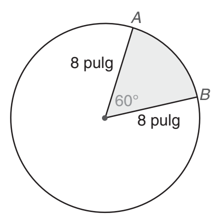
9. Un círculo está inscrito en un triángulo que tiene lados de longitudes 6 pulg, 8 pulg y 10 pulg. Si la longitud del radio del círculo inscrito es 2 pulg, encuentre el área del triángulo.

10. Un círculo está inscrito en un triángulo que tiene lados de longitudes 5 pulg, 12 pulg y 13 pulg. Si la longitud del radio del círculo inscrito es 2 pulg, encuentre el área del triángulo.

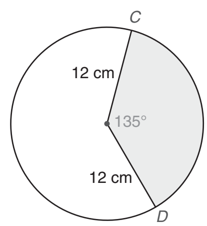
11. Un triángulo con lados de longitudes 3 pulg, 4 pulg y 5 pulg tiene un área de 6 pulg^2. ¿Cuál es la longitud del radio del círculo inscrito?

12. El área aproximada de un triángulo con lados de longitudes 3 pulg, 5 pulg y 6 pulg es 7.48 pulg^2. ¿Cuál es la longitud aproximada del radio del círculo inscrito?

13. Encuentre el perímetro y el área exactos del sector que se muestra.

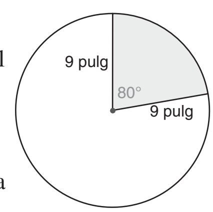


14. Encuentre el perímetro y el área exactos del sector que se muestra.



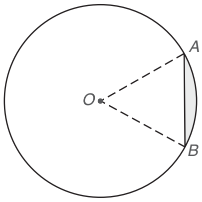
15. Encuentre el perímetro aproximado del sector que se muestra. Responda hasta la centésima de pulgada más cercana.

16. Encuentre el área aproximada del sector que se muestra. Responda hasta la centésima de pulgada cuadrada más cercana.



Ejercicios 15, 16

17. Encuentre el perímetro y el área exactos del segmento que se muestra, dado que m$\angle O = 60°$ y $OA = 12$ pulg.

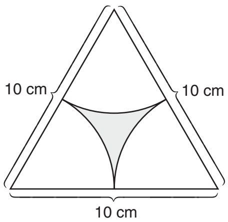


Ejercicios 17, 18

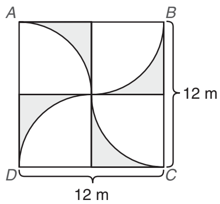
18. Encuentre el perímetro y el área exactos del segmento que se muestra, dado que m$\angle O = 120°$ y $AB = 10$ pulg.

En los ejercicios 19 y 20 encuentre las áreas exactas de las regiones sombreadas.

19.



20.

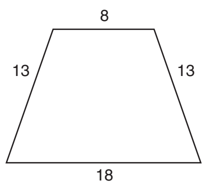


Cuadrado *ABCD*

21. Suponiendo que el área exacta de un sector determinado por un arco de 40° es $\frac{9}{4}\pi$ cm, encuentre la longitud del radio del círculo.

22. Para los círculos concéntricos con radios de longitudes 3 pulg y 6 pulg, encuentre el área del segmento menor determinada por una cuerda del círculo mayor que también es una tangente del círculo menor.

***23.** Un círculo se puede inscribir en el trapezoide que se muestra. Encuentre el área de ese círculo.



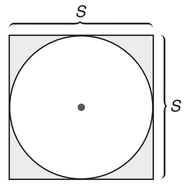
***24.** Un círculo se puede inscribir en un triángulo equilátero cuyos lados tienen una longitud de 10 cm. Encuentre el área de ese círculo.

25. En un círculo cuyo radio tiene una longitud de 12 m, la longitud de un arco es 6π m. ¿Cuál es la medida en grados de ese arco?

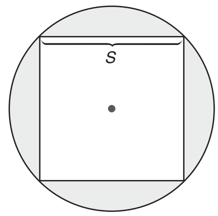
26. En el restaurante Pizza Dude, hacer una pizza de 12 pulg cuesta $3.40 y el gerente quiere ganar al menos $2.20 de la venta de cada pizza. La pizza se venderá por rebanada y cada pizza se corta en 6 rebanadas, ¿cuál debe ser el costo mínimo por rebanada?

27. En el restaurante Pizza Dude la pizza se vende por rebanada. Si la pizza se corta en 6 rebanadas, entonces el precio de venta es $1.25 por rebanada. Si la pizza se corta en 8 rebanadas, entonces cada rebanada se vende a $0.95. ¿De qué manera el restaurante Pizza Dude ganará más dinero de las ventas?

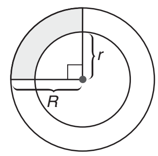
28. Determine una fórmula para el área de la región sombreada determinada por el cuadrado y su círculo inscrito.



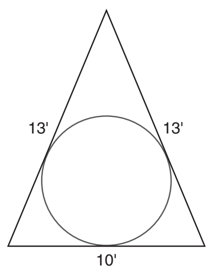
29. Determine una fórmula para el área de la región sombreada determinada por el círculo y su cuadrado inscrito.



30. Encuentre una fórmula para el área de la región sombreada, que representa un cuarto de un anulo (anillo).



31. El logotipo de una compañía en el costado de un edificio muestra un triángulo isósceles con un círculo inscrito. Si los lados del triángulo miden 10 pies, 13 pies y 13 pies, encuentre la longitud del radio del círculo inscrito.



32. En un triángulo rectángulo de longitudes a, b y c (donde c es la longitud de la hipotenusa), demuestre que la longitud del radio del círculo inscrito es $r = \frac{ab}{a + b + c}$.

33. En un triángulo con lados de longitudes a, b y c y semiperímetro s, demuestre que la longitud del radio del círculo inscrito es

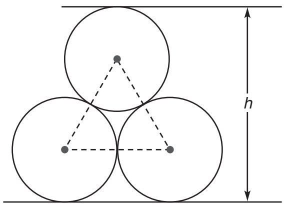
$$r = \frac{2\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}}{a + b + c}$$

34. Utilice los resultados de los ejercicios 32 y 33 para encontrar la longitud del radio del círculo inscrito para un triángulo con lados de longitudes

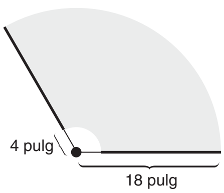
a) 8, 15 y 17. b) 7, 9 y 12.

35. Utilice los resultados de los ejercicios 32 y 33 para encontrar la longitud del radio del círculo inscrito para un triángulo con lados de longitudes
a) 7, 24 y 25. b) 9, 10 y 17.

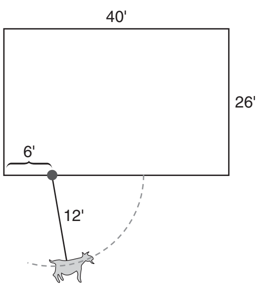
36. Tres tubos, cada uno de radio 4 pulg, están apilados como se muestra. ¿Cuál es la altura de la pila?



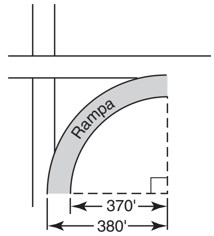
37. El limpiador de un parabrisas gira a través de un ángulo de 120° conforme lo limpia. Desde el punto de rotación, la hoja del limpiador inicia a una distancia de 4 pulg y termina a una distancia de 18 pulg. (La hoja del limpiador tiene una longitud de 14 pulg.) Encuentre el área que limpió la hoja del limpiador.



38. Una cabra está amarrada a un granero por una cadena de 12 pulg. Si la cadena está conectada al granero en un punto a 6 pies de un extremo del granero, ¿cuál es el área de la pastura en que la cabra puede pastar?



39. Una rampa de salida de una carretera hacia otra carretera forma un arco de círculo de 90°. La rampa está programada para repavimentarla. Como se muestra, su radio interno es 370 pies y su radio externo es 380 pies. ¿Cuál es el área de la rampa?



***40.** En el $\triangle ABC$, $m\angle C = 90°$ y $m\angle B = 60°$. Si $AB = 12$ pulg, encuentre el radio del círculo inscrito. Dé su respuesta hasta la décima de pulgada más cercana.

***41.** Un triángulo tiene lados de longitudes 6, 8 y 10 cm. Encuentre la distancia entre el centro del círculo inscrito y el centro del círculo circunscrito para este triángulo. Proporcione la respuesta hasta la décima de centímetro más cercana.

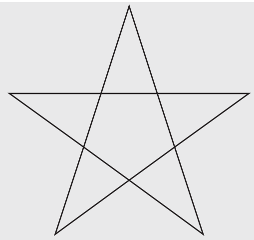
PERSPECTIVA HISTÓRICA

Bosquejo de Pitágoras

Pitágoras (aproximadamente 580-500 a.C.) fue un filósofo y matemático griego. Después de estudiar con algunos de los mejores pensadores de su época, formó su propia escuela alrededor de 529 a.C. en Crotona, Italia.

Los estudiantes de su escuela se dividían en dos clases, los oyentes y la élite pitagórica. Incluidos entre los pitagóricos estaban estudiantes brillantes, incluyendo 28 mujeres y todos fueron seguidores devotos de Pitágoras. Los pitagóricos, quienes se adherían a un conjunto rígido de creencias, se guiaban por el principio de “El conocimiento es la mayor purificación”.

Las áreas aparentes de estudio para los pitagóricos incluían aritmética, música, geometría y astronomía, pero los principios subyacentes que condujeron a una existencia como de culto incluían autodisciplina, carácter, pureza y obediencia. Los pitagóricos reconocían a sus compañeros miembros utilizando un pentagrama (estrella de cinco puntas) como su símbolo. Con su enfoque en la virtud, la política y la religión, los miembros del grupo se veían a sí mismos arriba de otros. Debido a su creencia en la *transmigración* (movimiento del alma después de la muerte a otro ser humano o animal), los pitagóricos se negaban a comer carne o pescado. En una ocasión, se dice que los pitagóricos encontraron a una persona golpeando a un perro. Al acercarse a esa persona, Pitágoras dijo: “Deja de golpear al perro, ya que en este perro vive el alma de mi amigo; lo reconozco por su voz.”



Con el tiempo la exclusividad, la clandestinidad y la supremacía de los pitagóricos condujeron a la suspicacia y el miedo de parte de las otras facciones de la sociedad. Alrededor de 500 a.C., la revolución contra los pitagóricos tuvo como resultado la quema de su recinto principal de reunión. Aunque muchos de los pitagóricos murieron en el infierno resultante, no está claro si el propio Pitágoras murió o escapó.

PERSPECTIVA DE APLICACIÓN

Otro análisis del teorema de Pitágoras

Algunas de las muchas demostraciones del teorema de Pitágoras dependen de las relaciones de área. Una de esas demostraciones fue ideada por el presidente James A. Garfield (1831-1881), el vigésimo presidente de los Estados Unidos.

En su demostración el triángulo rectángulo con catetos de longitudes a y b y una hipotenusa de longitud c se introduce en un trapezoide. Vea las figuras 8.57(a) y (b).

En la figura 8.57(b), los puntos A, B y C son colineales. Con el $\angle 1$ y el $\angle 2$ siendo complementarios y la suma de las medidas de los ángulos respecto al punto B siendo 180°, se deduce que el $\angle 3$ es un ángulo recto.

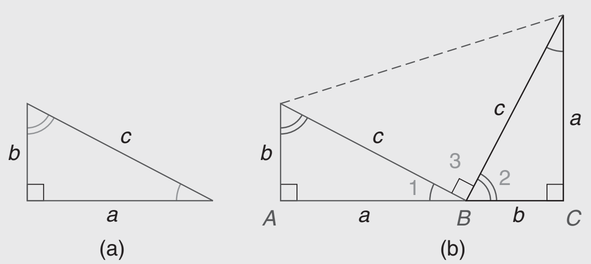


Figura 8.57

Si el dibujo se percibe como un trapezoide (como se muestra en la figura 8.58), el área está dada por

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) \\
&= \frac{1}{2}(a + b)(a + b) \\
&= \frac{1}{2}(a + b)^2 \\
&= \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) \\
&= \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2
\end{aligned}
$$

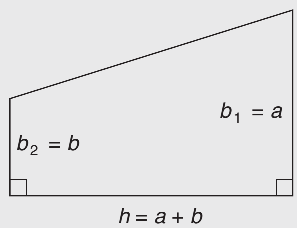


Figura 8.58

Ahora se trata al trapezoide como compuesto de tres triángulos, como se muestra en la figura 8.59.

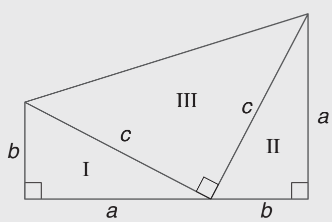


Figura 8.59

El área total de las regiones (triángulos) I, II y III está dada por

$$\begin{aligned} A &= A_I + A_{II} + A_{III} \\ &= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \left(\frac{1}{2}c \cdot c\right) \\ &= ab + \frac{1}{2}c^2 \end{aligned}$$

Igualando las áreas del trapezoide en la figura 8.58 y del compuesto en la figura 8.59, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 &= ab + \frac{1}{2}c^2 \\ \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 &= \frac{1}{2}c^2 \end{aligned}$$

Multiplicando por 2, se obtiene

$$a^2 + b^2 = c^2$$

La primera demostración (¡más de 2000 años antes!) de este teorema por el matemático griego Pitágoras se encuentra en muchas obras históricas sobre geometría. No es difícil observar la relación entre las dos demostraciones.

En la demostración acreditada a Pitágoras, un triángulo rectángulo con catetos de longitudes a y b e hipotenusa de longitud c se reproduce varias veces para formar un cuadrado. Una vez más, los puntos A, B y C (y C, D, E, etcétera) deben ser colineales. [Vea la figura 8.60(c).]

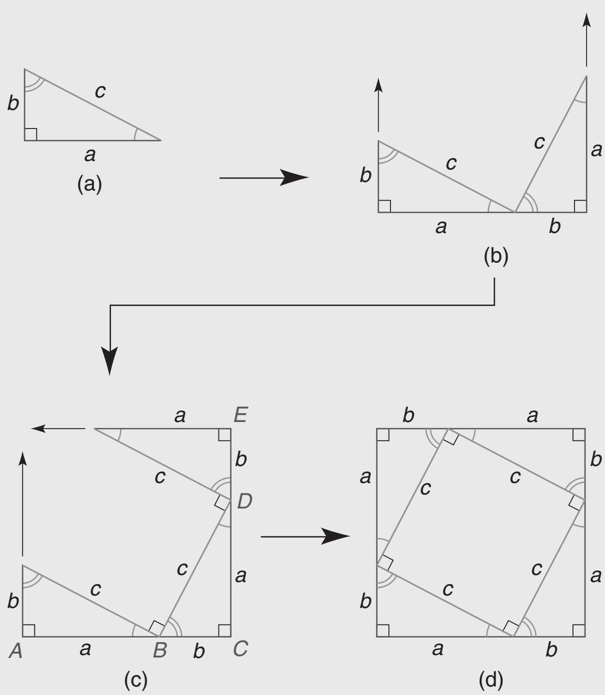


Figura 8.60

El área del cuadrado grande en la figura 8.61(a) está dada por

$$\begin{aligned} A &= (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

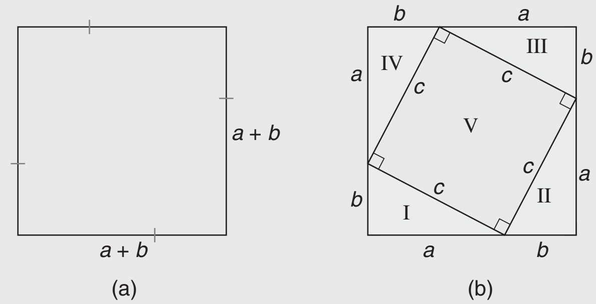


Figura 8.61

Considerando la composición de la figura 8.61(b) se tiene que

$$\begin{aligned} A &= A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV} + A_V \\ &= 4 \cdot A_I + A_V \end{aligned}$$

ya que los cuatro triángulos rectángulos son congruentes. Entonces

$$\begin{aligned} A &= 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2 \\ &= 2ab + c^2 \end{aligned}$$

Una vez más, debido a la unicidad del área, los resultados (área del cuadrado y área del compuesto) deben ser iguales. Entonces

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Otro análisis de las demostraciones por el presidente Garfield y por Pitágoras aclara que los resultados deben ser consistentes. En la figura 8.62 observe que el trapezoide de Garfield debe tener la mitad del área del cuadrado de Pitágoras, mientras se mantiene la relación que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

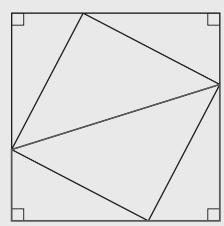


Figura 8.62

Resumen

UNA VISTA RETROSPECTIVA AL CAPÍTULO 8

Un objetivo de este capítulo fue determinar las áreas de los triángulos, de ciertos cuadriláteros y de los polígonos regulares. También se exploró la circunferencia y el área de un círculo y el área de un sector de un círculo. El área de un círculo en ocasiones se aproxima utilizando $\pi \approx 3.14$ o $\pi \approx \frac{22}{7}$. En otras ocasiones, el área exacta se da dejando π en la respuesta.

UNA VISTA PRELIMINAR DEL CAPÍTULO 9

El objetivo en el capítulo siguiente es abordar un tipo de geometría conocido como geometría sólida. Se determinarán las áreas superficiales de sólidos con bases poligonales o circulares. También se calcularán los volúmenes de estas figuras sólidas. Además se estudiarán ciertos poliedros.

CONCEPTOS CLAVE

8.1

Región plana • Unidad cuadrada • Postulados de área • Área de un rectángulo, paralelogramo y triángulo • Altura y base de un paralelogramo o triángulo

8.2

Perímetro de un polígono • Semiperímetro de un triángulo • Fórmula de Herón • Fórmula de Brahmagupta • Área de un trapezoide, rombo y cometa • Áreas de polígonos semejantes

8.3

Polígono regular • Centro y ángulo central de un polígono regular • Radio y apotema de un polígono regular • Área de un polígono regular

8.4

Circunferencia de un círculo • π (Pi) • Longitud de un arco • Límite • Área de un círculo

8.5

Sector • Área y perímetro de un sector • Segmento de un círculo • Área y perímetro de un segmento • Área de un triángulo con un círculo inscrito

TABLA 8.3 Una vista general del capítulo 8

▶ Relaciones de área y perímetro

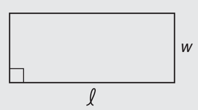
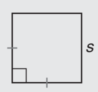
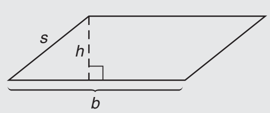
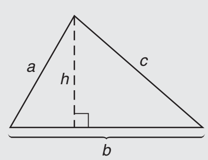
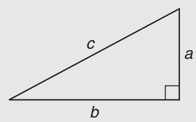
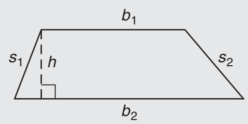
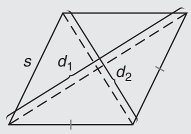
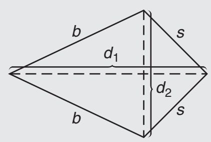
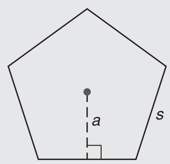
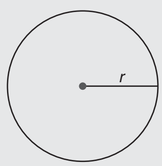
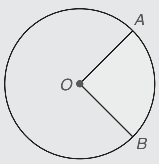
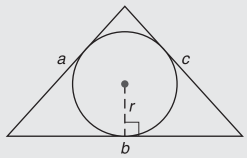
FIGURA	DIBUJO	ÁREA	PERÍMETRO O CIRCUNFERENCIA
Rectángulo		$A = \ell w$ (o $A = bh$)	$P = 2\ell + 2w$ (o $P = 2b + 2h$)
Cuadrado		$A = s^2$	$P = 4s$
Paralelogramo		$A = bh$	$P = 2b + 2s$
Triángulo		$A = \frac{1}{2}bh$ $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$	$P = a + b + c$

TABLA 8.3 *(continuación)*

Relaciones de área y perímetro

FIGURA	DIBUJO	ÁREA	PERÍMETRO O CIRCUNFERENCIA
Triángulo rectángulo		$A = \frac{1}{2}ab$	$P = a + b + c$
Trapezoide		$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	$P = s_1 + s_2 + b_1 + b_2$
Rombo (diagonales de longitudes d_1 y d_2)		$A = \frac{1}{2}d_1d_2$	$P = 4s$
Cometa (diagonales de longitudes d_1 y d_2)		$A = \frac{1}{2}d_1d_2$	$P = 2b + 2s$
Polígono regular (n lados; s es la longitud del lado; a es la longitud de la apotema)		$A = \frac{1}{2}aP$ (P = perímetro)	$P = ns$
Círculo		$A = \pi r^2$	$C = 2\pi r$
Sector (m$\widehat{AB}$ es la medida en grados de $\widehat{AB}$ y del ángulo central AOB)		$A = \frac{m\widehat{AB}}{360}\pi r^2$	$P = 2r + \ell\widehat{AB}$ donde $\ell\widehat{AB} = \frac{m\widehat{AB}}{360} \cdot 2\pi r$
Triángulo con círculo inscrito de radio r		$A = \frac{1}{2}rP$ (P = perímetro)	$P = a + b + c$

Capítulo 8 EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios de repaso 1 al 3 dibuje una figura que le permita resolver cada problema.

1. *Dado:* $\square ABCD$ con $BD = 34$ y $BC = 30$
$m\angle C = 90°$
Encuentre: A_{ABCD}

2. *Dado:* $\square ABCD$ con $AB = 8$ y $AD = 10$
Encuentre: A_{ABCD} si:
a) $m\angle A = 30°$
b) $m\angle A = 60°$
c) $m\angle A = 45°$

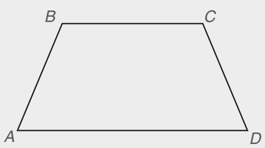
3. *Dado:* $\square ABCD$ con $\overline{AB} \cong \overline{BD}$ y $AD = 10$
$\overline{BD} \perp \overline{DC}$
Encuentre: A_{ABCD}

En los ejercicios de repaso 4 y 5 trace el $\triangle ABC$, si es necesario, para resolver cada problema.

4. *Dado:* $AB = 26$, $BC = 25$ y $AC = 17$
Encuentre: A_{ABC}

5. *Dado:* $AB = 30$, $BC = 26$ y $AC = 28$
Encuentre: A_{ABC}

6. *Dado:* Trapezoide $ABCD$, con $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $BC = 6$, $AD = 12$ y $AB = 5$
Encuentre: A_{ABCD}



Ejercicios 6, 7

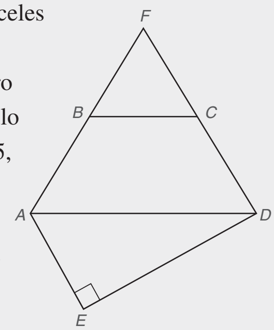
7. *Dado:* Trapezoide $ABCD$, con $AB = 6$ y $BC = 8$,
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$
Encuentre: A_{ABCD} si:
a) $m\angle A = 45°$
b) $m\angle A = 30°$
c) $m\angle A = 60°$

8. Encuentre el área y el perímetro de un rombo cuyas diagonales tienen longitudes de 18 y 24 pulg.

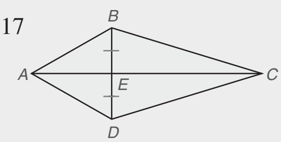
9. Tom Morrow quiere comprar fertilizante para su patio. El tamaño del lote es de 140 por 160 pies. Las medidas externas de su casa son 80 por 35 pies. El camino de acceso mide 30 por 20 pies. Todas las formas son rectangulares.
a) ¿Cuál es la medida en pies cuadrados de su patio que necesita fertilizarse?
b) Si cada saco de fertilizante cubre 5000 pies^2, ¿cuántos sacos debe comprar Tom?
c) Si el fertilizante cuesta \$18 por saco, ¿cuál es su costo total?

10. La madre de Alicia quiere poner papel tapiz en dos paredes adyacentes a la recámara de Alicia. También quiere poner una cenefa a lo largo de la parte superior de las cuatro paredes. La recámara mide 9 por 12 por 8 pies de altura.
a) Si cada rollo doble cubre aproximadamente 60 pies^2 y el papel tapiz se vende en rollos dobles, ¿cuántos rollos dobles se necesitan?
b) Si la cenefa se vende en rollos de 5 yardas cada uno, ¿cuántos rollos de borde se necesitan?

11. *Dado:* Trapezoide isósceles $ABCD$
$\triangle FBC$ equilátero
$\triangle AED$ rectángulo
$BC = 12$, $AB = 5$, y $ED = 16$
Encuentre: a) A_{EAFD}
b) Perímetro de $EAFD$



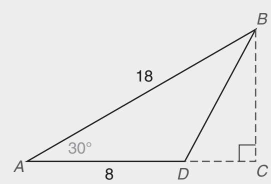
12. *Dado:* Cometa $ABCD$ con $AB = 10$, $BC = 17$
$BD = 16$
Encuentre: A_{ABCD}



13. Un lado de un rectángulo es 2 cm más largo que un segundo lado. Si el área es 35 cm^2, encuentre las dimensiones del rectángulo.

14. Un lado de un triángulo es 10 cm más largo que un segundo lado y el tercer lado es 5 cm más largo que el segundo lado. El perímetro del triángulo es 60 cm.
a) Encuentre las longitudes de los tres lados.
b) Encuentre el área del triángulo

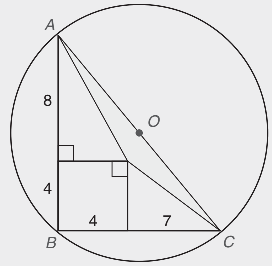
15. Encuentre el área del $\triangle ABD$ como se muestra.



16. Encuentre el área de un triángulo equilátero si cada lado de sus lados tiene una longitud de 12 cm.

17. Si $\overline{AC}$ es un diámetro de $\odot O$, encuentre el área del triángulo sombreado.

18. Para un pentágono regular, encuentre la medida de cada:
a) ángulo central
b) ángulo interno
c) ángulo externo



Ejercicio 17

19. Encuentre el área de un hexágono regular cuyos lados cada uno tiene una longitud de 8 pies.

20. El área de un triángulo equilátero es $108\sqrt{3}$ pulg^2. Si la longitud de cada lado del triángulo es $12\sqrt{3}$ pulg, encuentre la longitud de una apotema del triángulo.

21. Encuentre el área de un hexágono regular cuya apotema tiene una longitud de 9 pulg.

22. En un polígono regular, cada ángulo central mide 45°.
a) ¿Cuántos lados tiene el polígono regular?
b) Si cada lado mide 5 cm y la longitud de cada apotema es de aproximadamente 6 cm, ¿cuál es el área aproximada del polígono?

23. ¿Puede un círculo circunscribirse respecto a cada una de las figuras siguientes? ¿Por qué sí o por qué no?
a) Paralelogramo   c) Rectángulo
b) Rombo   d) Cuadrado

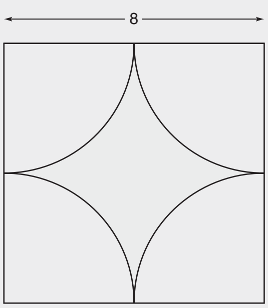
24. ¿Se puede inscribir un círculo en cada una de las figuras siguientes? ¿Por qué sí o por qué no?
a) Paralelogramo   c) Rectángulo
b) Rombo   d) Cuadrado

25. La longitud del radio de un círculo inscrito en un triángulo equilátero es 7 pulg. Encuentre el área del triángulo.

26. La familia Turner quiere alfombrar el concreto alrededor de su alberca rectangular. Las dimensiones para el área rectangular formada por la alberca y su camino de acceso de concreto son 20 por 30 pies. La alberca mide 12 por 24 pies.
a) ¿Cuántos pies cuadrados se necesitan cubrir?
b) La alfombra se vende sólo en yardas cuadradas. Aproximadamente ¿cuántas yardas cuadradas representa el área en el inciso (a)?
c) Si la alfombra cuesta $9.97 por yarda cuadrada, ¿cuál será el costo total de la alfombra?

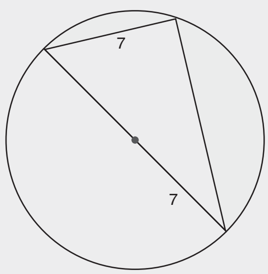
Encuentre las áreas exactas de las regiones sombreadas en los ejercicios 27 al 31.

27.

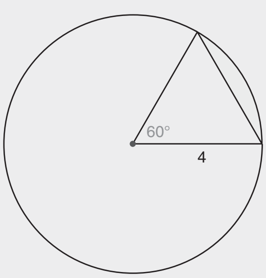


Cuadrado

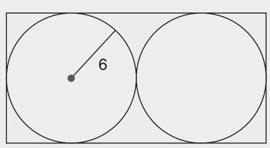
28.



29.

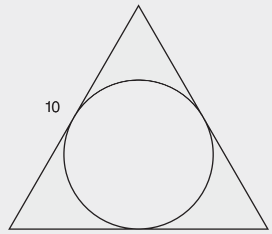


30.



Dos círculos tangentes ≅ inscritos en un rectángulo

31.



Triángulo equilátero

32. El arco de un sector mide 40°. Encuentre la longitud exacta del arco y el área exacta del sector si el radio mide $3\sqrt{5}$ cm.

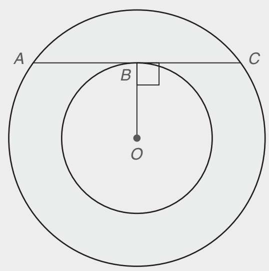
33. La circunferencia de un círculo es 66 pies.
a) Encuentre el diámetro del círculo, utilizando $\pi \approx \frac{22}{7}$.
b) Encuentre el área del círculo, utilizando $\pi \approx \frac{22}{7}$.

34. Un círculo tiene un área exacta de 27π pies^2.
a) ¿Cuál es el área del sector de este círculo si el arco del sector mide 80°?
b) ¿Cuál es el perímetro exacto del sector en el inciso (a)?

35. Un triángulo rectángulo isósceles está inscrito en un círculo que tiene un diámetro de 12 pulg. Encuentre el área exacta entre uno de los catetos del triángulo y su arco correspondiente.

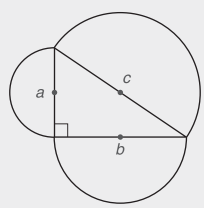
36. *Dado:* Círculos concéntricos con radios de longitudes R y r, con $R > r$

Demuestre: $A_{\text{anillo}} = \pi(BC)^2$



37. Demuestre que el área de un círculo circunscrito respecto a un cuadrado es el doble del área del círculo inscrito dentro del cuadrado.

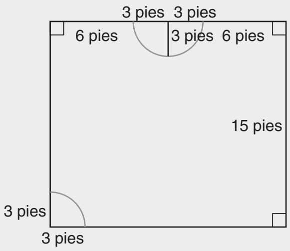
38. Demuestre que si se construyen semicírculos en cada uno de los lados de un triángulo rectángulo, entonces el área del semicírculo en la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos en los dos catetos.



39. Jeff y Helen quieren alfombrar la sala familiar, excepto por el acceso y el semicírculo frente a la chimenea, a los que les pondrán mosaico.

a) ¿Cuántas yardas cuadradas de alfombra se necesitan?

b) ¿A cuántos pies cuadrados se les pondrá mosaico?

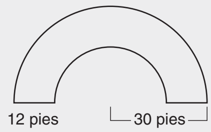


40. El camino de acceso semicircular de Sue y Dave se va a resellar y luego se plantarán flores a cada lado.

a) ¿Cuál es el número de pies cuadrados que se volverán a sellar?

b) Si el costo total del resello es \$0.18 por pie cuadrado, ¿cuál es el costo total?

c) Si se plantarán flores individuales a 1 pie del borde del camino de acceso a intervalos de aproximadamente 1 pie en los dos lados del camino de acceso, ¿cuántas flores se necesitan?



Capítulo 8 EXAMEN

1. Complete cada enunciado.

a) Dado que la longitud y el ancho de un rectángulo están medidos en pulgadas, su área se mide en _______________.

b) Si dos figuras planas cerradas son congruentes, entonces sus áreas son _______________.

2. Proporcione cada fórmula.

a) La fórmula para el área de un cuadrado cuyos lados son de longitud s es _______________.

b) La fórmula para la circunferencia de un círculo con longitud del radio r es _______________.

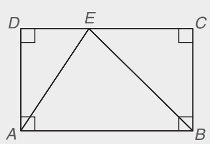
3. Determine si el enunciado es verdadero o falso.

a) El área de un círculo con radio de longitud r está dada por $A = \pi r^2$ _______________.

b) Con lados correspondientes de polígonos semejantes con la relación proporcional $\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{2}$, la relación proporcional de sus áreas es $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2}$. _______________.

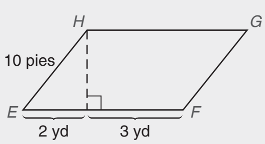
4. Si el área de un rectángulo $ABCD$ es 46 cm^2, encuentre el área del $\triangle ABE$.

_______________.

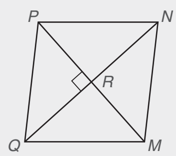


5. En *pies cuadrados* encuentre el área del $\square EFGH$

_______________.

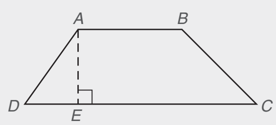


6. Encuentre el área del rombo $MNPQ$ dado que $QN = 8$ pies y $PM = 6$ pies. _______________.



7. Utilice la fórmula de Herón, $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, para encontrar el área exacta de un triángulo cuyas longitudes de sus lados son 4, 13 y 15 cm. _______________.

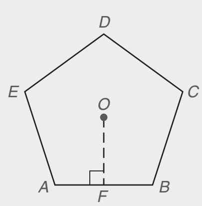
8. En el trapezoide $ABCD$, $AB = 7$ pies y $DC = 13$ pies. Si el área del trapezoide $ABCD$ es 60 pies^2, encuentre la longitud de la altura $\overline{AE}$.



9. Un pentágono regular tiene una apotema de longitud 4.0 pulg y la longitud de cada lado es $s = 5.8$ pulg. Para el pentágono regular, encuentre su:

a) Perímetro _______________

b) Área _______________

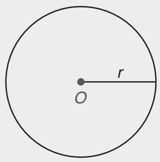


10. Para el círculo que se muestra a continuación la longitud del radio es $r = 5$ pulg. Encuentre exactamente su:

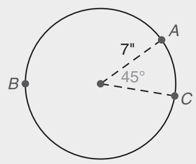
a) Circunferencia _______________

b) Área _______________

(SUGERENCIA: Deje π en la respuesta para tener exactitud.)



11. Con $\pi \approx \frac{22}{7}$, encuentre la longitud aproximada de $\widehat{AC}$.
$\ell\widehat{AC} \approx$ _______________

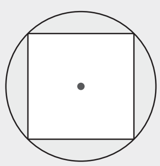


12. Con $\pi \approx 3.14$, encuentre el área aproximada de un círculo (no se muestra) cuyo *diámetro* mide 20 cm.

____

13. En la figura, un cuadrado está inscrito en un círculo. Si cada lado del cuadrado mide $4\sqrt{2}$ pulg. encuentre una expresión para el área exacta de la región sombreada.

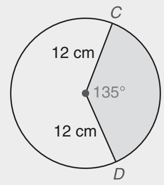
____



Cuadrado inscrito
en un círculo

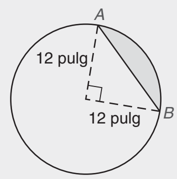
14. Encuentre el área exacta del sector de 135° que se muestra.

____



15. Encuentre el área exacta del segmento sombreado.

____



16. El área de un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitudes de 5, 12 y 13 pulg es exactamente 30 pulg^2. Utilice la fórmula $A = \frac{1}{2}rP$ para encontrar la longitud del radio del círculo que se puede inscribir en este triángulo. _______________

Capítulo 9

Superficies y sólidos

© Dan Breckwoldt/Dreamstime

CONTENIDO

Hay un DVD disponible que cuenta con un video con explicación de conceptos, problemas de ejemplo y aplicaciones. Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

¡Colosal! Localizadas cerca del Cairo, Egipto, las grandes pirámides ilustran uno de los tipos de sólidos que se estudian en el capítulo 9. Los diseños arquitectónicos de edificios ilustran otras formas de sólidos que encontrará en este capítulo. El mundo real es tridimensional; es decir, los sólidos tienen longitud, anchura y profundidad. Cada sólido determina una región delimitada del espacio que tiene una medida conocida como *volumen*. Las unidades que se usan para medir el volumen incluyen los pies cúbicos y el metro cúbico. La misma técnica utilizada para determinar el volumen de la pirámide en el ejemplo 5 de la sección 9.2 también se podría aplicar para encontrar los volúmenes de las grandes pirámides.

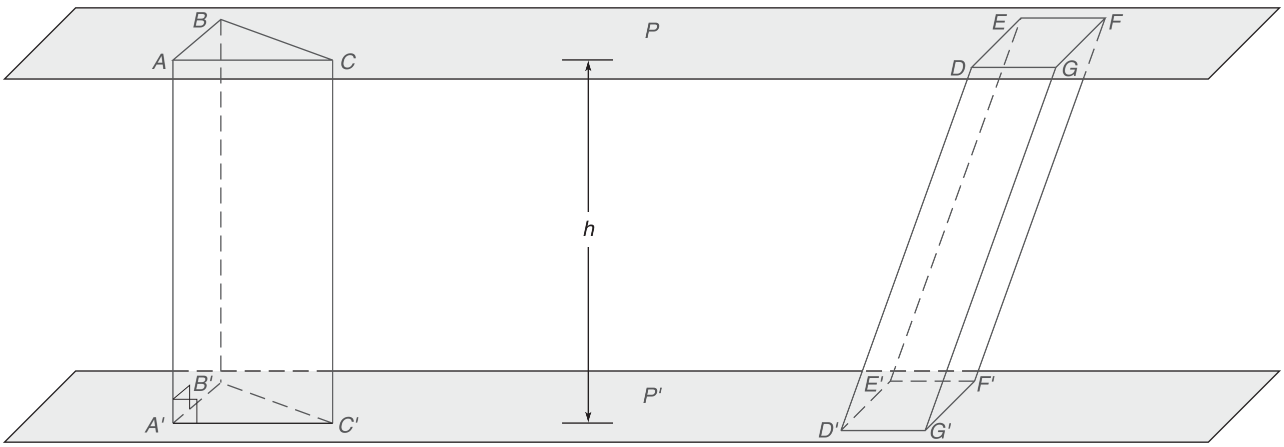
9.1 Prismas, área y volumen

CONCEPTOS CLAVE

Prismas (rectos y oblicuos)	Aristas	Volumen
Bases	Caras	Prisma regular
Altura	Área lateral	Cubo
Vértices	Área total (superficial)	Unidad cúbica

PRISMAS

Suponga que dos polígonos congruentes se encuentran en planos paralelos de manera que sus lados correspondientes sean paralelos. Si los vértices correspondientes de esos polígonos [como A y A' en la figura 9.1(a)] se unen con segmentos de recta, entonces el "sólido" que resulta es un **prisma**. Las figuras congruentes que se encuentran en planos paralelos son las **bases** del prisma. Los planos paralelos necesarios no se muestran en los dibujos de los prismas. Representada como una caja vacía, el prisma es como un cascarón que encierra una parte del espacio por las partes de los planos que forman el prisma; por tanto, un prisma no contiene puntos interiores. En la práctica algunas veces es conveniente referirse a un prisma como un *sólido* igual que un ladrillo; por supuesto esta interpretación del prisma incluye sus puntos interiores.



$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$
(a)

Cuadrado $DEFG \cong$ Cuadrado $D'E'F'G'$
(b)

Figura 9.1

En la figura 9.1(a), $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{A'C'}$ y $\overline{B'C'}$ son las **aristas de la base** y $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son las **aristas laterales** del prisma. Ya que las aristas laterales de este prisma son perpendiculares a las aristas de la base, las **caras laterales** (como en el cuadrilátero $ACC'A'$) son rectángulos. Los puntos A, B, C, A', B' y C' son los **vértices** del prisma.

En la figura 9.1(b) las aristas laterales del prisma no son perpendiculares a las aristas de las bases. Esta relación entre las aristas laterales y las aristas de la base se describe con frecuencia como **oblicua** (inclinada). Para el prisma oblicuo las caras laterales son paralelogramos. Considerando los prismas en la figura 9.1 se obtienen las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN

Un **prisma recto** es un prisma en el cual las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de la base en sus puntos de intersección. Un **prisma oblicuo** es un prisma en el cual las aristas laterales paralelas son oblicuas a las aristas de las bases en sus puntos de intersección.

Parte de la descripción utilizada para clasificar un prisma depende de su base. Por ejemplo, el prisma en la figura 9.1(a) es un *prisma triangular recto;* en este caso, la palabra *recto* describe al prisma, mientras que la palabra *triangular* se refiere a la base triangular. De manera similar, el prisma en la figura 9.1(b) es un *prisma cuadrangular oblicuo,* suponiendo que las bases son cuadradas. Ambos prismas en la figura 9.1 tienen una **altura** (un segmento perpendicular que une los planos que contienen las bases) de longitud h, también conocida como la *altura* del prisma.

EJEMPLO 1

Nombre cada tipo de prisma en la figura 9.2.

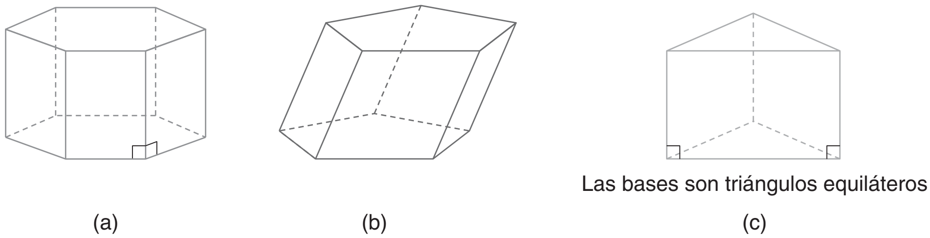


Figura 9.2

Solución

a) Las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de la base hexagonal. Es un *prisma hexagonal recto.*
b) Las aristas laterales son oblicuas a las aristas de la base pentagonal. Es un *prisma pentagonal oblicuo.*
c) Las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de la base de la base triangular. Debido a que la base es equilátera, el prisma es un *prisma triangular equilátero recto.* ■

GEE *Ejercicios 1, 2*

ÁREA DE UN PRISMA

DEFINICIÓN

El **área lateral** L de un prisma es la suma de las áreas de todas las caras laterales.

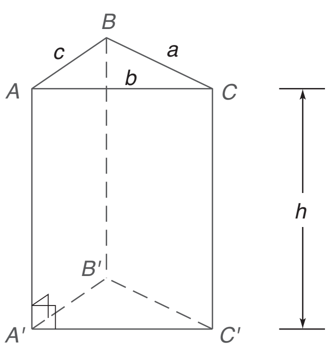


Figura 9.3

En el prisma triangular recto de la figura 9.3, a, b y c son las longitudes de los lados de cualquier base. Estas dimensiones se utilizan junto con la longitud de la altura (denotada como h) para calcular el área lateral, la suma de las áreas de los rectángulos $ACC'A'$, $ABB'A'$ y $BCC'B'$. El área lateral L del prisma triangular recto se puede encontrar como sigue:

$$\begin{aligned} L &= ah + bh + ch \\ &= h(a + b + c) \\ &= hP \end{aligned}$$

donde P es el perímetro de una base del prisma. Esta fórmula, $L = hP$, es válida para encontrar el área lateral de cualquier prisma *recto.* Aunque las caras laterales de un prisma oblicuo son paralelogramos, también se utiliza la fórmula $L = hP$ para encontrar su área lateral.

TEOREMA 9.1.1

El área lateral L de cualquier prisma cuya altura tiene medida h y cuyas bases tienen perímetro P está dada por $L = hP$.

Muchos estudiantes (y profesores) encuentran más fácil calcular el área lateral de un prisma sin utilizar la fórmula $L = hP$. En el siguiente ejemplo se ilustra esto.

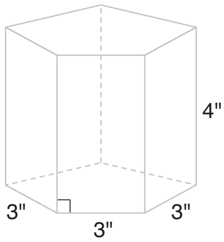


Figura 9.4

EJEMPLO 2

Las bases del prisma recto que se muestra en la figura 9.4 son pentágonos equiláteros con lados de longitud 3 pulg. Si la altura del prisma es de 4 pulg, encuentre el área lateral del prisma.

Solución Cada cara lateral es un rectángulo con dimensiones de 3 pulg por 4 pulg. El área de cada cara rectangular es de 3 pulg $\times$ 4 pulg = 12 pulg^2. Ya que hay cinco caras laterales congruentes, el área lateral del prisma pentagonal es de 5×12 pulg^2 = 60 pulg^2.

NOTA: Cuando se aplica en el ejemplo 2, la fórmula $L = hP$ conduce a $L = 4$ pulg $\times$ 15 pulg = 60 pulg^2. ■

DEFINICIÓN

Para cualquier prisma el **área total** T es la suma del área lateral y las áreas de las bases.

NOTA: Al área total del prisma también se le conoce como su área superficial.

A ambas bases y a las caras laterales se les conoce como *caras* de un prisma. Por tanto el área total T del prisma es la suma de las áreas de todas sus caras.

Recordando la fórmula de Herón se sabe que el área de la base B del prisma triangular recto en la figura 9.3 se puede encontrar con la fórmula

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

en la que s es el semiperímetro de la base triangular. En el ejemplo 3 se usa la fórmula de Herón.

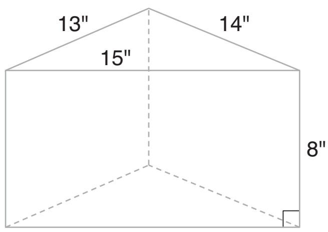


Figura 9.5

EJEMPLO 3

Encuentre el área total del prisma triangular recto con una altura de 8 pulg de longitud si los lados de las bases triangulares tienen longitudes de 13, 14 y 15 pulg. Vea la figura 9.5.

Solución El área lateral se encuentra sumando las áreas de las tres caras laterales rectangulares. Esto es

$$\begin{aligned} L &= 8 \text{ pulg} \cdot 13 \text{ pulg} + 8 \text{ pulg} \cdot 14 \text{ pulg} + 8 \text{ pulg} \cdot 15 \text{ pulg.} \\ &= 104 \text{ pulg}^2 + 112 \text{ pulg}^2 + 120 \text{ pulg}^2 = 336 \text{ pulg}^2 \end{aligned}$$

Se usa la fórmula de Herón para encontrar el área de cada base. Con $s = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15)$ o $s = 21$, $B = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21(8)(7)(6)} = \sqrt{7056} = 84$

Calculando el área total (o área superficial) del prisma triangular, se tiene

$$T = 336 + 2(84) \qquad \text{o} \qquad T = 504 \text{ pulg}^2$$ ■

A continuación se presenta una fórmula más general para el área total de un prisma.

TEOREMA 9.1.2

El área total T de cualquier prisma con área lateral L y área de la base B está dada por $T = L + 2B$.

DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA 9.1.2

DADO: El prisma pentagonal de la figura 9.6(a)
DEMUESTRE: $T = L + 2B$

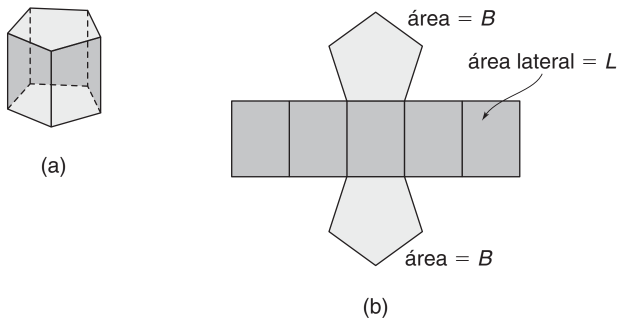


Figura 9.6

DEMOSTRACIÓN: Cuando el prisma se "desarma" y se coloca plano, como se muestra en la figura 9.6(b), se ve que el área total depende del área lateral (sombreada en color más oscuro) y las áreas de las dos bases; es decir,

$$T = L + 2B$$

DEFINICIÓN

Un **prisma regular** es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.

De ahora en adelante, al prisma de la figura 9.2(c) de la página 405 se le llamará prisma triangular regular.

En el siguiente ejemplo cada base del prisma es un hexágono regular. Ya que es un prisma recto, las caras laterales son rectángulos congruentes.

EJEMPLO 4

Encuentre el área lateral L y el área superficial T del prisma hexagonal regular en la figura 9.7(a).

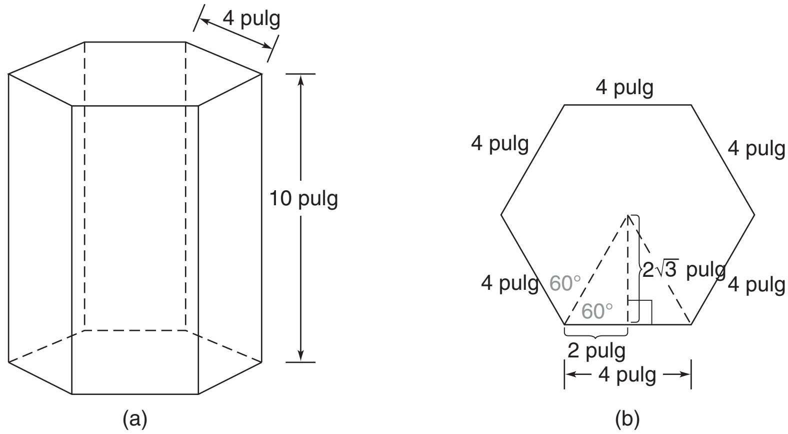


Figura 9.7

Solución En la figura 9.7(a) en la página 407 hay seis caras congruentes laterales, cada una rectangular y con dimensiones de 4 pulg por 10 pulg. Por tanto

$$\begin{aligned} L &= 6(4 \cdot 10) \\ &= 240 \text{ pulg}^2 \end{aligned}$$

Para la base hexagonal regular [vea la figura 9.7(b)], la apotema mide $a = 2\sqrt{3}$ pulg y el perímetro $P = 6 \cdot 4 = 24$ pulg. Entonces el área B de cada base está dada por la fórmula para el área de un polígono regular.

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}aP \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 24 \\ &= 24\sqrt{3} \text{ pulg}^2 \approx 41.57 \text{ pulg}^2 \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} T &= L + 2B \\ &= (240 + 48\sqrt{3}) \text{ pulg}^2 \approx 323.14 \text{ pulg}^2 \end{aligned}$$

■

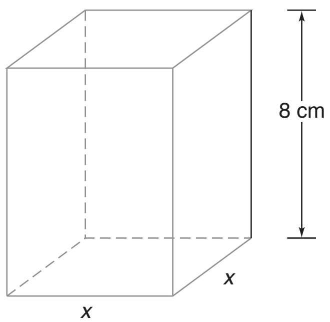


Figura 9.8

EJEMPLO 5

El área total del prisma cuadrangular recto en la figura 9.8 es de 210 cm^2. Encuentre la longitud de un lado de la base cuadrangular si la altura del prisma es de 8 cm.

Solución Sea x la longitud de un lado del cuadrado. Entonces el área de la base es $B = x^2$ y el área de cada una de las cuatro caras laterales es $8x$. Por tanto,

$$\underbrace{2(x^2)}_{\text{2 bases}} + \underbrace{4(8x)}_{\text{4 caras laterales}} = 210$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 32x &= 210 \\ 2x^2 + 32x - 210 &= 0 \\ x^2 + 16x - 105 &= 0 && \textbf{(dividiendo entre 2)} \\ (x + 21)(x - 5) &= 0 && \textbf{(factorizando)} \end{aligned}$$

$$x + 21 = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0$$

$$x = -21 \quad \text{o} \quad x = 5 \qquad \textbf{(descarte } -21 \textbf{ como una solución)}$$

Entonces cada lado de la base cuadrangular mide 5 cm. ■

GEE *Ejercicios 3-7*

DEFINICIÓN

Un **cubo** es un prisma cuadrangular recto cuyas aristas son congruentes.

El cubo es muy importante en la determinación del volumen de un sólido.

VOLUMEN DE UN PRISMA

Para introducir el concepto de *volumen* se entiende que un prisma encierra una parte de espacio. Sin una definición formal se dice que el **volumen** es un número que mide la cantidad de espacio encerrado. Para comenzar se necesita una unidad para medir el volumen. Así como el metro se puede usar para medir la longitud y la yarda cuadrada se puede utilizar para medir el área, una **unidad cúbica** se utiliza para medir la cantidad de espacio encerrada dentro de una región delimitada del espacio. Esa unidad se describe en el párrafo siguiente.

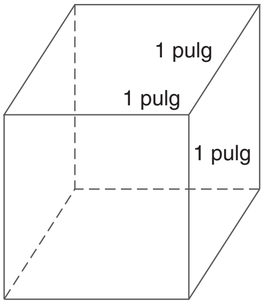


Figura 9.9

El volumen encerrado por el cubo que se muestra en la figura 9.9 es 1 pulgada cúbica o 1 pulg^3. El volumen de un sólido es el número de unidades cúbicas dentro del sólido. Por tanto, se supone que el volumen de cualquier sólido es un número positivo de unidades cúbicas.

POSTULADO 24 ▶ (Postulado de volumen)

En correspondencia para cada sólido hay un número positivo único V que se conoce como el volumen de ese sólido.

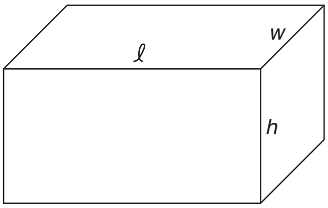


Figura 9.10

La figura más simple para la cual es posible determinar el volumen es el **prisma rectangular recto**. Este sólido se podría describir como un **paralelepípedo** o como una “caja”. Puesto que las cajas se utilizan como contenedores para almacenar y transportar (como un vagón), es importante calcular el volumen como una medida de capacidad. En la figura 9.10 se muestra un prisma rectangular recto; sus dimensiones son longitud ℓ, ancho w y altura h.

Es fácil mostrar que el volumen de un prisma rectangular recto de 4 pulg de longitud, 3 pulg de ancho y 2 pulg de alto es de 24 pulg^3. El volumen es el producto de las tres dimensiones del sólido dado. No sólo se observa que $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ sino también que las unidades del volumen son pulg • pulg • pulg = pulg^3. Las figuras 9.11(a) y 9.11(b) ilustran que la caja de 4 por 3 por 2 debe tener el volumen de 24 unidades cúbicas. Observe que hay cuatro capas de bloques, cada una de las cuales es una configuración 2 por 3 de 6 unidades^3. La figura 9.11 también proporciona algún conocimiento en el siguiente postulado.

Geometría en el mundo real

Los sólidos congelados que se encuentran en una charola de hielos por lo general se aproximan a las formas de los cubos.

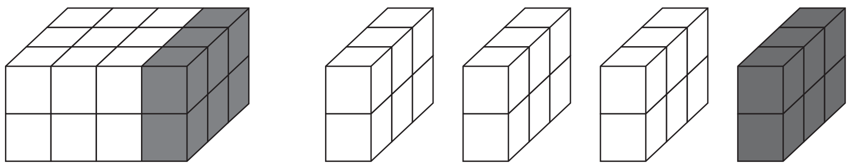


Figura 9.11

POSTULADO 25

El volumen de un prisma rectangular recto está dado por

$$V = \ell wh$$

donde ℓ mide la longitud, w el ancho y h la altura del prisma.

Para aplicar esta fórmula, las unidades usadas para las dimensiones ℓ, w y h también deben ser las mismas.

EJEMPLO 6

Encuentre el volumen de una caja cuyas dimensiones son 1 pie, 8 y 10 pulg. (Vea la figura 9.12.)

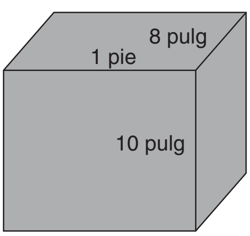


Figura 9.12

Solución Aunque no hace ninguna diferencia cuál dimensión se elija para ℓ, w o h, es más importante que las unidades de medida sean las mismas. Por tanto se reemplaza 1 pie por 12 pulg en la fórmula para el volumen:

$$\begin{aligned} V &= \ell wh \\ &= 12 \text{ pulg} \cdot 8 \text{ pulg} \cdot 10 \text{ pulg} \\ &= 960 \text{ pulg}^3 \end{aligned}$$

■

Advertencia

La letra mayúscula B que se encuentra en las fórmulas de este capítulo representa el área de la base de un sólido; debido a que la base es una región plana, B se mide en unidades cuadradas.

Observe que la fórmula para el volumen del prisma rectangular recto, $V = \ell wh$ se podría reemplazar por la fórmula $V = Bh$, donde B es el área de la base del prisma; es decir, $B = \ell w$. Como se establece en el siguiente postulado, esta relación del volumen es verdadera para los prismas rectos en general.

POSTULADO 26

El volumen de un prisma recto está dado por

$$V = Bh$$

donde B es el área de una base y h es la altura del prisma.

GEE
Ejercicios 9-13

En las aplicaciones del mundo real la fórmula $V = Bh$ es válida para los prismas oblicuos y para los prismas rectos.

Exploración tecnológica

Identifique en su calculadora, el método de "cubicar". Es decir, encuentre un valor tal como 2.1^3. En varias calculadoras se introduce 2.1, un acento circunflejo ∧, y 3.

EJEMPLO 7

Encuentre el volumen del prisma hexagonal recto en la figura 9.7 de la página 407.

Solución En el ejemplo 4, se encuentra que el área de la base hexagonal es $24\sqrt{3}$ pulg^2. Debido a que la altura del prisma hexagonal es de 10 pulg, el volumen es $V = Bh$ o $V = (24\sqrt{3}\text{ pulg}^2)(10\text{ pulg})$. Entonces $V = 240\sqrt{3}\text{ pulg}^3 \approx 415.69\text{ pulg}^3$.

NOTA: Igual que $x^2 \cdot x = x^3$, las unidades en el ejemplo 7 son pulg$^2 \cdot$ pulg $=$ pulg^3. ■

En el ejemplo final de esta sección se usa el hecho de que 1 yd^3 = 27 pies^3. En el cubo que se muestra en la figura 9.13, cada dimensión mide 1 yd o 3 pies. El volumen del cubo está dado por 1 yd · 1 yd · 1 yd = 1 yd^3 o 3 pies · 3 pies · 3 pies = 27 pies^3.

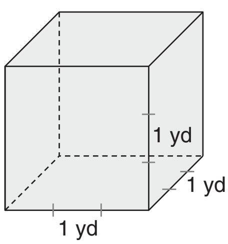


Figura 9.13

EJEMPLO 8

Sarah Balbuena está rellenando de concreto una entrada de vehículos en su casa. La sección a rellenar es rectangular, mide 12 pies por 40 pies y es de 4 pulg de profundidad. ¿Cuántas yardas cúbicas de concreto se necesitan?

Solución Utilizando $V = \ell wh$, se debe ser consistente con las unidades. Por tanto $\ell = 12$ pies, $w = 40$ pies y $h = \frac{1}{3}$ pie (de 4 pulg). Ahora

$$V = 12\text{ pies} \cdot 40\text{ pies} \cdot \frac{1}{3}\text{ pies}$$
$$V = 160\text{ pies}^3$$

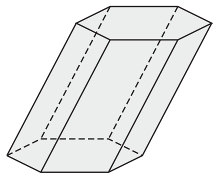
Para cambiar 160 pies^3 a yardas cúbicas se divide entre 27 para obtener $5\frac{25}{27}$ yd^3.

GEE
Ejercicios 14, 15

NOTA: A Sarah se le cobrará por 6 yd^3 de concreto, resultado de redondear hacia arriba. ■

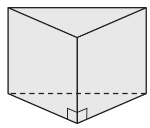
Ejercicios 9.1

1. Considere el sólido que se muestra.
   a) ¿Parece un prisma?
   b) ¿Es recto u oblicuo?
   c) ¿Qué tipo de base(s) tiene el sólido?
   d) Nombre el tipo de sólido.
   e) ¿Qué tipo de figura es cada cara lateral?



Ejercicios 1, 3, 5, 7, 9

2. Considere el sólido que se muestra.
   a) ¿Parece un prisma?
   b) ¿Es recto u oblicuo?
   c) ¿Qué tipo de base(s) tiene el sólido?
   d) Nombre el tipo de sólido.
   e) ¿Qué tipo de figura es cada cara lateral?



Ejercicios 2, 4, 6, 8, 10

3. Considere el prisma hexagonal que se muestra en el ejercicio 1.
   a) ¿Cuántos vértices tiene?
   b) ¿Cuántas aristas (laterales más aristas de las bases) tiene?
   c) ¿Cuántas caras (laterales más bases) tiene?

4. Considere el prisma triangular que se muestra en el ejercicio 2.
   a) ¿Cuántos vértices tiene?
   b) ¿Cuántas aristas (laterales más aristas de las bases) tiene?
   c) ¿Cuántas caras (laterales más bases) tiene?

5. Si cada arista del prisma hexagonal en el ejercicio 1 se mide en centímetros, ¿qué unidades se utilizan para medir su (a) área superficial, (b) volumen?

6. Si cada arista del prisma triangular en el ejercicio 2 se mide en pulgadas, ¿qué unidades se usan para medir su (a) área lateral, (b) volumen?

7. Suponga que cada una de las bases del prisma hexagonal en el ejercicio 1 tiene un área de 12 cm^2 y que cada cara lateral tiene un área de 18 cm^2. Encuentre el área total (superficial) del prisma.

8. Suponga que cada una de las bases del prisma triangular en el ejercicio 2 tiene un área de 3.4 $pulg^2$ y que cada cara lateral tiene un área de 4.6 $pulg^2$. Encuentre el área total (superficial) del prisma.

9. Suponga que cada una de las bases del prisma hexagonal en el ejercicio 1 tiene un área de 12 cm^2 y que la altura del prisma mide 10 cm. Encuentre el volumen del prisma.

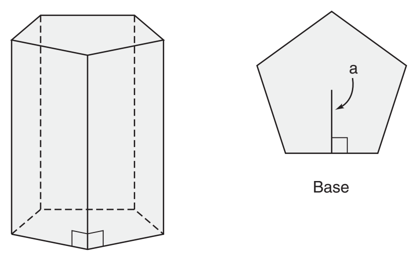
10. Suponga que cada una de las bases del prisma triangular en el ejercicio 2 tiene un área de 3.4 cm^2 y que la altura del prisma mide 1.2 cm. Encuentre el volumen del prisma.

11. Un sólido es un prisma octagonal.
   a) ¿Cuántos vértices tiene?
   b) ¿Cuántas aristas laterales tiene?
   c) ¿Cuántas aristas de base tiene en total?

12. Un sólido es un prisma pentagonal.
   a) ¿Cuántos vértices tiene?
   b) ¿Cuántas aristas laterales tiene?
   c) ¿Cuántas aristas de base tiene en total?

13. Generalice los resultados de los ejercicios 11 y 12 dando respuesta a cada una de las siguientes preguntas. Suponga que el número de lados en cada base del prisma es n. Para el prisma ¿cuál es el
   a) número de vértices?
   b) número de aristas laterales?
   c) número de las aristas de base?
   d) número total de aristas?
   e) número de caras laterales?
   f) número de bases?
   g) número total de caras?

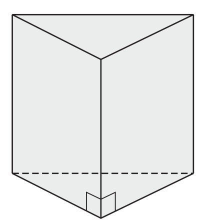
14. En el prisma pentagonal regular adjunto, suponga que cada arista de la base mide 6 pulg y que la apotema de la base mide 4.1 pulg. La altura del prisma mide 10 pulg.
   a) Encuentre el área lateral del prisma.
   b) Encuentre el área total del prisma.
   c) Encuentre el volumen del prisma.



Ejercicios 14, 15

15. En el prisma pentagonal regular mostrado suponga que cada arista de la base mide 9.2 cm y que la apotema de la base mide 6.3 cm. La altura del prisma mide 14.6 cm.
   a) Encuentre el área lateral del prisma.
   b) Encuentre el área total del prisma.
   c) Encuentre el volumen del prisma.

16. En el prisma triangular recto suponga que los lados del triángulo miden 4, 5 y 6 m. La altura mide 7 m.
   a) Encuentre el área lateral del prisma.
   b) Encuentre el área total del prisma.
   c) Encuentre el volumen del prisma.



Ejercicios 16,17

17. Para el prisma triangular recto que se encontró en el ejercicio 16, suponga que los lados de la base triangular miden 3, 4 y 5 pies. La altura tiene una longitud de 6 pies.
a) Encuentre el área lateral del prisma.
b) Encuentre el área total del prisma.
c) Encuentre el volumen del prisma.

18. Dado que 100 cm = 1 m, encuentre el número de centímetros cúbicos en 1 metro cúbico.

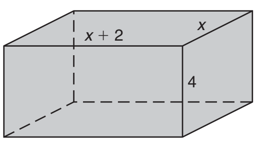
19. Dado que 12 pulg = 1 pie, encuentre el número de pulgadas cúbicas en 1 pie cúbico.

20. Una caja de cereal mide 2 por 8 por 10 pulg. ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Cuántas pulgadas cuadradas de cartón forman su superficie (descarte las tapas escondidas)?

21. Las medidas de los lados de la base cuadrada de una caja son el doble de la medida de la altura de la caja. Si el volumen de la caja es 108 pulg^3, encuentre las dimensiones de la caja.

22. Para una caja dada, la altura mide 4 m. Si la longitud de la base rectangular es 2 m mayor que el ancho de la base y el área lateral L es 96 m^2, encuentre las dimensiones de la caja.

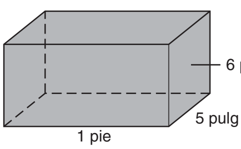
23. Para la caja que se muestra, el área total es de 94 cm^2. Determine el valor de x.



Ejercicios 23, 24

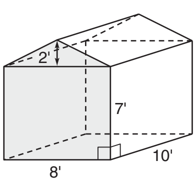
24. Si el volumen de la caja es de 252 pulg^3, encuentre el valor de x. (Vea la figura para el ejercicio 23.)

25. La caja con las dimensiones indicadas va a ser construida con materiales que cuestan 1 centavo por pulgada cuadrada para la superficie lateral y 2 centavos por pulgada cuadrada para las bases. ¿Cuál es el costo total de fabricar la caja?

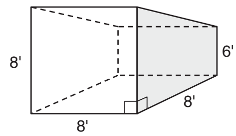


26. Una puerta de acero hueca mide 32 pulg de ancho por 80 pulg de alto por $1\frac{3}{8}$ pulg de grosor. ¿Cuántas pulgadas cúbicas de aislante de espuma se necesitan para rellenar la puerta?

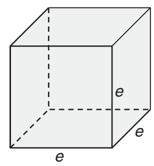
27. Un cobertizo de almacenamiento tiene la forma de un prisma pentagonal. El frente representa una de sus bases. ¿Cuál es la capacidad de almacenamiento (volumen) de su interior?



28. Un cobertizo de almacenamiento tiene la forma de un prisma trapezoidal. Cada trapezoide representa una de sus bases. Con las dimensiones que se muestran, ¿cuál es la capacidad de almacenamiento (volumen) de su interior?



29. Un cubo es un prisma cuadrangular recto cuyas aristas tienen la misma longitud. Para el cubo con arista e,
a) demuestre que el área total es $T = 6e^2$.
b) encuentre el área total si $e = 4$ cm.
c) demuestre que el volumen es $V = e^3$.
d) encuentre el volumen si $e = 4$ cm.



Ejercicios 29–31

30. Utilice las fórmulas y el esquema en el ejercicio 29 para encontrar (a) el área total T y (b) el volumen V de un cubo con aristas de 5.3 pies de longitud.

31. Cuando la longitud de cada arista de un cubo se aumenta en 1 cm, el volumen se incrementa en 61 cm^3. ¿Cuál es la longitud original de cada arista del cubo?

32. El valor numérico del volumen de un cubo es igual al valor numérico de su área superficial total. ¿Cuál es la longitud de cada arista del cubo?

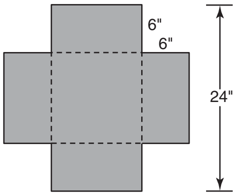
***33.** Una diagonal de un cubo une dos vértices de manera que los puntos restantes de la diagonal se encuentran en el interior del cubo. Demuestre que la diagonal del cubo que tiene aristas de longitud e es de $\sqrt{3}$ unidades de largo.

34. Un bloque de concreto de 4 pulg de grosor va a tener una longitud de 36 pies y un ancho de 30 pies. ¿Cuántas yardas cúbicas de concreto deben verterse?
(SUGERENCIA: 1 yd^3 = 27 pies^3.*)*

35. Un lecho elevado de flores mide 2 pies de alto por 12 pies de ancho por 15 pies de largo. El costo del mantillo, la tierra y la mezcla de turba que se utilizan para rellenar el lecho elevado es de \$9.60 por yarda cúbica. ¿Cuál es el costo total de los ingredientes utilizados para rellenar el jardín con lecho elevado?

36. En la excavación para una nueva casa un constructor cava un agujero en la forma de un prisma rectangular recto. Las dimensiones del agujero son 54 pies de largo por 36 pies de ancho por 9 pies de profundidad. ¿Cuántas yardas cúbicas de escombro se removieron?

37. Se forma una caja abierta al cortar cuadrados congruentes de las cuatro esquinas de una pieza cuadrada de cartón cuya longitud es de 24 pulg por lado. Si los cuadrados congruentes que se eliminaron tienen lados que miden 6 pulg cada uno, ¿cuál es el volumen de la caja formada al doblar y sellar las “tapas”?

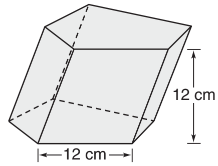


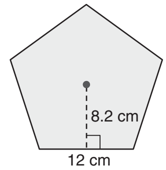
38. Repita el ejercicio 35 (para encontrar el volumen), pero con los cuatro cuadrados congruentes con lados de 6 pulg de longitud que se cortan de las esquinas de una pieza rectangular de cartulina que mide 20 pulg de ancho y 30 pulg de largo.

39. El acuario Kianna tiene “forma de caja” con dimensiones de 2 pies por 1 pie por 8 pulg. Si 1 pie^3 corresponde a 7.5 gal de agua, ¿cuál es la capacidad del acuario en *galones*?

40. El tanque de gasolina de un automóvil tiene “forma de caja” con dimensiones de 24 pulg por 20 por 9 pulg. Si 1 pie^3 corresponde a 7.5 gal de gasolina, ¿cuál es la capacidad del tanque de gasolina del automóvil en *galones?*

Para los ejercicios 41-43 considere el prisma pentagonal regular oblicuo que se muestra. Cada lado de la base mide 12 cm y la altura mide 12 cm.





Ejercicios 41-43

41. Encuentre el área lateral del prisma.
(SUGERENCIA: Cada cara lateral es un paralelogramo.)

42. Encuentre el área total del prisma.

43. Encuentre el volumen del prisma.

44. Se puede demostrar que la longitud de una diagonal de un prisma rectangular recto con dimensiones ℓ, w y h está dada por $d = \sqrt{\ell^2 + w^2 + h^2}$. Utilice esta fórmula para encontrar la longitud de la diagonal cuando $\ell = 12$ pulg, $w = 4$ pulg y $h = 3$ pulg.

9.2 Pirámides, área y volumen

CONCEPTOS CLAVE

Pirámide	Caras	Área lateral
Base	Vértice de una pirámide	Área total (superficial)
Altura	Pirámide regular	Volumen
Vértices	Altura inclinada de una pirámide regular	
Aristas		

Los sólidos que se muestran en la figura 9.14 de la siguiente página son **pirámides**. En la figura 9.14(a), el punto A no es coplanar con el cuadrado $BCDE$. En la figura 9.14(b), F no es coplanar con $\triangle GHJ$. En estas pirámides se han unido (trazando segmentos de recta) los puntos no coplanares con cada vértice del cuadrado y cada vértice del triángulo, respectivamente. Toda pirámide tiene exactamente una base. El cuadrado $BCDE$ es la base de la primera pirámide y el $\triangle GHJ$ es la base de la segunda pirámide. Al punto A se le conoce como **vértice** de la **pirámide cuadrangular**; de manera similar, el punto F es el vértice de la **pirámide triangular**.

La pirámide en la figura 9.15 es una **pirámide pentagonal**. Tiene vértice K, pentágono $LMNPQ$ como su **base** y **aristas laterales** $\overline{KL}$, $\overline{KM}$, $\overline{KN}$, $\overline{KP}$ y $\overline{KQ}$. Aunque a K se le llama *el* **vértice de la pirámide**, hay en realidad seis vértices: K, L, M, N, P y Q. Los lados de la base $\overline{LM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{QL}$ son las **aristas de la base**. Todas las **caras laterales** de una pirámide son triángulos; $\triangle KLM$ es una de las cinco caras laterales de la pirámide pentagonal. Incluyendo la base $LMNPQ$, esta pirámide tiene un total de seis

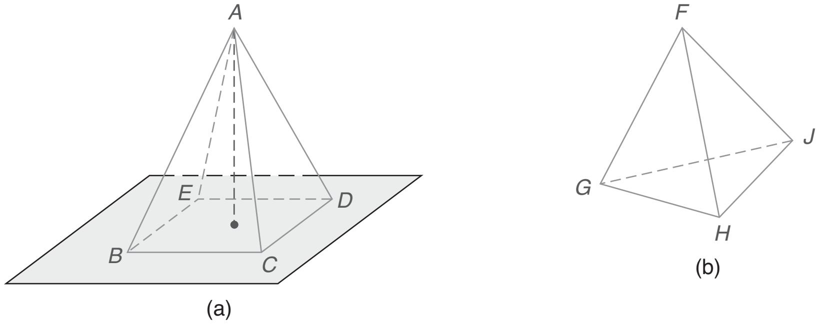


Figura 9.14

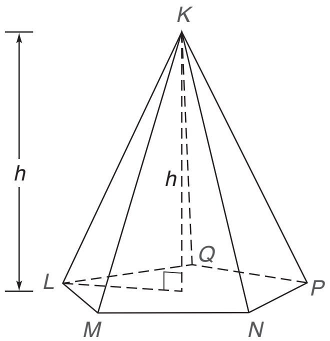


Figura 9.15

caras. La **altura** de la pirámide, de longitud *h,* es el segmento de recta desde el vértice *K* perpendicular al plano de la base.

DEFINICIÓN

Una **pirámide regular** tiene por base un polígono regular y sus aristas laterales son congruentes.

Suponga que en la figura 9.15 la pirámide es pentagonal regular. Entonces las caras laterales son necesariamente congruentes entre sí; en la figura 9.15, $\triangle KLM \cong \triangle KMN \cong \triangle KNP \cong \triangle KPQ \cong \triangle KQL$ por LLL. Cada cara lateral es un triángulo isósceles. En una pirámide regular la altura une el vértice de la pirámide con el centro del polígono regular que es su base.

GEE

Ejercicios 1, 2

DEFINICIÓN

La **altura inclinada** de una pirámide regular es la distancia desde el vértice de la pirámide hasta la base de cualquiera de las caras laterales congruentes de la pirámide regular.

NOTA: Entre las pirámides sólo una pirámide regular tiene una altura inclinada.

En nuestras fórmulas y explicaciones se usa ℓ para representar la longitud de la altura inclinada de una pirámide regular. (Vea la figura 9.16 (c) en la página 415.)

EJEMPLO 1

Para una pirámide cuadrangular regular con 4 pulg de altura y aristas de la base de 6 pulg de longitud, encuentre la longitud de la altura inclinada ℓ. (Vea la figura 9.16 en la página 415.)

Solución En la figura 9.16 se puede demostrar que la apotema para cualquier lado tiene 3 pulg de longitud (la mitad de la longitud del lado de la base cuadrada). Además, la altura inclinada es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos iguales a las longitudes de la altura y la apotema. Por el teorema de Pitágoras se tiene

$$\begin{aligned}\ell^2 &= a^2 + h^2\\ \ell^2 &= 3^2 + 4^2\\ \ell^2 &= 9 + 16\\ \ell^2 &= 25\\ \ell &= 5 \text{ pulg}\end{aligned}$$

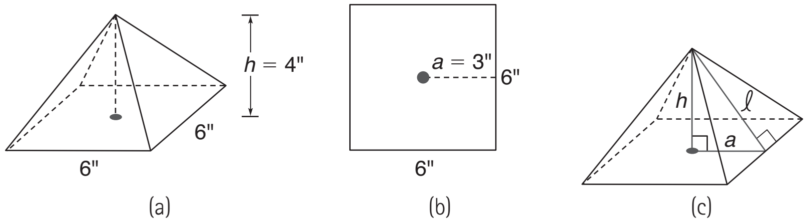


Figura 9.16

El siguiente hecho se usó en la solución del ejemplo 1; observe la pirámide de la figura 9.16(c). Se acepta el teorema 9.2.1 con base en la demostración visual que proporciona la figura 9.16.

TEOREMA 9.2.1

En una pirámide regular la longitud a del apotema de la base, la altura h y la altura inclinada ℓ satisfacen el teorema de Pitágoras; es decir, $\ell^2 = a^2 + h^2$ en toda pirámide regular

GEE
Ejercicios 3, 4

ÁREA SUPERFICIAL DE UNA PIRÁMIDE

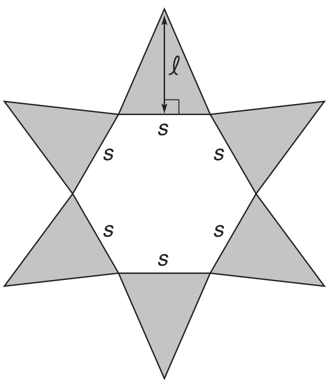


Figura 9.17

Para establecer las bases para el siguiente teorema se justifica el resultado "desarmando" una de las pirámides regulares y poniéndola plana. Aunque se usará una pirámide hexagonal regular para este propósito, el argumento es similar si la base es cualquier polígono regular.

Cuando las caras laterales de la pirámide regular se despliegan en un plano, como se muestra en la figura 9.17, el área lateral sombreada es la suma de las áreas de las caras laterales triangulares. Utilizando $A = \frac{1}{2}bh$, se encuentra que el área de cada cara es $\frac{1}{2} \cdot s \cdot \ell$ (cada lado de la base de la pirámide tiene longitud s y la altura inclinada es ℓ). Las áreas combinadas de los triángulos dan el área lateral. Debido a que hay n triángulos,

$$\begin{aligned} L &= n \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot \ell \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ell(n \cdot s) \\ &= \frac{1}{2}\ell P \end{aligned}$$

donde P es el perímetro de la base.

TEOREMA 9.2.2

El área lateral L de una pirámide regular con altura inclinada de longitud ℓ y perímetro P de la base está dada por

$$L = \frac{1}{2}\ell P$$

En el ejemplo 2 se ilustra el uso del teorema 9.2.2.

EJEMPLO 2

Encuentre el área lateral de una pirámide pentagonal regular si los lados de la base miden 8 cm y las aristas laterales miden 10 cm cada una [vea la figura 9.18(a) en la página 416].

Solución La longitud de la altura inclinada para la cara lateral triangular [vea la figura 9.18(b)], se encuentra aplicando el teorema de Pitágoras:

$$4^2 + \ell^2 = 10^2, \text{ por lo que } 16 + \ell^2 = 100$$
$$\ell^2 = 84$$
$$\ell = \sqrt{84} = \sqrt{4 \cdot 21} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{21} = 2\sqrt{21}$$

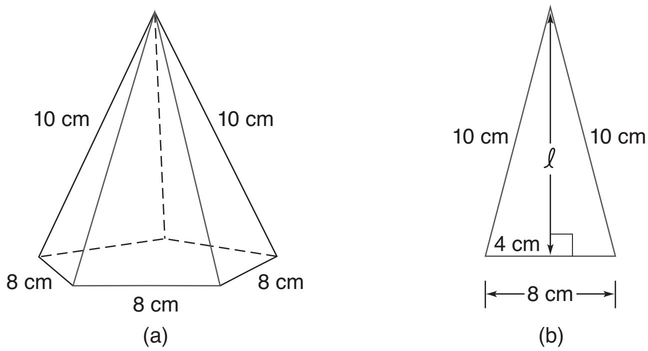


Figura 9.18

Ahora $L = \frac{1}{2}\ell P$ será $L = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21} \cdot (5 \cdot 8) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21} \cdot 40 = 40\sqrt{21}\text{ cm}^2 \approx 183.30\text{ cm}^2$. ■

Puede ser más sencillo encontrar el área lateral de una pirámide regular sin utilizar la fórmula del teorema 9.2.2; simplemente se calcula el área de una cara lateral y se multiplica por el número de caras. Así, en el ejemplo 2 el área de cada cara triangular es $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{21}$ u $8\sqrt{21}$; por tanto el área lateral de la pirámide pentagonal regular es $5 \cdot 8\sqrt{21} = 40\sqrt{21}\text{ cm}^2$.

TEOREMA 9.2.3

El área total (área superficial) T de una pirámide con área lateral L y área de la base B está dada por $T = L + B$.

La fórmula para el área total T de la pirámide se puede escribir como $T = \frac{1}{2}\ell P + B$.

EJEMPLO 3

Encuentre el área total de una pirámide cuadrangular regular que tiene aristas de la base de 4 pies de longitud y aristas laterales de 6 pies de longitud. [Vea la figura 9.19(a).]

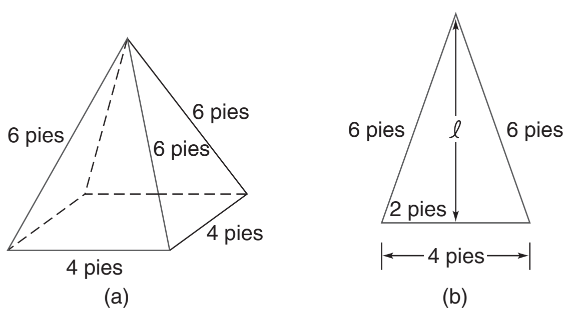


Figura 9.19

Solución Para determinar el área lateral se necesita la longitud de la altura inclinada. [Vea la figura 9.19(b) en la página anterior.]

$$\begin{aligned} \ell^2 + 2^2 &= 6^2 \\ \ell^2 + 4 &= 36 \\ \ell^2 &= 32 \\ \ell &= \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

El **área lateral es** $L = \frac{1}{2}\ell P$. Por tanto,

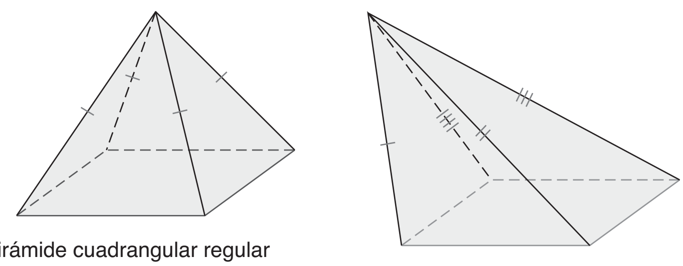
$$L = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2}(16) = 32\sqrt{2}\,\text{pies}^2$$

Debido a que el **área de la base cuadrangular es** $B = 4^2$ o 16 pies^2, el **área total es**

Ejercicios 5-7

$$T = 16 + 32\sqrt{2} \approx 61.25\ \text{pies}^2$$ ■

La pirámide en la figura 9.20(a) es una pirámide cuadrangular regular más que sólo una pirámide cuadrangular. Sus lados y caras son congruentes. La pirámide que se muestra en la figura 9.20(b) es oblicua. No tiene aristas laterales congruentes o caras congruentes.



Pirámide cuadrangular regular
(a)

Pirámide cuadrangular
(b)

Figura 9.20

VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

El último teorema en esta sección se presenta sin ningún intento de construir la demostración. En un curso avanzado como el de cálculo infinitesimal se puede demostrar el enunciado. El factor "un tercio" en la fórmula para el volumen de una pirámide proporciona resultados exactos. Esta fórmula se puede aplicar a cualquier pirámide, aun cuando no sea regular; en la figura 9.20(b) la longitud de la altura es la distancia perpendicular desde el vértice hasta el plano de la base cuadrangular. Lea la actividad Descubra en el margen izquierdo antes de pasar al teorema 9.2.4 y sus aplicaciones.

TEOREMA 9.2.4

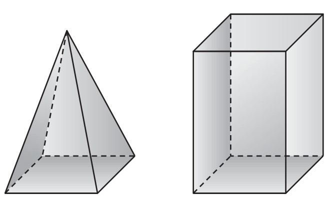
El volumen V de una pirámide que tiene un área de la base B y una altura de longitud h está dado por

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

Descubra

Hay juegos que contienen una pirámide hueca y un prisma hueco que tienen bases congruentes y la misma altura. Llene la pirámide con agua y después vierta el agua en el prisma.

a) ¿Cuántas veces tiene que vaciar la pirámide para llenar el prisma?
b) En forma de fracción, ¿qué parte representa el volumen de la pirámide del volumen del prisma?



RESPUESTAS

(a) Tres veces (b) $\frac{1}{3}$

EJEMPLO 4

Encuentre el volumen de la pirámide cuadrangular regular con altura $h = 4$ pulg y longitud de las aristas de la base $s = 6$ pulg (ésta fue la pirámide del ejemplo 1).

Solución El área de la base cuadrangular es $B = (6 \text{ pulg})^2$ o 36 pulg^2. Debido a que $h = 4$ pulg, la fórmula $V = \frac{1}{3}Bh$ será

$$V = \frac{1}{3}(36 \text{ pulg}^2)(4 \text{ pulg}) = 48 \text{ pulg}^3$$

Para encontrar el volumen de una pirámide se usa la fórmula $V = \frac{1}{3}Bh$. En muchas aplicaciones es necesario determinar B o h a partir de otra información que se tenga. En el ejemplo 5 calcular la longitud de la altura h ¡es todo un reto! En el ejemplo 6 la dificultad está en encontrar el área de la base. Antes de que considere cualquier problema, la tabla 9.1 recuerda los tipos de unidades necesarias en los diferentes tipos de medida.

TABLA 9.1

Tipo de medida	Medida geométrica	Tipo de unidad
Lineal	Longitud del segmento, así como longitud de la altura inclinada	pulg, cm, etc.
Área	Cantidad de región plana encerrada, así como área de la cara lateral	pulg^2, cm^2, etc.
Volumen	Cantidad de espacio encerrado, así como volumen de la pirámide	pulg^3, cm^3, etc.

En el ejemplo 5 se emplea el siguiente teorema. Esta aplicación del teorema de Pitágoras relaciona las longitudes de las aristas laterales, el radio de la base y la altura de una pirámide *regular*. La figura 9.21(c) da una interpretación visual del teorema.

TEOREMA 9.2.5

En una pirámide regular las longitudes de la altura h, el radio r de la base y la arista lateral e satisfacen el teorema de Pitágoras; es decir, $e^2 = h^2 + r^2$.

EJEMPLO 5

Encuentre el volumen de la pirámide cuadrangular regular en la figura 9.21(a).

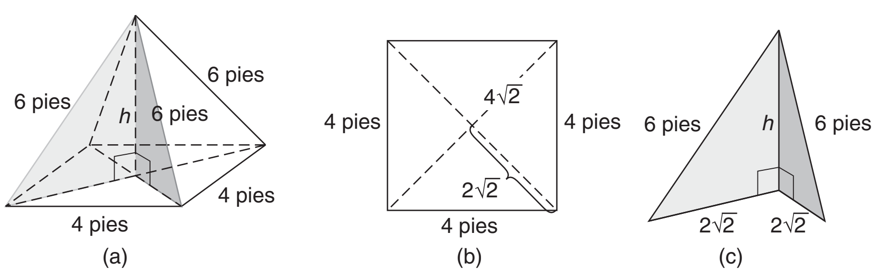


Figura 9.21

Solución La longitud de la altura (de la pirámide) se representa con h, que se determina como sigue.

La altura coincide con las diagonales de la base cuadrangular en su punto medio común [vea la figura 9.21(b)]. Cada diagonal tiene la longitud de $4\sqrt{2}$ pies por la relación 45°-45°-90°. Por tanto, se tiene un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitudes $2\sqrt{2}$ pies y h, y la hipotenusa tiene 6 pies de longitud (la longitud de la arista lateral). Vea la figura 9.21(c) en la que $r = 2\sqrt{2}$ y $e = 6$.

Aplicando el teorema 9.2.5 en la figura 9.21(c) se tiene

$$\begin{aligned} h^2 + (2\sqrt{2})^2 &= 6^2 \\ h^2 + 8 &= 36 \\ h^2 &= 28 \\ h &= \sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

El área de la base cuadrangular es $B = 4^2$ o $B = 16$ pies^2. Ahora se tiene

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Bh \\ &= \frac{1}{3}(16)(2\sqrt{7}) \\ &= \frac{32}{3}\sqrt{7} \text{ pies}^3 \approx 28.22 \text{ pies}^3 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6

Encuentre el volumen de una pirámide hexagonal regular cuyas aristas de la base miden 4 pulg de longitud y cuya altura mide 12 pulg. [Vea la figura 9.22(a).]

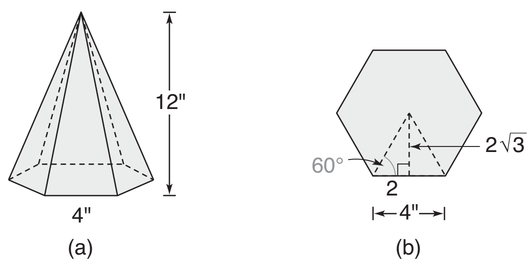


Figura 9.22

Solución En la fórmula $V = \frac{1}{3}Bh$, la altura $h = 12$. Para encontrar el área de la base se usa la fórmula $B = \frac{1}{2}aP$ (esto se escribió como $A = \frac{1}{2}aP$ en el capítulo 8). En el triángulo 30°-60°-90° formado por la apotema, el radio y el lado del hexágono regular, se ve que

$$a = 2\sqrt{3} \text{ pulg} \qquad \textbf{[Vea la figura 9.22(b)]}$$

Ahora $B = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot (6 \cdot 4)$, o $B = 24\sqrt{3}$ pulg^2.
A su vez, $V = \frac{1}{3}Bh$ será $V = \frac{1}{3}(24\sqrt{3})(12)$, por lo que $V = 96\sqrt{3}$ pulg^3. ■

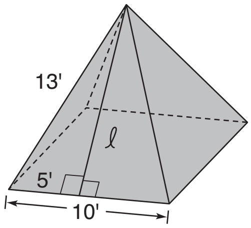


Figura 9.23

Recuerde

En algunas ocasiones es más fácil encontrar el área lateral sin memorizar ni utilizar fórmulas nuevas.

GEE
Ejercicios 8-11

EJEMPLO 7

El campanario de la iglesia tiene la forma de una pirámide cuadrangular regular. Mediciones que se han tomado muestran que las aristas de la base miden 10 pies y que la longitud de una arista lateral es de 13 pies. Para determinar la cantidad de techo que necesita recubrirse con tejas determine el área lateral de la pirámide. (Vea la figura 9.23.)

Solución La altura inclinada ℓ de cada cara triangular se determina resolviendo la ecuación

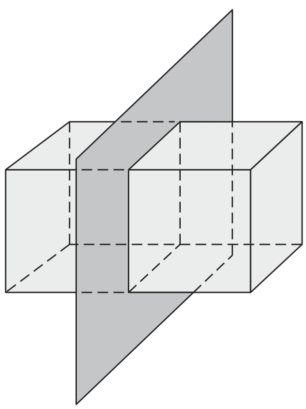
$$\begin{aligned} 5^2 + \ell^2 &= 13^2 \\ 25 + \ell^2 &= 169 \\ \ell^2 &= 144 \\ \ell &= 12 \end{aligned}$$

Cuando se usa la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$, el área lateral de la cara es $A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60 \text{ pies}^2$. Considerando las cuatro caras laterales, el área que se va a recubrir con tejas mide

$$L = 4 \cdot 60 \text{ pies}^2 \quad \text{o} \quad L = 240 \text{ pies}^2$$

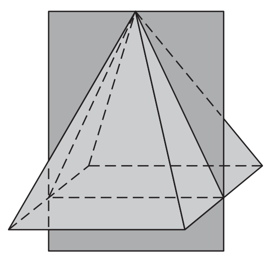
Las figuras planas y sólidas pueden tener recta y punto de simetría. Sin embargo, las figuras sólidas pueden también tener **plano de simetría**. Para tener este tipo de simetría se puede trazar un plano para el cual cada punto de la figura en el espacio tiene un punto correspondiente en el lado opuesto del plano a la misma distancia.

Cada sólido en la figura 9.24 tiene más de un plano de simetría. En la figura 9.24(a) el plano de simetría que se muestra está determinado por los puntos medios de las aristas indicadas de la "caja". En la figura 9.24(b) el plano determinado por el vértice y los puntos medios de los lados opuestos de la base cuadrangular conducen al plano de simetría para la pirámide.



Prisma rectangular recto

(a)



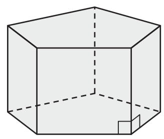
Pirámide triangular regular

(b)

Figura 9.24

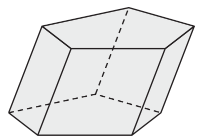
▶▶▶ Ejercicios 9.2

En los ejercicios 1 al 4 nombre el sólido que se muestra. Las respuestas se basan en las secciones 9.1 y 9.2.

1. a) 

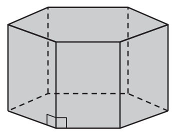
(a)

Las bases no son regulares.

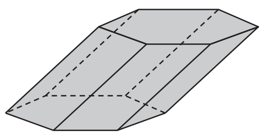
b) 

(b)

Las bases no son regulares.

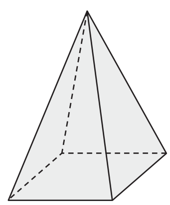
2. a) 

Las bases son regulares.

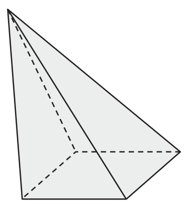
b) 

(b)

Las bases no son regulares.

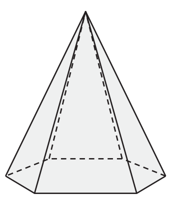
3. a) 

Las caras laterales son congruentes; la base es un cuadrado.

b) 

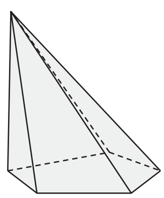
(b)

La base es un cuadrado.

4. a) 

(a)

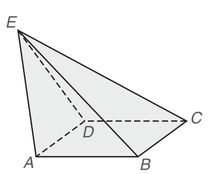
Las caras laterales son congruentes; la base es un polígono regular.

b) 

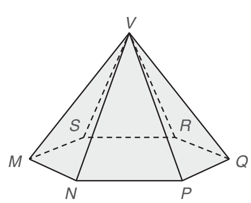
(b)

Las caras laterales no son congruentes.

5. En el sólido que se muestra la base *ABCD* es un cuadrado.
a) ¿El sólido es un prisma o una pirámide?
b) Nombre el vértice de la pirámide.
c) Nombre las aristas laterales.
d) Nombre las caras laterales.
e) ¿El sólido es una pirámide cuadrangular regular?



Ejercicios 5, 7, 9, 11



Ejercicios 6, 8,10, 12

6. En el sólido que se muestra la base es un hexágono regular.
a) Nombre los vértices de la pirámide.
b) Nombre las aristas de base de la pirámide.
c) Si se supone que las aristas laterales son congruentes, ¿también son congruentes las caras laterales?
d) Si se supone que las aristas laterales son congruentes, ¿el sólido es una pirámide hexagonal regular?

7. Considere la pirámide cuadrangular en el ejercicio 5.
a) ¿Cuántos vértices tiene?
b) ¿Cuántas aristas (aristas laterales más aristas de base) tiene?
c) ¿Cuántas caras (laterales más bases) tiene?

8. Considere la pirámide hexagonal en el ejercicio 6.
a) ¿Cuántos vértices tiene?
b) ¿Cuántas aristas (laterales más aristas de la base) tiene?
c) ¿Cuántas caras (laterales más bases) tiene?

9. Suponga que las caras laterales de la pirámide en el ejercicio 5 tienen áreas $A_{ABE} = 12$ pulg^2, $A_{BCE} = 16$ pulg^2, $A_{CED} = 12$ pulg^2 y $A_{ADE} = 10$ pulg^2. Si cada lado de la base cuadrangular mide 4 pulg, encuentre el área superficial total de la pirámide.

10. Suponga que la base de la pirámide hexagonal en el ejercicio 6 tiene un área de 41.6 cm^2 y que cada cara lateral tiene un área de 20 cm^2. Encuentre el área total (superficial) de la pirámide.

11. Suponga que la base de la pirámide cuadrangular en el ejercicio 5 tiene un área de 16 cm^2 y que la altura de la pirámide mide 6 cm. Encuentre el volumen de la pirámide cuadrada.

12. Suponga que la base de la pirámide hexagonal en el ejercicio 6 tiene un área de 41.6 cm^2 y que la altura de la pirámide mide 3.7 cm. Encuentre el volumen de la pirámide hexagonal.

13. Suponga que el número de lados en la base de una pirámide es *n.* Generalice los resultados encontrados en los ejercicios anteriores para responder cada una de las siguientes preguntas.
a) ¿Cuál es el número de vértices?
b) ¿Cuál es el número de aristas laterales?
c) ¿Cuál es el número de aristas de base?
d) ¿Cuál es el número total de aristas?
e) ¿Cuál es el número de caras laterales?
f) ¿Cuál es el número total de caras?
(**NOTA:** Caras laterales y base = caras.)

14. Observe los prismas de los ejercicios 1 y 2. ¿Cuáles tienen simetría respecto a un (o más) plano(s)?

15. Observe las pirámides de los ejercicios 3 y 4. ¿Cuáles tienen simetría respecto a un (o más) plano(s)?

16. Considere cualquier pirámide regular. Indique cuál segmento de recta tiene la longitud mayor:
a) ¿La altura inclinada o la altura?
b) ¿La arista lateral o el radio de la base?

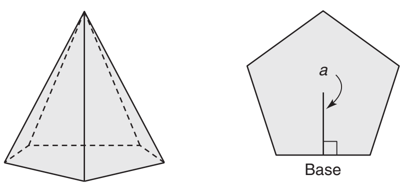
17. Considere cualquier pirámide regular. Indique cuál segmento de recta tiene la longitud mayor:
a) ¿La altura inclinada o la apotema de la base?
b) ¿La arista lateral o la altura inclinada?

En los ejercicios 18 y 19 utilice el teorema 9.2.1 en el cual las longitudes de la apotema a, la altura h y la altura inclinada ℓ de una pirámide regular se relacionan con la ecuación $\ell^2 = a^2 + h^2$.

18. En una pirámide cuadrangular regular cuyas aristas de la base miden 8 pulg, la apotema de la base mide 4 pulg. Si la altura de la pirámide mide 8 pulg, encuentre la longitud de la altura inclinada.

19. En una pirámide hexagonal regular cuyas aristas de la base miden $2\sqrt{3}$ pulg, la apotema de la base mide 3 pulg. Si la altura inclinada de la pirámide mide 5 pulg encuentre la longitud de la altura.

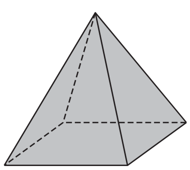
20. En la pirámide pentagonal regular cada arista lateral mide 8 pulg y cada arista de la base mide 6 pulg. La apotema de la base mide 4.1 pulg.
a) Encuentre el área lateral de la pirámide.
b) Encuentre el área total de la pirámide.



Ejercicios 20, 21

21. En la pirámide pentagonal suponga que la arista de la base mide 9.2 cm y que la apotema de la base mide 6.3 cm. La altura de la pirámide mide 14.6 cm.
a) Encuentre el área de la base de la pirámide.
b) Encuentre el volumen de la pirámide.

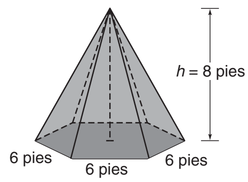
22. Para la pirámide cuadrangular regular que se muestra suponga que los lados de la base cuadrangular miden 10 m y que las aristas laterales miden 13 m.
a) Encuentre el área lateral de la pirámide.
b) Encuentre el área total de la pirámide.
c) Encuentre el volumen de la pirámide.



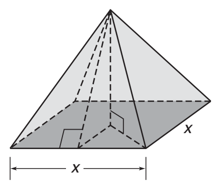
Ejercicios 22, 23

23. Para la pirámide cuadrangular regular que se muestra, suponga que los lados de la base cuadrangular miden 6 pies y que la altura mide 4 pies de longitud.
a) Encuentre el área lateral L de la pirámide.
b) Encuentre el área total T de la pirámide.
c) Encuentre el volumen V de la pirámide.

24. a) Encuentre el área lateral L de la pirámide hexagonal regular que se muestra a continuación.
b) Encuentre el área total T de la pirámide.
c) Encuentre el volumen V de la pirámide.



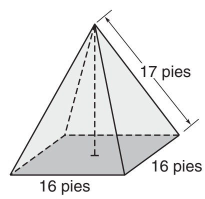
25. Para una pirámide cuadrangular regular, suponga que la altura tiene una medida igual a la de las aristas de la base. Si el volumen de la pirámide es de 72 pulg^3, encuentre el área total de la pirámide.



Ejercicios 25, 26

26. Para una pirámide cuadrangular regular la altura inclinada de cada cara lateral tiene una medida igual a la de cada arista de la base. Si el área lateral es de 200 pulg^2, encuentre el volumen de la pirámide.

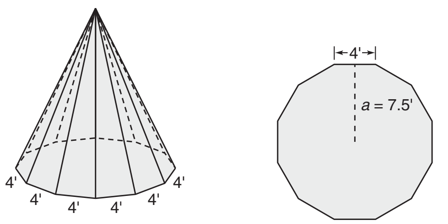
27. El campanario de una iglesia que tiene la forma de una pirámide cuadrangular regular necesita recubrirse con tejas. La parte a cubrir corresponde al área lateral de la pirámide cuadrangular. Si cada arista lateral mide 17 pies y cada arista de la base mide 16 pies, ¿cuántos pies cuadrados de tejas se necesita reemplazar?



Ejercicios 27, 28

28. Antes de que se reemplacen las tejas del campanario (vea el ejercicio 27) se va a instalar un ventilador de extracción en el mismo. Para determinar qué tamaño de ventilador de extracción deberá instalarse es necesario conocer el volumen de aire en el ático (campanario). Encuentre el volumen de la pirámide cuadrangular regular que se describe en el ejercicio 27.

29. Se construye una tienda utilizando 12 postes. La construcción es una pirámide regular con un dodecágono (12 lados) para la base. Con la base como se muestra y sabiendo que la altura de la tienda es de 15 pies, encuentre su volumen.



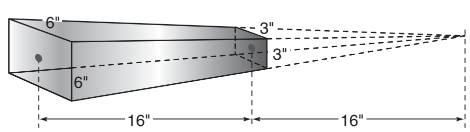
Ejercicios 29, 30

30. Para que sus ocupantes estén protegidos de los elementos fue necesario que se cerrara la tienda en el ejercicio 29. Encuentre el área cubierta; es decir, determine el área lateral de la pirámide dodecagonal regular. Recuerde que su altura mide 15 pies.

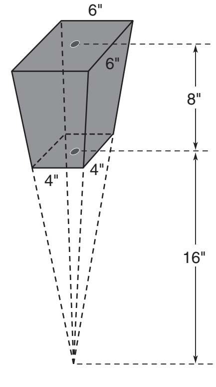
31. El almacén del departamento de vialidad que se usa para almacenar la roca, la grava y la sal que se utiliza en las calles de la ciudad, está construido en forma de una pirámide hexagonal regular. La altura de la pirámide tiene la misma longitud que cualquier lado de la base. Si el volumen del interior es de 11 972 pies^3 encuentre las longitudes de la altura y de cada uno de los lados de la base al pie más cercano.

32. El vestíbulo que se planea agregar a una iglesia existente está diseñado como una pirámide octogonal regular. Cada lado del piso octogonal tiene una longitud de 10 pies y su apotema mide 12 pies. Si se necesitan 800 pies^2 de madera laminada para cubrir el exterior del vestíbulo (es decir, el área lateral de la pirámide es de 800 pies^2), ¿cuál es la altura del vestíbulo?

33. El conducto de eyección en un astillador de madera tiene una forma parecida a la parte de una pirámide conocida como *tronco de la pirámide.* Con las dimensiones que se indican encuentre el volumen (capacidad) del conducto de eyección del astillador.

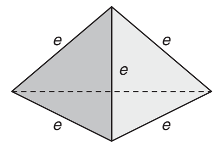


34. En un cine un recipiente de palomitas de maíz tiene la forma de un tronco de pirámide (vea el ejercicio 33). Con las dimensiones que se indican encuentre el volumen (capacidad) del recipiente.



35. Un tetraedro regular es una pirámide triangular regular en la que todas las caras (las laterales y la base) son congruentes. Si cada arista tiene longitud *e*,

a) demuestre que el área de cada cara es $A = \frac{e^2\sqrt{3}}{4}$.
b) demuestre que el área total del tetraedro es $T = e^2\sqrt{3}$.
c) encuentre el área total si cada lado mide $e = 4$ pulg.

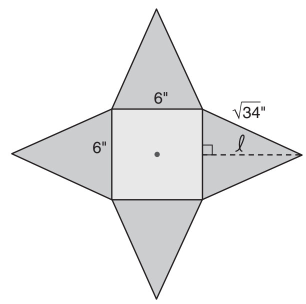


Ejercicios 35, 36

***36.** Cada arista de un tetraedro regular (vea el ejercicio 35) tiene longitud *e*.

a) Demuestre que la altura del tetraedro mide $h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}e$.
b) Demuestre que el volumen del tetraedro es $V = \frac{\sqrt{2}}{12}e^3$.
c) Encuentre el volumen del tetraedro si cada lado mide $e = 4$ pulg.

37. Considere la figura adjunta. Cuando los cuatro triángulos isósceles congruentes se doblan hacia arriba se forma una pirámide cuadrangular regular. ¿Cuál es el área superficial (área total) de la pirámide?



Ejercicios 37, 38

38. Encuentre el volumen de la pirámide cuadrangular regular que se formó en el ejercicio 37.

39. Si e_1 y e_2 son las longitudes de las dos aristas correspondientes (o las alturas) de prismas o pirámides semejantes, la razón de sus volúmenes es $\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^3$. Escriba una razón para comparar los volúmenes de dos pirámides cuadrangulares semejantes en las que $e_1 = 4$ pulg y $e_2 = 2$ pulg.

40. Utilice la información del ejercicio 39 para encontrar la relación proporcional de volúmenes $\frac{V_1}{V_2}$ para dos cubos en los que $e_1 = 2$ cm y $e_2 = 6$ cm.
(**NOTA:** $\frac{V_1}{V_2}$ se puede encontrar determinando los volúmenes reales de los cubos.)

41. Una pirámide hexagonal (no regular) con base *ABCDEF* tiene plano de simetría respecto a un plano determinado por el vértice *G* y los vértices *A* y *D* de su base. Si el volumen de la pirámide con vértice *G* y base *ABCD* es de 19.7 pulg^3, encuentre el volumen de la pirámide hexagonal dada.

9.3 Cilindros y conos

CONCEPTOS CLAVE

- Cilindros (rectos y oblicuos)
- Bases y altura de un cilindro
- Eje de un cilindro
- Conos (rectos y oblicuos)
- Base y altura de un cono
- Vértice y altura inclinada de un cono
- Eje de un cono
- Área lateral
- Área total
- Volumen
- Sólido de revolución
- Eje de un sólido de revolución

CILINDROS

Considere los sólidos en la figura 9.25, en los cuales los círculos congruentes se encuentran en planos paralelos. Para los círculos de la izquierda suponga que los centros O y O' están unidos por $\overline{OO'}$; de manera similar, suponga que $\overline{QQ'}$ une los centros de los círculos de la derecha. Los segmentos como $\overline{XX'}$ unen dos puntos de los círculos de la izquierda, por lo que $\overline{XX'} \parallel \overline{OO'}$. Si todos estos segmentos (como $\overline{XX'}$, $\overline{YY'}$ y $\overline{ZZ'}$) son paralelos entre sí, entonces se genera un **cilindro**. Debido a que $\overline{OO'}$ no es perpendicular a los planos P y P', el sólido de la izquierda es un **cilindro circular oblicuo**. Con $\overline{QQ'}$ perpendicular a los planos P y P', el sólido de la derecha es un **cilindro circular recto**. Para ambos cilindros la distancia h entre los planos P y P' es la longitud de la **altura** del cilindro; h también se llama la *altitud* del cilindro. A los círculos congruentes se les conoce como las **bases** de cada cilindro.

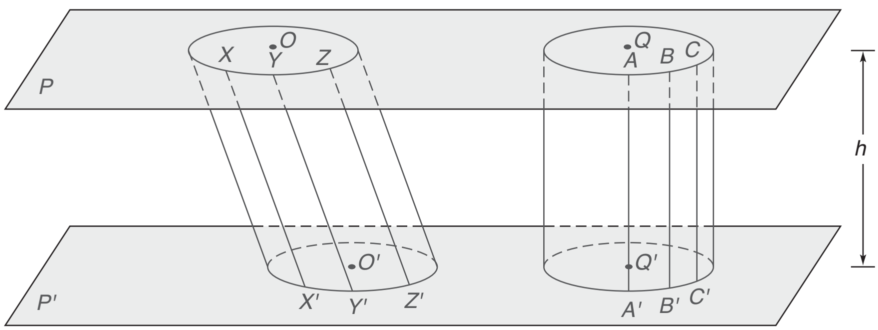


Figura 9.25

En la figura 9.26 se muestra un cilindro circular recto; sin embargo, los planos paralelos (tales como P y P' en la figura 9.25) no están representados. Al segmento de recta que une los centros de las dos bases circulares se le conoce como el **eje** del cilindro. Para un cilindro circular recto es necesario que el eje sea perpendicular a los planos de las bases circulares; en tal caso, la longitud de la altura h es la longitud del eje.

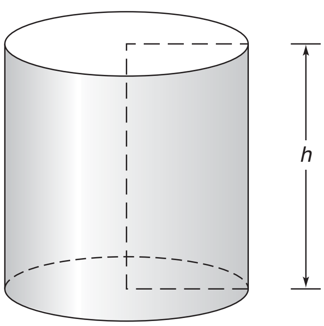
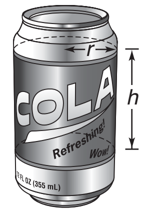


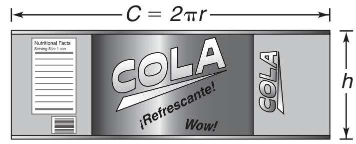
Figura 9.26

ÁREA SUPERFICIAL DE UN CILINDRO

Descubra

Piense en la lata de aluminio que se representa en la figura (a) como un cilindro circular recto. Las bases circulares del cilindro son la tapa y el fondo de la lata, y la superficie lateral es la "etiqueta" de la lata. Si la etiqueta se deslizara hacia abajo por una recta perpendicular entre los planos se removería y se desenrollaría, tendría forma rectangular. Como se muestra a continuación, dicho rectángulo tendría una longitud igual a la circunferencia de la base circular y un ancho igual a la altura del cilindro. Por tanto, el área lateral está dada por $A = bh$, que será $L = Ch$, o $L = 2\pi rh$.





(b)

Ejercicios 1, 2

La fórmula para el área lateral de un cilindro circular recto (se encuentra en el siguiente teorema) se debería comparar con la fórmula $L = hP$, el área lateral de un prisma recto cuya base tiene perímetro P.

TEOREMA 9.3.1

El área lateral L de un cilindro circular recto con altura de longitud h y circunferencia C de la base está dada por $L = hC$.
Forma alternativa: El área lateral de un cilindro circular recto se puede expresar en la forma $L = 2\pi rh$, donde r es la longitud del radio de la base circular.

En vez de construir una demostración formal del teorema 9.3.1, considere la actividad Descubra que está al iniciar la página.

TEOREMA 9.3.2

El área total T de un cilindro circular recto con área de la base B y área lateral L está dada por $T = L + 2B$.
Forma alternativa: Donde r es la longitud del radio de la base y h es la longitud de la altura del cilindro, el área total se puede expresar en la forma $T = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

EJEMPLO 1

Para el cilindro circular recto que se muestra en la figura 9.27 encuentre el

a) área lateral exacta L.
b) área superficial exacta T.

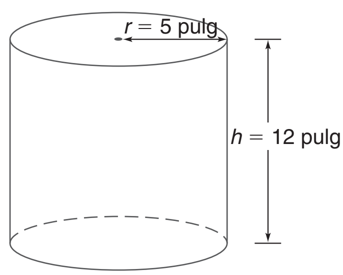


Figura 9.27

Solución

a) $$L = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi \text{ pulg}^2$$

b) $T = L + 2B$
$= 2\pi rh + 2\pi r^2$
$= 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 12 + 2 \cdot \pi \cdot 5^2$
$= 120\pi + 50\pi$
$= 170\pi$ pulg^2 ■

GEE
Ejercicios 3-5

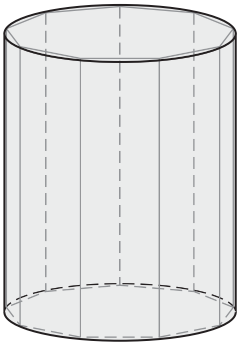


Figura 9.28

VOLUMEN DE UN CILINDRO

Al considerar el volumen de un cilindro circular recto, recuerde que el volumen de un prisma está dado por $V = Bh$, donde B es el área de la base. En la figura 9.28, como se muestra, se inscribe un prisma en el cilindro. Suponga que el prisma es regular y que el número de lados en la base del polígono inscrito se vuelve cada vez mayor; por tanto, la base se aproxima a un círculo en este proceso límite. El área de la base del polígono también se aproxima al área del círculo y el volumen del prisma se aproxima al del cilindro circular recto. Otra conclusión se enuncia sin demostración en el siguiente teorema.

TEOREMA 9.3.3

El volumen V de un cilindro circular recto con área de la base B y altura de longitud h está dado por $V = Bh$.
Forma alternativa: Donde r es la longitud del radio de la base, el volumen para el cilindro se puede escribir como $V = \pi r^2 h$.

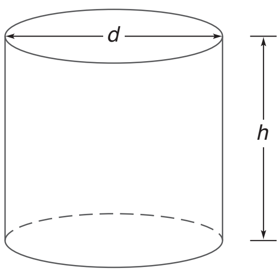


Figura 9.29

EJEMPLO 2

Si $d = 4$ cm y $h = 3.5$ cm, utilice una calculadora para encontrar el volumen aproximado del cilindro circular recto que se muestra en la figura 9.29. Proporcione la respuesta correcta con dos decimales.

Solución $d = 4$, por lo que $r = 2$. Por tanto $V = Bh$ o $V = \pi r^2 h$ será

$$V = \pi \cdot 2^2(3.5)$$
$$= \pi \cdot 4(3.5) = 14\pi \approx 43.98 \text{ cm}^3$$ ■

EJEMPLO 3

En el cilindro circular recto que se muestra en la figura 9.29 suponga que la altura es igual al diámetro de la base circular. Si el volumen exacto es de 128π pulg^3, encuentre el área lateral exacta L del cilindro.

Solución

	$h = 2r$
así	$V = \pi r^2 h$
será	$V = \pi r^2(2r)$
	$V = 2\pi r^3$
Por tanto,	$2\pi r^3 = 128\pi,$
Dividiendo entre 2π,	$r^3 = 64$
	$r = 4$
	$h = 8$ **(de $h = 2r$)**

■

Ahora $\quad L = 2\pi rh$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 8$$
$$= 64\pi \text{ pulg}^2$$

■

La tabla 9.2 debe ayudar a recordar y comparar las fórmulas del área y del volumen que se encuentran en las secciones 9.1 y 9.3.

Ejercicios 6, 7

TABLA 9.2

	Área lateral	**Área total**	**Volumen**
Prisma	$L = hP$	$T = L + 2B$	$V = Bh$
Cilindro	$L = hC$	$T = L + 2B$	$V = Bh$

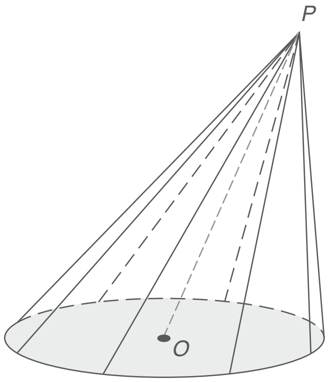


Figura 9.30

CONOS

En la figura 9.30 considere el punto P, que se encuentra fuera del plano que contiene el círculo O. Una superficie conocida como **cono** es la que resulta cuando se *trazan* segmentos de recta desde P hasta los puntos en el círculo. Sin embargo, si P se une a todos los puntos posibles en el círculo al igual que a los puntos en el interior del círculo, se forma un sólido. Si $\overline{PO}$ no es perpendicular al plano del círculo O en la figura 9.30, el cono es un **cono circular oblicuo**.

En las figuras 9.30 y 9.31 el punto P es el **vértice** del cono y el círculo O es la **base**. El segmento $\overline{PO}$, que une el vértice al centro de la base circular, es el **eje** del cono. Si el eje es perpendicular al plano que contiene la base, como en la figura 9.31, el cono es un **cono circular recto**. En cualquier cono el segmento perpendicular del vértice al plano de la base es la **altura** del cono. En un cono circular recto la longitud h de la altura es igual a la longitud del eje. Para un cono circular recto, y sólo para este tipo de cono, cualquier segmento de recta que une el vértice con un punto en el círculo es una **altura inclinada** del cono; se denota la longitud de la altura inclinada con ℓ como se muestra en la figura 9.31.

Ejercicios 8, 9

ÁREA SUPERFICIAL DE UN CONO

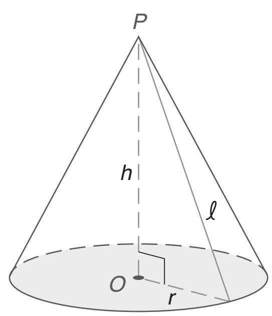


Figura 9.31

Recuerde ahora que el área lateral para una pirámide regular está dada por $L = \frac{1}{2}\ell P$. Para un cono circular recto considere una pirámide regular inscrita, como en la figura 9.32. Conforme el número de lados de la base del polígono inscrito se hace mayor el perímetro del polígono inscrito se aproxima a la circunferencia del círculo como un límite. Además, la altura inclinada de las caras triangulares congruentes se aproxima a la de la altura inclinada del cono. Por tanto, el área lateral del cono circular recto se puede comparar con $L = \frac{1}{2}\ell P$; para el cono se tiene

$$L = \frac{1}{2}\ell C$$

en la cual C es la circunferencia de la base. El hecho de que $C = 2\pi r$ conduce a

$$L = \frac{1}{2}\ell(2\pi r)$$

así $\quad L = \pi r\ell$

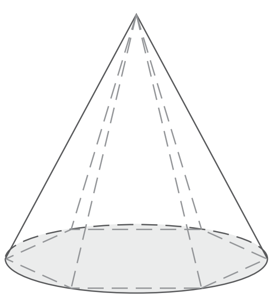


Figura 9.32

TEOREMA 9.3.4

El área lateral L de un cono circular recto con altura inclinada de longitud ℓ y circunferencia C de la base está dada por $L = \frac{1}{2}\ell C$.

Forma alternativa: Donde r es la longitud del radio de la base, $L = \pi r\ell$.

El siguiente teorema se deduce fácilmente y se da sin demostración.

TEOREMA 9.3.5

El área total T de un cono circular recto con área de la base B y área lateral L está dada por $T = B + L$

Forma alternativa: Donde r es la longitud del radio de la base y ℓ es la longitud de la altura inclinada, $T = \pi r^2 + \pi r\ell$.

EJEMPLO 4

Para el cono circular recto en el que $r = 3$ cm y $h = 6$ cm (vea la figura 9.33), encuentre

a) el área lateral L exacta y aproximada.
b) el área total T exacta y aproximada.

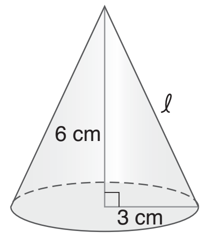


Figura 9.33

Solución

a) Se necesita la longitud de la altura inclinada ℓ para cada parte del problema, por lo que se aplica el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\ell^2 &= r^2 + h^2\\ &= 3^2 + 6^2\\ &= 9 + 36 = 45\\ \ell &= \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5}\\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

Utilizando $L = \pi r\ell$, se tiene

$$\begin{aligned}L &= \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{5}\\ &= 9\pi\sqrt{5} \text{ cm}^2 \approx 63.22 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

b) También se tiene

$$\begin{aligned}T &= B + L\\ &= \pi r^2 + \pi r\ell\\ &= \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{5}\\ &= (9\pi + 9\pi\sqrt{5}) \text{ cm}^2 \approx 91.50 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

■

GEE
Ejercicios 10, 11

El siguiente teorema se demostró en la solución del ejemplo 4.

TEOREMA 9.3.6

En un cono circular recto las longitudes del radio r (de la base), de la altura h y de la altura inclinada ℓ satisfacen el teorema de Pitágoras; esto es, $\ell^2 = r^2 + h^2$ en todo cono circular recto.

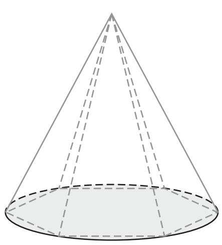


Figura 9.34

VOLUMEN DEL CONO

Recuerde que el volumen de una pirámide está dado por la fórmula $V = \frac{1}{3}Bh$. Considere una pirámide regular inscrita en un cono circular recto. Si su número de lados se incrementa indefinidamente el volumen de la pirámide se aproxima al del cono circular recto

Descubra

Complete esta analogía: El prisma es al cilindro como la pirámide es al_______________.

RESPUESTA

Cono

(vea la figura 9.34). Entonces el volumen del cono circular recto es $V = \frac{1}{3}Bh$. Ya que el área de la base del cono es $B = \pi r^2$, una fórmula alternativa para el volumen del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Se establece este resultado como un teorema.

TEOREMA 9.3.7

El volumen V de un cono circular recto con área de la base B y altura de longitud h está dado por $V = \frac{1}{3}Bh$.
Forma alternativa: Donde r es la longitud del radio de la base, la fórmula para el volumen del cono se escribe, por lo general, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

La tabla 9.3 debe ayudar a recordar y comparar las fórmulas del área y del volumen que se encuentran en las secciones 9.2 y 9.3.

TABLA 9.3

	Área lateral	**Área total**	**Volumen**	**Altura inclinada**
Pirámide	$L = \frac{1}{2}\ell P$	$T = B + L$	$V = \frac{1}{3}Bh$	$\ell^2 = a^2 + h^2$
Cono	$L = \frac{1}{2}\ell C$	$T = B + L$	$V = \frac{1}{3}Bh$	$\ell^2 = r^2 + h^2$

NOTA: Las fórmulas que contienen la altura ℓ inclinada únicamente se utilizan con la pirámide regular y con el cono circular

GEE
Ejercicios 12, 13

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Suponga que parte del límite para una región plana es un segmento de recta. Cuando la región plana se revoluciona alrededor de este segmento de recta al lugar geométrico de puntos generado en el espacio se le llama **sólido de revolución**. La rotación completa de 360° mueve la región alrededor de la arista hasta que regresa a su posición original. A este lado (arista) utilizado se le llama **eje** del sólido de revolución resultante. Considere el ejemplo 5.

EJEMPLO 5

Describa el sólido de revolución que resulta cuando

a) una región rectangular de dimensiones 2 pies por 5 pies se revoluciona alrededor del lado de 5 pies [vea la figura 9.35(a)].
b) una región semicircular de 3 cm de radio se revoluciona alrededor del diámetro que se muestra en la figura 9.35(b).

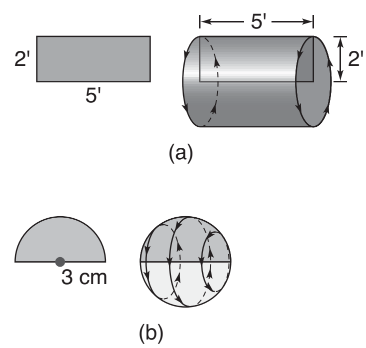


Figura 9.35

Solución

a) En la figura 9.35(a) el rectángulo de la izquierda se revoluciona alrededor del lado de 5 pies para formar el sólido de la derecha. El sólido de revolución generado es un cilindro circular recto que tiene un radio de la base de 2 pies y una altura de 5 pies. ■

b) En la figura 9.35(b) de la página 429 el semicírculo de la izquierda se revoluciona alrededor de su diámetro para formar el sólido de la derecha. El sólido de revolución generado es una *esfera* con un radio de 3 cm de longitud.

NOTA: En la sección 9.4 se estudiará la esfera con mayor detalle. ■

EJEMPLO 6

Determine el volumen exacto del sólido de revolución formado cuando la región delimitada por un triángulo rectángulo con catetos de longitudes de 4 y 6 pulg se revoluciona alrededor del lado de 6 pulg. En la figura 9.36(a) se muestra la región triangular.

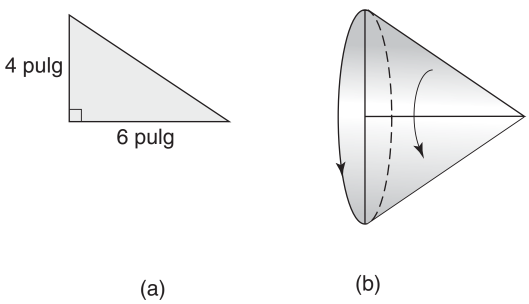


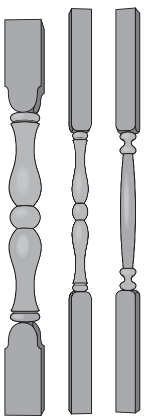
Figura 9.36

Solución Como se muestra en la figura 9.36(b) el sólido resultante es un cono cuya altura mide 6 pulg y cuyo radio de la base mide 4 pulg.

Utilizando $V = \frac{1}{3}Bh$, se tiene

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 32\pi \text{ pulg}^3$$ ■

Geometría en el mundo real



Los ejes de madera torneada son ejemplos de sólidos de revolución. Conforme se rota la pieza de madera, la parte adornada de cada eje es moldeada y suavizada por una máquina (torno para madera).

Puede ser sorprendente que las fórmulas utilizadas para calcular los volúmenes de un cilindro circular oblicuo y un cilindro circular recto sean idénticas. Para ver por qué la fórmula $V = Bh$ o $V = \pi r^2 h$ se puede utilizar para calcular el volumen de un cilindro circular oblicuo, considere las pilas de panqueques que se muestran en las figuras 9.37(a) y 9.37(b). Con cada pila de h unidades de alto, el volumen es el mismo a pesar de que la pila sea vertical u oblicua.

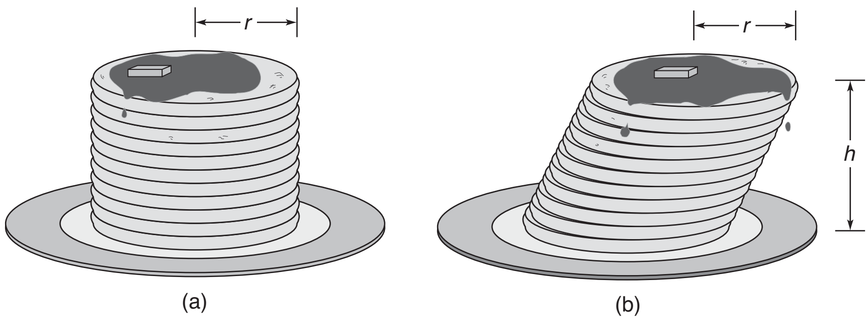


Figura 9.37

Ejercicios 14, 15

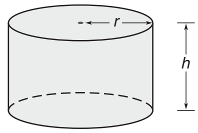
También es verdad que la fórmula para el volumen de un cono circular oblicuo es $V = \frac{1}{3}Bh$ o $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. De hecho, el argumento inspirador que precede al teorema 9.3.7 se repetiría con excepción de que la pirámide inscrita es oblicua.

Ejercicios 9.3

1. Un cilindro circular recto, como una lata de aluminio, puede tener
a) simetría respecto al menos un plano?
b) simetría respecto al menos una recta?
c) simetría respecto a un punto?

2. ¿Un cono circular recto, como el sombrero de un mago, tiene
a) simetría respecto al menos un plano?
b) simetría respecto al menos una recta?
c) simetría respecto a un punto?

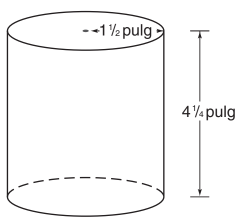
3. Para el cilindro circular recto, suponga que $r = 5$ pulg y $h = 6$ pulg. Encuentre de manera exacta y aproximada el
a) área lateral
b) área total
c) volumen



Ejercicios 3, 4

4. Suponga que $r = 12$ cm y $h = 15$ cm en el cilindro circular recto. Encuentre de manera exacta y aproximada el
a) área lateral
b) área total
c) volumen

5. La lata de estaño que se muestra a la derecha tiene las dimensiones que se indican. Estime el número de pulgadas cuadradas de estaño requeridas para su construcción. *(SUGERENCIA: Incluya la tapa y la base en el resultado.)*



Ejercicios 5, 6

6. ¿Cuál es el volumen de la lata de estaño? Si contiene 16 oz de ejotes, ¿qué volumen de la lata se usa para 20 oz de ejotes? Suponga una proporcionalidad entre el peso y el volumen.

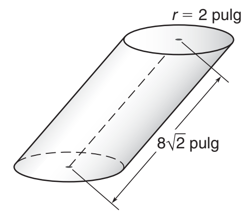
7. Si el volumen exacto de un cilindro circular recto es de 200π cm^3 y su altura mide 8 cm, ¿cuál es la medida del radio de la base circular?

8. Suponga que el volumen de una lata de aluminio puede ser de 9π pulg^3. Encuentre las dimensiones de la lata si el diámetro de la base es tres cuartos de la longitud de la altura.

9. Para una lata de aluminio el área de la superficie lateral es de 127π pulg^2. Si la longitud de la altura es 1 pulg mayor que la longitud del radio de la base circular, encuentre las dimensiones de la lata.

10. Encuentre la altura de un tanque de almacenamiento con la forma de un cilindro circular recto que tiene una circunferencia que mide 6π m y un volumen que mide 81π m^3.

11. Encuentre el volumen del cilindro circular oblicuo. El eje coincide con el plano de la base para formar un ángulo de 45°.



12. Un envase cilíndrico de jugo de naranja tiene bases metálicas de 1 pulg de radio y superficies laterales de cartón de 3 pulg de alto. Si el costo del metal usado es de 0.5 centavos por pulgada cuadrada y el costo del cartón es de 0.2 centavos por pulgada cuadrada, ¿cuál es el costo aproximado de fabricar un envase? Sea $\pi \approx 3.14$.

En los ejercicios 13 al 18 utilice el hecho de que $r^2 + h^2 = \ell^2$ en un cono circular recto (teorema 9.3.6).

13. Encuentre la altura inclinada ℓ de un cono circular recto con $r = 4$ cm y $h = 6$ cm.

14. Encuentre la altura inclinada ℓ de un cono circular recto con $r = 5.2$ pies y $h = 3.9$ pies.

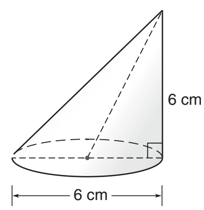
15. Encuentre la altura h de un cono circular recto en el que el diámetro de la base mide $d = 9.6$ m y $\ell = 5.2$ m.

16. Encuentre el radio r de un cono circular recto en el que $h = 6$ yd y $\ell = 8$ yd.

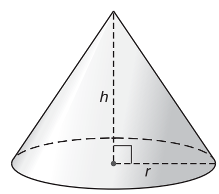
17. Encuentre la altura inclinada ℓ de un cono circular recto con $r = 6$ pulg, longitud de la altura h y $\ell = 2h$ pulg.

18. Encuentre el radio r de un cono circular recto con $\ell = 12$ pulg y $h = 3r$ pulg.

19. El cono circular oblicuo tiene altura y un diámetro de la base que miden 6 cm de longitud. El segmento de recta que une el vértice con el centro de la base es el eje del cono. ¿Cuál es la longitud del eje?



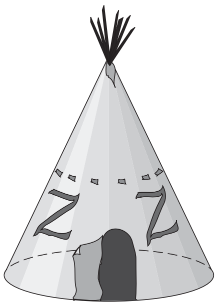
20. Para el cono circular recto adjunto, $h = 6$ m y $r = 4$ m. Encuentre de manera exacta y aproximada el
a) área lateral
b) área total
c) volumen



Ejercicios 20, 21

21. Para el cono circular recto que se muestra en el ejercicio 20, suponga que $h = 7$ pulg y $r = 6$ pulg. Encuentre de manera exacta y aproximada el
a) área lateral
b) área total
c) volumen

22. El tipi tiene un piso circular con un radio igual a 6 pies y una altura de 15 pies. Encuentre el volumen confinado.



23. Un rectángulo tiene dimensiones de 6 por 3 pulg. Encuentre el volumen exacto del sólido de revolución que se forma cuando el rectángulo rota alrededor de su lado de 6 pulg.

24. Un rectángulo tiene dimensiones de 6 por 3 pulg. Encuentre el volumen exacto del sólido de revolución que se forma cuando el rectángulo rota alrededor de su lado de 3 pulg.

25. Un triángulo tiene lados que miden 15, 20 y 25 cm. Encuentre el volumen exacto del sólido de revolución que se forma cuando se revoluciona el triángulo alrededor del lado de 15 cm de longitud.

26. Un triángulo tiene lados que miden 15, 20 y 25 cm. Encuentre el volumen exacto del sólido de revolución que se forma cuando se revoluciona el triángulo alrededor del lado de 20 cm de longitud.

27. Un triángulo tiene lados que miden 15, 20 y 25 cm. Encuentre el volumen exacto del sólido de revolución que se forma cuando se revoluciona el triángulo alrededor del lado de 25 cm de longitud.

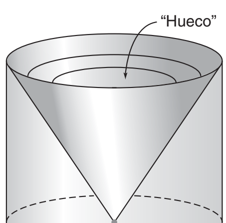
(SUGERENCIA: La altura hasta el lado de 25 cm tiene 12 cm de longitud.)

28. Cuando r es la longitud del radio de una esfera, su volumen está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre el volumen exacto de la esfera que se formó en el ejemplo 5(b).

29. Si un cono circular recto tiene una base circular con un diámetro de 10 cm de longitud y un volumen de 100π cm^3, encuentre su área lateral.

30. Un cono circular recto tiene una altura inclinada de 12 pies y un área lateral de 96π pies^2. Encuentre su volumen.

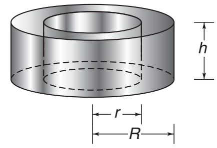
31. Se forma un sólido cortando una sección cónica de un cilindro circular recto. Si el radio mide 6 pulg y la altura mide 8 pulg, ¿cuál es el volumen del sólido resultante?



En los ejercicios 32 y 33 proporcione una demostración en párrafo para cada enunciado.

32. El área total T de un cilindro circular recto cuya altura tiene longitud h y cuya base circular tiene un radio de longitud r está dada por $T = 2\pi r(r + h)$.

33. El volumen V de una rondana que tiene un radio interior de longitud r, un radio exterior de longitud R y una altura de medida h está dado por $V = \pi h(R + r)(R - r)$.



34. Para un cono circular recto la altura inclinada tiene una medida igual al doble del radio de la base. Si el área total del cono es de 48π pulg^2, ¿cuáles son las dimensiones del cono?

35. Para un cono circular recto la razón entre la altura inclinada y el radio es de 5:3. Si el volumen del cono es de 96π pulg^3, encuentre el área lateral del cono.

36. Si el radio y la altura de un cilindro circular recto se duplican para formar un cilindro más grande, ¿cuál es la relación proporcional del volumen del cilindro más grande respecto al volumen del cilindro más pequeño?
(**NOTA:** Se dice que los dos cilindros son "semejantes".)

37. Para los dos cilindros semejantes en el ejercicio 36, ¿cuál es la razón entre el área lateral del cilindro más grande y la del cilindro más pequeño?

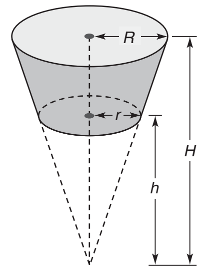
38. Para un cono circular recto las dimensiones son $r = 6$ cm y $h = 8$ cm. Si se duplica el radio mientras la altura se reduce a la mitad de su tamaño en la formación de un nuevo cono, ¿serán iguales los volúmenes de los dos conos?

39. Un tanque de almacenamiento cilíndrico tiene una profundidad de 5 pies y un radio que mide 2 pies. Si cada pie cúbico puede contener 7.5 gal de gasolina, ¿cuál es la capacidad total del tanque (medida en galones)?

40. Si el tanque en el ejercicio 39 necesita pintarse y 1 pinta (1 pinta = 0.473037 litros) de pintura cubre 50 pies^2, ¿cuántas pintas se necesitan para pintar el exterior del tanque de almacenamiento?

41. El tronco de un cono es la parte del cono delimitada entre la base circular y un plano paralelo a la base. Con las dimensiones que se indican, demuestre que el volumen del tronco del cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



En los ejercicios 42 y 43 utilice la fórmula del ejercicio 41. Se emplearon triángulos semejantes para encontrar h y H.

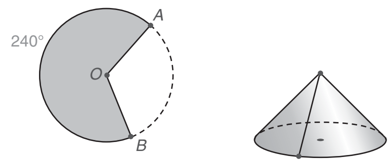
42. Un tubo de margarina tiene la forma del tronco de un cono. Con la base inferior que mide 11 cm de diámetro y la base superior que mide 14 cm de diámetro, el volumen de dicho recipiente de $6\frac{2}{3}$ cm de alto se puede determinar utilizando $R = 7$ cm, $r = 5.5$ cm, $H = 32\frac{2}{3}$ cm y $h = 26$ cm. Encuentre su volumen.

43. Un contenedor de yogur tiene la forma del tronco de un cono. Con la base inferior que mide 6 cm de diámetro y la base superior que mide 8 cm de diámetro, el volumen de dicho envase de 7.5 cm de alto se puede determinar utilizando $R = 4$ cm, $r = 3$ cm, $H = 30$ cm y $h = 22.5$ cm. Encuentre su volumen. (Vea la fórmula en el ejercicio 41.)

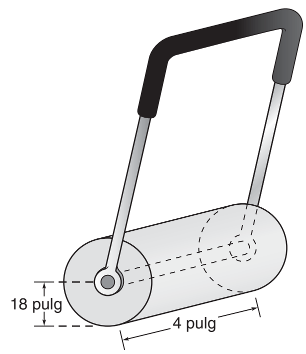
44. Una refinería de petróleo tiene tanques de almacenamiento con la forma de cilindros circulares rectos. Cada tanque tiene una altura de 16 pies y un radio de 10 pies para su base circular. Si 1 pie^3 de volumen contiene 7.5 gal de petróleo, ¿cuál es la capacidad del tanque de combustible en *galones*? Redondee el resultado a la centésima más cercana (de galones).

45. Un granjero tiene un tanque de combustible en la forma de un cilindro circular recto. El tanque tiene una altura de 6 pies y un radio de 1.5 pies para su base circular. Si 1 pie^3 de volumen contiene 7.5 gal de gasolina, ¿cuál es la capacidad del tanque de combustible en *galones*?

46. Cuando los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ se colocan de manera que coincidan, se sella un sector de 240° de un círculo para formar un cono circular recto. Si el radio del círculo mide 6.4 cm, ¿cuál es el área lateral aproximada del cono que se forma? Utilice una calculadora y redondee la respuesta a la *décima* más cercana de una pulgada cuadrada.



47. Una podadora de cilindro con la forma de un cilindro circular recto tiene un radio de 18 pulg y una longitud (altura) de 4 pies. Encuentre el área rodada durante una revolución completa del cilindro. Utilice el valor de π de la calculadora y redondee la respuesta al pie cuadrado más cercano.



9.4 Poliedros y esferas

CONCEPTOS CLAVE

Ángulo diedro
Poliedro (convexo y cóncavo)
Vértices
Aristas y caras
Ecuación de Euler

Poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro)

Esfera (centro, radio, diámetro, gran círculo, hemisferio)
Área superficial y volumen de una esfera

POLIEDROS

Cuando dos planos se intersecan el ángulo formado por los dos planos medios con una arista común (la recta de intersección) es un **ángulo diedro**. El ángulo que se muestra en la figura 9.38 es de esta clase. En la figura 9.38 la medida del ángulo diedro es igual que la del ángulo determinado por dos rayos que:

1. tienen un vértice en la arista.
2. se encuentran en los planos, de manera que son perpendiculares a la arista.

Un **poliedro** es un sólido delimitado por regiones del plano. Los polígonos forman las **caras** del sólido, y los segmentos comunes a esos polígonos son las **aristas** del poliedro. Los puntos extremos de las aristas son los **vértices** del poliedro. Cuando un poliedro es **convexo** cada cara determina un plano para el cual todas las caras restantes se encuentran en el mismo

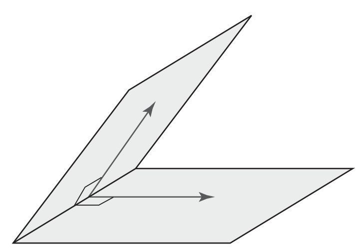
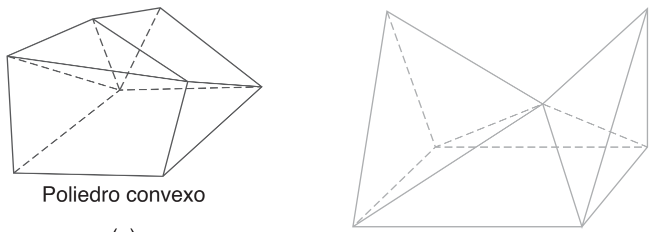


Figura 9.38

lado de dicho plano. La figura 9.39(a) ilustra un poliedro convexo y la figura 9.39(b) ilustra un poliedro **cóncavo**; como se muestra en la figura 9.39(b), un segmento de recta que contiene dos vértices se encuentra en el exterior del poliedro cóncavo.



Poliedro convexo

(a)

Poliedro cóncavo

(b)

Figura 9.39

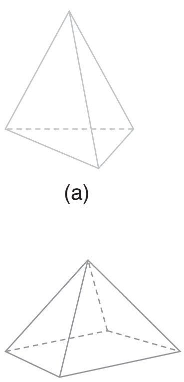
Los prismas y las pirámides que se estudiaron en las secciones 9.1 y 9.2 eran tipos especiales de poliedros. Por ejemplo, una pirámide pentagonal se puede describir como un hexaedro, ya que tiene seis caras. Debido a que algunas de sus superficies no se encuentran en planos, los cilindros y los conos de la sección 9.3 no son poliedros.

Leonhard Euler (Suiza, 1707-1763) encontró que el número de vértices, aristas y caras de un poliedro se relacionan con la **ecuación de Euler**. Esta ecuación se da en el siguiente teorema que se enuncia sin demostración.

TEOREMA 9.4.1 ▶ (Ecuación de Euler)

El número de vértices V, el número de aristas E y el número de caras F de un poliedro están relacionados por la ecuación

$$V + F = E + 2$$



(a)

(b)

Figura 9.40

EJEMPLO 1

Compruebe la ecuación de Euler para (a) el tetraedro y (b) la pirámide cuadrangular que se muestran en la figura 9.40.

Solución

a) El tetraedro tiene cuatro vértices ($V = 4$), seis aristas ($E = 6$) y cuatro caras ($F = 4$), por lo que la ecuación será $4 + 4 = 6 + 2$, que es verdadera.
b) La pirámide tiene cinco vértices (“el vértice” + 4 vértices de la base), ocho aristas (4 aristas de la base + 4 aristas laterales) y cinco caras (4 caras triangulares + 1 base cuadrada). Ahora $V + F = E + 2$ será $5 + 5 = 8 + 2$, que también es verdadera. ■

GEE *Ejercicios 1-5*

POLIEDROS REGULARES

DEFINICIÓN

Un **poliedro regular** es convexo y sus caras son polígonos regulares congruentes acomodados de manera que las caras adyacentes forman ángulos diedros congruentes.

Hay exactamente cinco poliedros regulares que son los siguientes:

1. **Tetraedro** regular, que tiene 4 caras (triángulos equiláteros congruentes)
2. **Hexaedro** regular (o **cubo**), que tiene 6 caras (cuadrados congruentes)
3. **Octaedro** regular, que tiene 8 caras (triángulos equiláteros congruentes)
4. **Dodecaedro** regular, que tiene 12 caras (pentágonos regulares congruentes)
5. **Icosaedro** regular, que tiene 20 caras (triángulos equiláteros congruentes)

En la figura 9.41 se muestran cuatro de los poliedros regulares que existen.

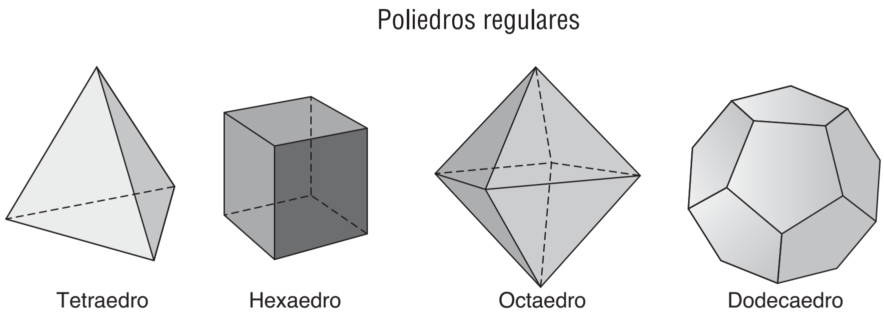
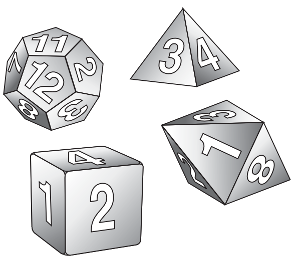


Figura 9.41

Geometría en el mundo real



Los dados poliédricos se usan en numerosos juegos.

Puesto que cada poliedro regular tiene un punto central se dice que cada sólido tiene un centro. Con excepción del tetraedro estos poliedros tienen *punto de simetría* en el centro. Cada sólido también tiene eje de simetría y plano de simetría.

EJEMPLO 2

Considere un dado que es un tetraedro regular con caras numeradas 1, 2, 3 y 4. Suponga que cada cara tiene la misma oportunidad de quedar a la vista, ¿cuál es la posibilidad (probabilidad) de que un lanzamiento produzca (a) un “1”, (b) un resultado mayor que “1”?

Solución

a) Con cuatro resultados igualmente probables (1, 2, 3 y 4), la probabilidad de un “1” es $\frac{1}{4}$.
b) Con cuatro resultados igualmente probables (1, 2, 3 y 4) y tres resultados “favorables” (2, 3 y 4), la probabilidad de lanzar un número mayor que “1” es $\frac{3}{4}$. ■

GEE
Ejercicios 6, 7

ESFERAS

Recuerde

En el capítulo 7 se definió a la esfera como un lugar geométrico

La esfera es otro tipo de sólido con el cual está familiarizado. Aunque la superficie de un balón de basquetbol describe correctamente la esfera, con frecuencia se usa el término *esfera* para referirse también a una pelota de béisbol. La esfera tiene punto de simetría en su centro.

En el espacio la esfera se caracteriza de tres formas:

1. Una **esfera** es el lugar geométrico de todos los puntos a una distancia fija r de un punto dado O. Al punto O se le conoce como **centro** de la esfera, aun cuando no es una parte de la superficie esférica.
2. Una **esfera** es la superficie determinada cuando un círculo (o semicírculo) rota alrededor de su diámetro.
3. Una **esfera** es la superficie que representa el límite teórico de un poliedro regular “inscrito” cuyo número de caras aumenta sin ningún límite.

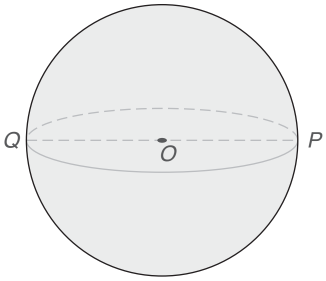


Figura 9.42

NOTA: En la caracterización 3 suponga que el número de caras del poliedro regular pueden aumentar sin límite. En teoría, el poliedro regular resultante parecerá más "esférico" conforme el número de caras aumente sin límite. En realidad, un poliedro regular no puede tener más de 20 caras (icosaedro regular). Cuando se determine la fórmula para su volumen será necesario utilizar esta tercera característica de la esfera.

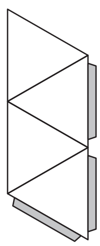
Cada caracterización de la esfera tiene sus ventajas.

▶ *Caracterización 1*

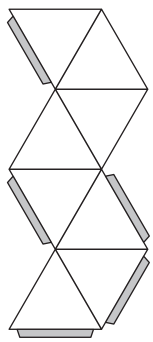
En la figura 9.42 se generó una esfera como el lugar geométrico de los puntos en el espacio a una distancia r del punto O. El segmento de recta $\overline{OP}$ es un **radio** de la esfera O y $\overline{QP}$ es un **diámetro** de la esfera. La intersección de una esfera y de un plano que contiene su centro es un **gran círculo** de la esfera. Para la Tierra, el ecuador es un gran círculo que la separa en dos **hemisferios**.

Descubra

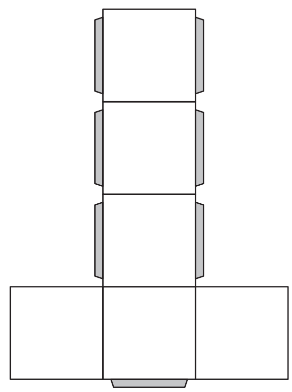
Suponga que usa unas tijeras para recortar cada patrón. (Puede fotocopiar y ampliar esta página.) Después pegue o coloque cinta en las pestañas (áreas sombreadas) para formar los poliedros regulares. ¿Qué poliedro regular se forma con cada patrón?



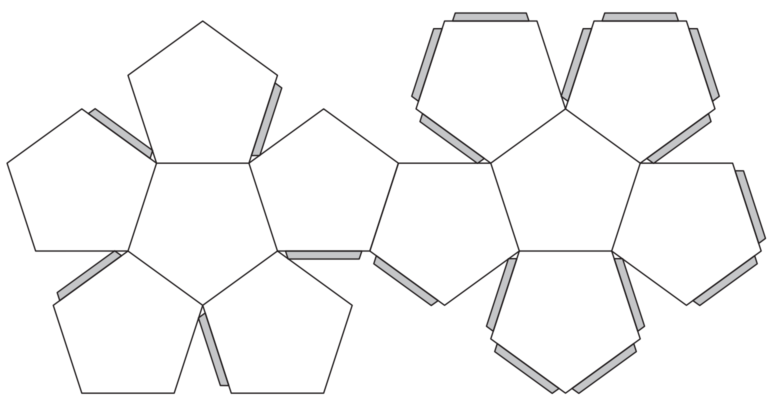
(a)



(b)



(c)



(d)

RESPUESTAS

(a) Tetraedro (b) Octaedro (c) Hexaedro (d) Dodecaedro

ÁREA SUPERFICIAL DE UNA ESFERA

▶ ***Caracterización 2***

El siguiente teorema afirma que el área superficial de una esfera es igual a cuatro veces el área de un gran círculo de la esfera. Este teorema, que se da en cálculo infinitesimal, trata a la esfera como una superficie de revolución.

TEOREMA 9.4.2

El área superficial S de una esfera cuyo radio tiene longitud r está dada por $S = 4\pi r^2$.

Geometría en el mundo real

Las frutas como las naranjas tienen forma de esfera.

EJEMPLO 3

Encuentre el área superficial de una esfera cuyo radio mide $r = 7$ pulg. Utilice su calculadora para aproximar el resultado.

Solución

$$S = 4\pi r^2 \rightarrow S = 4\pi \cdot 7^2 = 196\pi \text{ pulg}^2$$

GEE *Ejercicios 8-10*

Por tanto $S \approx 615.75$ pulg^2. ■

Aunque a la mitad de un círculo se le llama *semicírculo*, a la mitad de una esfera en general se le llama *hemisferio*.

VOLUMEN DE UNA ESFERA

▶ ***Caracterización 3***

La tercera descripción de la esfera permite encontrar su volumen. Para lograr esto se trata a la esfera como el límite teórico de un poliedro regular inscrito, cuyo número de caras n aumenta sin ningún límite. El poliedro se puede separar en n pirámides; el centro de la esfera es el vértice de cada pirámide. Conforme n aumenta, la altura de cada pirámide tiende en longitud al radio de la esfera. Ahora se encuentra la suma de los volúmenes de estas pirámides, el límite del cual es el volumen de la esfera.

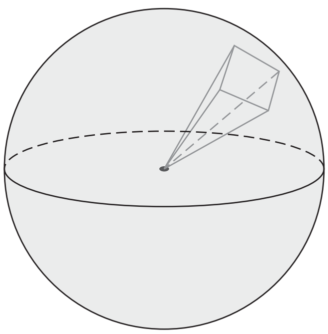


Figura 9.43

En la figura 9.43 se muestra una de las pirámides descritas en el párrafo anterior. Se designa la altura de todas y cada una de las pirámides como h. Donde las áreas de las bases de las pirámides se escriben como B_1, B_2, B_3 y así sucesivamente, la suma de los volúmenes de las n pirámides que forman el poliedro es

$$\frac{1}{3}B_1h + \frac{1}{3}B_2h + \frac{1}{3}B_3h + \cdots + \frac{1}{3}B_nh$$

Ahora se escribe el volumen del poliedro en la forma

$$\frac{1}{3}h(B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n)$$

Conforme n aumenta, $h \rightarrow r$ y $B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n \rightarrow S$, el área superficial de la esfera. Puesto que el área superficial de la esfera es $S = 4\pi r^2$, la suma se aproxima al siguiente límite como el volumen de la esfera:

$$\frac{1}{3}h(B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n) \rightarrow \frac{1}{3}rS \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{3}r \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Descubra

Un silo de un granjero es una forma compuesta. Es decir, en realidad está compuesto de dos sólidos. ¿Cuáles son?

RESPUESTA

Cilindro y hemisferio

El análisis anterior sugiere el siguiente teorema.

TEOREMA 9.4.3

El volumen V de una esfera con un radio de longitud r está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

EJEMPLO 4

Encuentre el volumen exacto de una esfera cuya longitud del radio es de 1.5 pulg.

Solución Este cálculo se puede realizar con mayor facilidad si se reemplaza 1.5 por $\frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\pi\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{3}{2} \\ &= \frac{9\pi}{2}\text{ pulg}^3 \end{aligned}$$

■

Exploración tecnológica

Identifique el método de cálculo de "raíces cúbicas" en su calculadora. Después muestre que $\sqrt[3]{27} = 3$.

EJEMPLO 5

Un tanque de almacenamiento esférico de gas propano tiene un volumen de $\frac{792}{7}$ pies^3. Utilizando $\pi \approx \frac{22}{7}$, encuentre el radio de la esfera.

Solución $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, que se convierte en $\frac{792}{7} = \frac{4}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot r^3$. Entonces $\frac{88}{21}r^3 = \frac{792}{7}$. A su vez,

$$\frac{\cancel{21}}{\cancel{88}}\cdot\frac{\cancel{88}}{\cancel{21}}r^3 = \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{1}{\cancel{88}}}\cdot\frac{\overset{9}{\cancel{792}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \rightarrow r^3 = 27 \rightarrow r = \sqrt[3]{27} \rightarrow r = 3$$

El radio del tanque es igual a 3 pies. ■

Así como dos círculos concéntricos tienen el mismo centro pero radios de diferentes longitudes, dos esferas también pueden ser concéntricas. Este hecho es la base para la solución del siguiente ejemplo.

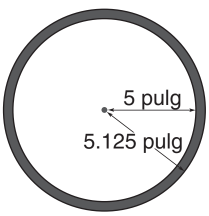


Figura 9.44

EJEMPLO 6

La pelota de plástico hueca de un niño tiene un diámetro de 10 pulg y tiene aproximadamente $\frac{1}{8}$ pulg de grosor (vea la sección transversal de la pelota en la figura 9.44). ¿En forma aproximada, cuántas pulgadas cúbicas de plástico se necesitaron para construir la pelota?

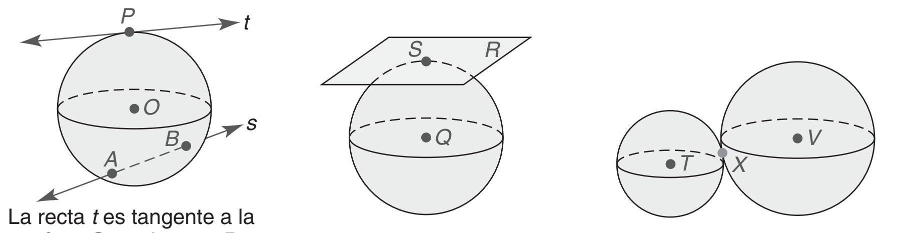
Solución El volumen del plástico utilizado es la diferencia entre el volumen exterior y el volumen interior. Donde R denota la longitud del radio exterior y r denota la longitud del radio interior, $R \approx 5.125$ y $r = 5$.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad \text{por tanto} \qquad V = \frac{4}{3}\pi(5.125)^3 - \frac{4}{3}\pi\cdot 5^3$$

Entonces $\qquad V \approx 563.86 - 523.60 \approx 40.26$

El volumen del plástico utilizado fue de aproximadamente 40.26 pulg^3. ■

Como los círculos, las esferas pueden tener rectas tangentes; sin embargo, las esferas también tienen planos tangentes. Como se muestra en la figura 9.45, también es posible que las esferas sean tangentes entre sí.



La recta t es tangente a la esfera O en el punto P; la recta s es una secante.

(a)

El plano R es tangente a la esfera Q en el punto S.

(b)

Las esferas T y V son tangentes externamente en el punto X.

(c)

Ejercicios 11-13

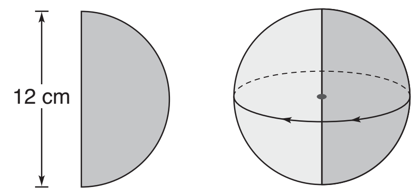
Figura 9.45

MÁS SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

En la sección 9.3 cada sólido de revolución se generó revolucionando una región plana alrededor de un segmento de recta horizontal. También es posible formar un sólido de revolución rotando una región alrededor de un segmento de recta vertical u oblicuo.

EJEMPLO 7

Describa el sólido de revolución que se forma cuando una región semicircular que tiene un diámetro vertical de longitud 12 cm [vea la figura 9.46(a)] rota alrededor de tal diámetro. Después encuentre el volumen exacto del sólido formado [vea la figura 9.46(b)].

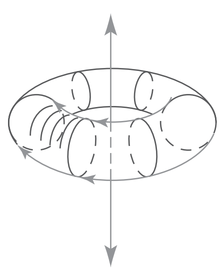


(a) (b)

Figura 9.46

Solución El sólido que se forma es una esfera con longitud de radio $r = 6$ cm. La fórmula que se usa para encontrar el volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Entonces $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3$ que se simplifica a $V = 288\pi$ cm^3. ■

Cuando una región circular gira alrededor de una recta en el exterior del círculo, resulta un sólido en forma de rosquilla. El nombre formal del sólido de revolución resultante que se muestra en la figura 9.47 es *toroide*. Se necesitan métodos de cálculo infinitesimal para calcular tanto el área superficial como el volumen del toroide.

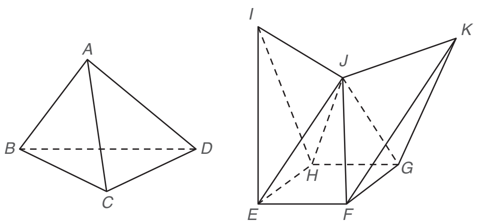


Ejercicios 14-16

Figura 9.47

Ejercicios 9.4

1. ¿Cuál de estos dos poliedros es cóncavo? Observe que el ángulo diedro interior formado por los planos que contienen a $\triangle EJF$ y $\triangle KJF$ es mayor que 180°.



(a) (b)

2. Para la figura (a) del ejercicio 1 encuentre el número de caras, vértices y aristas en el poliedro. Después compruebe la ecuación de Euler para ese poliedro.

3. Para la figura (b) del ejercicio 1 encuentre el número de caras, vértices y aristas en el poliedro. Después compruebe la ecuación de Euler para ese poliedro.

4. Para un tetraedro regular encuentre el número de caras, vértices y aristas en el poliedro. Después compruebe la ecuación de Euler para ese poliedro.

5. Para un hexaedro regular encuentre el número de caras, vértices y aristas en el poliedro. Después compruebe la ecuación de Euler para ese poliedro.

6. Un poliedro regular tiene 12 aristas y 8 vértices.
a) Utilice la ecuación de Euler para encontrar el número de caras.
b) Utilice el resultado del inciso (a) para nombrar el poliedro regular.

7. Un poliedro regular tiene 12 aristas y 6 vértices.
a) Utilice la ecuación de Euler para encontrar el número de caras.
b) Utilice el resultado del inciso (a) para nombrar el poliedro regular.

8. Un poliedro (irregular) tiene 10 vértices y 7 caras. ¿Cuántas aristas tiene?

9. Un poliedro (irregular) tiene 14 vértices y 21 aristas. ¿Cuántas caras debe tener?

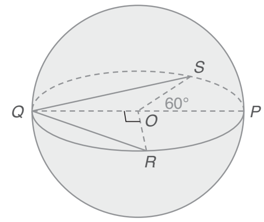
En los ejercicios 10 al 12 la probabilidad es la relación proporcional $\frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}$. *Utilice como guía el ejemplo 2 de esta sección.*

10. Suponga que lanza al aire un dado de la forma más común, un hexaedro. ¿Cuál es la probabilidad de que
a) caiga un "2"?
b) caiga un numero par?
c) el resultado sea mayor que 2?

11. Suponga que lanza al aire un dado con forma de dodecaedro. ¿Cuál es la probabilidad de que
a) caiga un número par?
b) caiga un número primo (2, 3, 5, 7 u 11)?
c) el resultado sea mayor que 2?

12. Suponga que lanza al aire un dado con la forma de un icosaedro. ¿Cuál es la probabilidad de que
a) caiga un número impar?
b) caiga un número primo (2, 3, 5, 7, 11,13, 17 o 19)?
c) el resultado sea mayor que 2?

13. En la esfera O, la longitud del radio $\overline{OP}$ mide 6 pulg. Encuentre la longitud de la cuerda:
a) $\overline{QR}$ si m$\angle QOR = 90°$
b) $\overline{QS}$ si m$\angle SOP = 60°$



Ejercicios 13, 14

14. Encuentre el área superficial y el volumen aproximados de la esfera si $OP = 6$ pulg. Utilice su calculadora.

15. Encuentre el área total (área superficial) de un octaedro regular si el área de cada cara mide 5.5 pulg^2.

16. Encuentre el área total (área superficial) de un dodecaedro regular (12 caras) si el área de cada cara mide 6.4 cm^2.

17. Encuentre el área total (área superficial) de un hexaedro regular si cada arista tiene una longitud de 4.2 cm.

18. Encuentre el área total (área superficial) de un tetraedro regular si cada arista tiene una longitud de 6 pulg.

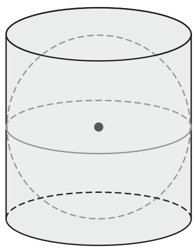
19. El área total (área superficial) de un hexaedro regular es 105.84 m^2. Encuentre
a) el área de cada cara.
b) la longitud de cada arista.

20. El área total (área superficial) de un octaedro regular mide $32\sqrt{3}$ pies^2. Encuentre
a) el área de cada cara.
b) la longitud de cada arista.

21. La superficie de un balón de futbol se compone de 12 pentágonos regulares y 20 hexágonos regulares. Con cada lado de cada polígono regular midiendo 4.5 cm, el área de cada pentágono regular es de 34.9 cm^2 y el área de cada hexágono regular es de 52.5 cm^2.
a) ¿Cuál es el área de superficie del balón de futbol?
b) Si el material utilizado para fabricar el balón cuesta 0.6 centavos por centímetro cuadrado, ¿cuál es el costo de los materiales empleados en la fabricación?

22. Se forma un calendario utilizando una de las 12 caras de un dodecaedro regular para cada mes del año. Si cada lado de la cara pentagonal regular mide 4 cm, el área de cada cara es aproximadamente de 27.5 cm^2.
a) ¿Cuál es el área superficial total del calendario?
b) Si el material empleado para fabricar el calendario cuesta 0.8 centavos por centímetro cuadrado, ¿cuál es el costo de los materiales que se usaron en su fabricación?

23. Una esfera está inscrita dentro de un cilindro circular recto cuya altura y diámetro tienen medidas iguales.
a) Encuentre la razón entre el área superficial del cilindro y la de la esfera.
b) Encuentre la razón entre el volumen del cilindro y el de la esfera.

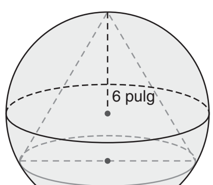


24. Dado que un cilindro circular recto está inscrito dentro de una esfera, ¿cuál es el menor volumen posible del cilindro? *(SUGERENCIA: Considere varias longitudes para el radio y la altura.)*

25. Con cálculo infinitesimal se puede demostrar que el mayor volumen posible para el cilindro circular recto del ejercicio 24 ocurre cuando su altura tiene una longitud igual al diámetro de la base circular. Encuentre la longitud del radio y la altura del cilindro de mayor volumen si el radio de la esfera mide 6 pulg.

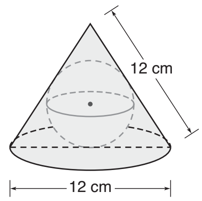
26. Dado un poliedro *regular* de *n* caras que está inscrito en una esfera de 6 pulg de radio, encuentre el volumen máximo posible para el poliedro.

27. Un cono circular recto está inscrito en una esfera. Si la altura inclinada del cono tiene una longitud igual a la de su diámetro, encuentre la longitud
a) del radio de la base del cono.
b) de la altura del cono.



El radio de la esfera tiene una longitud de 6 pulg.

28. Una esfera está inscrita en un cono circular recto cuya altura inclinada tiene una longitud igual al diámetro de su base. ¿Cuál es la longitud del radio de la esfera si la altura inclinada y el diámetro del cono miden 12 cm?



En los ejercicios 29 y 30 utilice el valor de π de la calculadora.

29. Para una esfera cuyo radio tiene 3 m de longitud, encuentre valores aproximados
a) del área superficial.
b) del volumen.

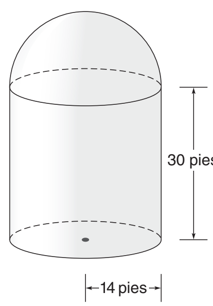
30. Para una esfera cuyo radio tiene 7 cm de longitud, encuentre los valores aproximados
a) del área superficial.
b) del volumen.

31. Una esfera tiene un volumen igual a $\frac{99}{7}$ $pulg^3$. Determine la longitud del radio de la esfera. $\left(\text{Sea } \pi \approx \frac{22}{7}.\right)$

32. Una esfera tiene un área superficial igual a 154 $pulg^2$. Determine la longitud del radio de la esfera. $\left(\text{Sea } \pi \approx \frac{22}{7}.\right)$

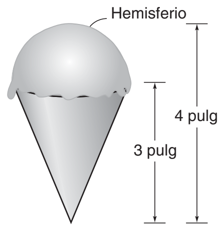
33. El tanque esférico de almacenamiento descrito en el ejemplo 5 tiene un radio de 3 pies de longitud. Debido a que se necesita pintar el tanque, es necesario encontrar su área superficial. También determine el número de pintas de pintura a prueba de corrosión necesarias para pintar el tanque si 1 pinta cubre aproximadamente 40 $pies^2$. Utilice su calculadora.

34. Un observatorio tiene la forma de un cilindro circular recto coronado por un hemisferio. Si el radio del cilindro mide 14 pies y su altura mide 30 pies, ¿cuál es el área superficial del observatorio? Si 1 gal de pintura cubre 300 $pies^2$, ¿cuántos galones se necesitan para pintar la superficie si se requieren dos capas? Utilice su calculadora.



35. Un balón de futbol de cuero tiene un diámetro interior de 9.5 pulg y un grosor de 0.1 pulg. Encuentre el volumen de cuero necesario para su fabricación. Utilice su calculadora.

36. Se llena un cono con helado como se muestra. ¿Cuál es el volumen del helado? Utilice su calculadora.



Para los ejercicios 37 al 42 haga esquemas cuando sea necesario.

37. ¿Pueden dos esferas
a) ser tangentes internamente?
b) no tener puntos en común?

38. Si dos esferas se intersecan en más de un punto, ¿qué tipo de figura geométrica se determina por su intersección?

39. Dos planos son tangentes a una esfera en los puntos extremos de un diámetro. ¿Cómo se relacionan los planos?

40. El plano R es tangente a la esfera O en el punto T. ¿Cómo están relacionados el radio $\overline{OT}$ y el plano R?

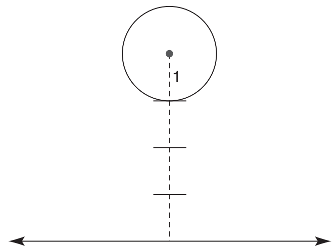
41. Se trazan dos segmentos tangentes a la esfera Q desde el punto externo E. Si A y B son los puntos de tangencia en la esfera Q, ¿cómo están relacionados $\overline{EA}$ y $\overline{EB}$?

42. ¿Cuántos planos tangentes comunes tienen dos esferas tangentes externamente?

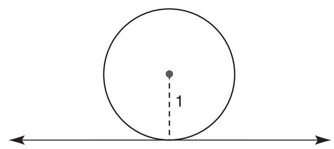
43. Suponga que una región semicircular con un diámetro vertical de longitud 6 rota alrededor de ese diámetro. Determine el área superficial exacta y el volumen exacto del sólido de revolución resultante.

44. Suponga que una región semicircular con un diámetro vertical de longitud 4 rota alrededor de ese diámetro. Determine el área superficial exacta y el volumen exacto del sólido de revolución resultante.

45. Represente el toroide que resulta cuando el círculo de radio 1 se revoluciona alrededor de la recta horizontal que se encuentra 4 unidades debajo del centro de ese círculo.



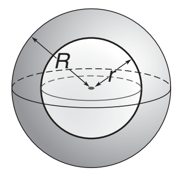
46. Dibuje el sólido que se produce cuando el círculo dado de radio 1 se hace girar alrededor de la recta horizontal que se encuentra 1 unidad por debajo del centro de ese círculo.



47. Explique cómo se obtiene la siguiente fórmula utilizada en el ejemplo 6:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

48. Deduzca una fórmula para el área superficial total de la esfera hueca. (**NOTA:** Incluya las áreas del interior y del exterior.)



PERSPECTIVA HISTÓRICA

Bosquejo de René Descartes

René Descartes nació en Tours, Francia, el 31 de marzo de 1596 y murió en Estocolmo, Suecia, el 11 de febrero de 1650. Fue contemporáneo de Galileo, el científico italiano responsable de varios descubrimientos de la ciencia de la dinámica. También fue amigo del matemático francés Marin Mersenne (números de Mersenne) y de Blaise Pascal (triángulo de Pascal).

De niño Descartes no gozaba de buena salud la mayor parte del tiempo. Debido a que durante sus padecimientos pasaba gran parte del día en cama leyendo, se volvió un joven bien educado. Cuando creció y su salud mejoró se unió a la armada francesa. Fue durante esa época como soldado que tuvo tres sueños que influyeron de gran manera su futuro. Los sueños, que datan del 10 de noviembre de 1619, moldearon su filosofía y le permitieron establecer las bases para sus descubrimientos en matemáticas.

Descartes renunció a su comisión con la armada en 1621 con lo cual pudo dedicar su vida al estudio de la filosofía, la ciencia y las matemáticas. En los años siguientes se convirtió en un filósofo y matemático altamente reconocido y fue invitado a los centros de aprendizaje de Francia, Holanda y Suecia.

Descartes trabajó en matemáticas, en las que usaba un sistema coordenado oblicuo como medio para representar puntos, lo que llevó al nacimiento de la geometría analítica. A la larga su convención para localizar puntos fue reemplazada por un sistema coordenado con ejes perpendiculares. En este sistema era posible representar las ecuaciones algebraicas con figuras geométricas; de manera subsecuente, muchas propiedades que se conjeturaron por medio de estas figuras se pudieron establecer mediante demostración algebraica (analítica). El sistema coordenado rectangular (al cual se le llama sistema cartesiano en honor a Descartes) también se puede emplear para localizar los puntos de intersección de figuras geométricas como rectas y círculos. En el capítulo 10 la mayor parte del material depende de su trabajo.

Por lo general, la frase *secciones cónicas* se refiere a cuatro figuras geométricas: el **círculo**, la **parábola**, la **elipse** y la **hipérbola**. En la figura 9.48 se muestran estas figuras de manera individual y también en relación con los mantos superior e inferior de un cono. Las secciones cónicas se forman cuando un plano interseca los mantos de un cono.

Otros trabajos matemáticos de Descartes están dedicados al estudio de las rectas tangentes a curvas. En la figura 9.49 se ilustra el concepto de una tangente a una curva; este concepto es la base para la rama de las matemáticas conocida como **cálculo diferencial**.

Las últimas contribuciones a las matemáticas de Descartes implicaban su estandarización del uso de varios símbolos. Por mencionar unos cuantos, Descartes utilizaba (1) a^2 en vez de aa y a^3 en vez de aaa; (2) ab para indicar multiplicación; y (3) a, b y c como constantes y x, y y z como variables.

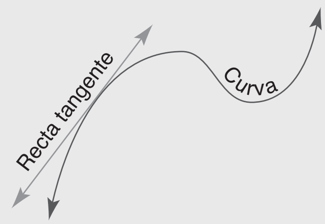


Figura 9.49

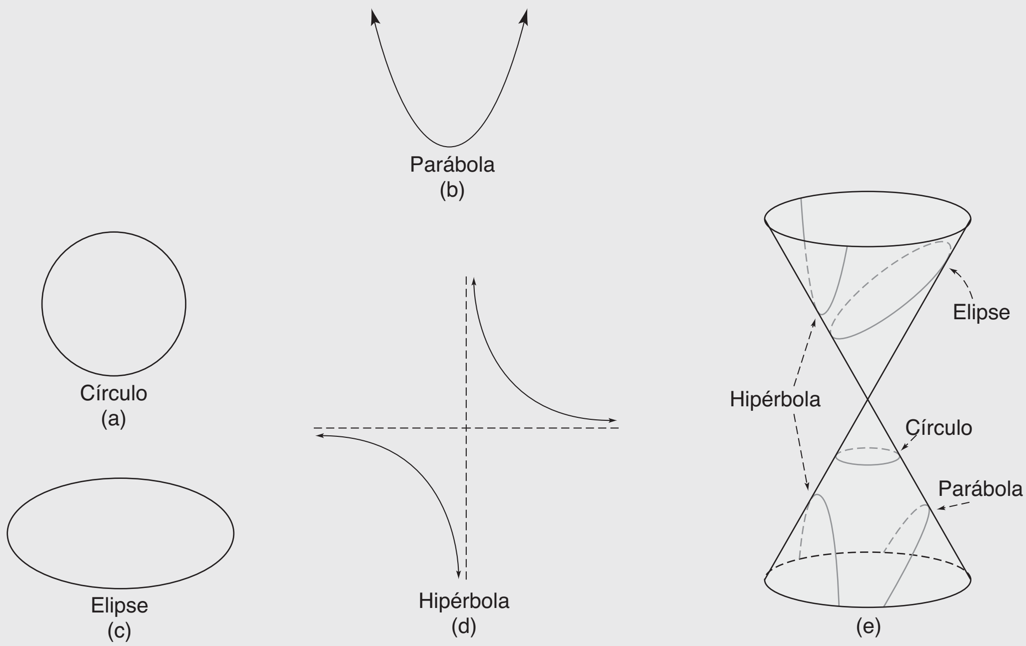


Figura 9.48

PERSPECTIVA DE APLICACIÓN

Aves en vuelo

La siguiente aplicación de la geometría no es práctica pero sí es clásica.

Dos aves han sido atraídas a los comederos para pájaros en la parte superior de postes verticales. Las bases de esos postes donde se localizan las perchas están separadas por 20 pies. Los postes miden 10 y 16 pies de alto cada uno. Vea la figura 9.50. Cada ave ve las semillas que han caído al suelo en la base del otro poste. Dejando sus perchas, las aves vuelan en una trayectoria de línea recta hacia su objetivo. Evitando una colisión en el vuelo, las aves siguen trayectorias que se cruzan en un punto común X. ¿A qué altura está el punto sobre el nivel del suelo?

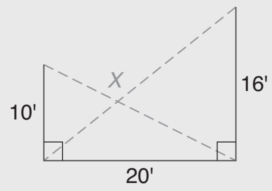


Figura 9.50

A continuación se presenta la solución al problema. Sin embargo, se vuelve a trazar la figura para indicar que la distancia de 20 pies entre los postes se separa a lo largo del suelo en segmentos de recta con longitudes a y $20 — a$ como se muestra. Vea las figuras 9.51(a), 9.51(b) y 9.51(c).

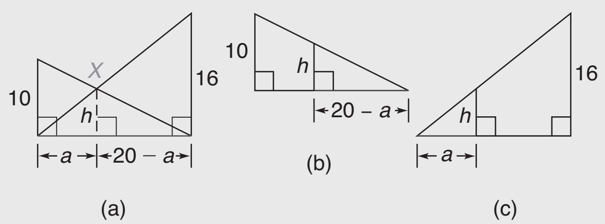


Figura 9.51

De las figuras 9.51(b) y 9.51(c) se plantean las siguientes ecuaciones basadas en la semejanza de los triángulos rectángulos.

$$\frac{10}{20} = \frac{h}{20 - a} \quad \text{y} \quad \frac{16}{20} = \frac{h}{a}$$

Por la propiedad medios-extremos de las proporciones, $10(20 - a) = 20h$ y $16a = 20h$. Por sustitución,

$$\begin{aligned} 10(20 - a) &= 16a \\ 200 - 10a &= 16a \\ 26a &= 200 \\ a = \frac{200}{26} \quad \text{o} \quad a &= \frac{100}{13} \end{aligned}$$

Del hecho de que $16a = 20h$, se tiene que

$$16 \cdot \frac{100}{13} = 20h$$

por lo que $h = \frac{1}{\cancel{20}_{1}} \cdot 16 \cdot \frac{\cancel{100}^{5}}{13} = \frac{80}{13} = 6\frac{2}{13}$ pies

El punto en el cual los vuelos de las aves se cruzaron está a $6\frac{2}{13}$ pies sobre el suelo.

Resumen

UNA VISTA RETROSPECTIVA AL CAPÍTULO 9

El objetivo en este capítulo fue tratar con un tipo de geometría conocida como geometría de sólidos. Se encontraron fórmulas para el área lateral, el área total (área superficial) y el volumen de prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas. Algunas de las fórmulas usadas en este capítulo emplean el concepto de "límite". Se introdujeron los poliedros regulares.

UNA VISTA PRELIMINAR DEL CAPÍTULO 10

El enfoque en el siguiente capítulo es la geometría analítica (o coordenada). Este tipo de geometría relaciona el álgebra y la geometría. Se desarrollarán las fórmulas para el punto medio de un segmento de recta, para la longitud de un segmento de recta y para la pendiente de una recta. No sólo se graficarán las ecuaciones de rectas sino que también se determinarán ecuaciones para rectas dadas. Se verá que las pruebas de varios teoremas se pueden completar utilizando geometría analítica.

CONCEPTOS CLAVE

9.1
Prismas (rectos y oblicuos) • Bases • Altura • Vértices • Aristas • Caras • Área lateral • Área total (superficial) • Volumen • Prisma regular • Cubo • Unidad cúbica

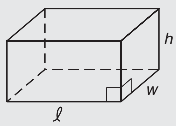
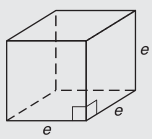
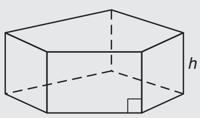
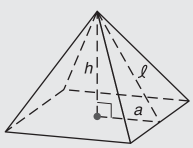
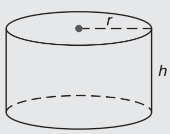
9.2
Pirámide • Base • Altura • Vértices • Aristas • Caras • Vértice de una pirámide • Pirámide regular • Altura inclinada de una pirámide regular • Área lateral • Área total (superficial) • Volumen

9.3
Cilindros (rectos y oblicuos) • Bases y altura de un cilindro • Eje de un cilindro • Conos (rectos y oblicuos) • Base y altura de un cono • Vértice y altura inclinada de un cono • Eje de un cono • Área lateral • Área total • Volumen • Sólido de revolución • Eje de un sólido de revolución

9.4
Ángulo diedro • Poliedro (convexo y cóncavo) • Vértices • Aristas y caras • Ecuación de Euler • Poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro) • Esfera (centro, radio, diámetro, gran círculo, hemisferio) • Área superficial y volumen de una esfera

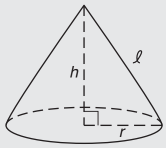
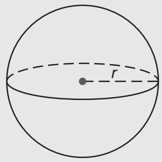
TABLA 9.4 Una vista general del capítulo 9

▶ Relaciones de volumen y área para sólidos

SÓLIDO	FIGURA	VOLUMEN	ÁREA
Prisma rectangular (caja)		$V = \ell wh$	$T = 2\ell w + 2\ell h + 2wh$
Cubo		$V = e^3$	$T = 6e^2$
Prisma (prisma recto que se muestra)		$V = Bh$ (B = área de la base)	$L = hP$ (P = perímetro de la base) $T = L + 2B$
Pirámide regular (con altura inclinada ℓ)		$V = \frac{1}{3}Bh$ (B = área de la base)	$L = \frac{1}{2}\ell P$ (P = perímetro de la base) $T = L + B$ **NOTA:** $\ell^2 = a^2 + h^2$
Cilindro circular recto		$V = Bh$ o $V = \pi r^2 h$	$L = 2\pi rh$ $T = L + 2B$ o $T = 2\pi rh + 2\pi r^2$

(continúa)

TABLA 9.4 *(continuación)*

▶ Relaciones de volumen y área para sólidos			
SÓLIDO	FIGURA	VOLUMEN	ÁREA
Cono circular recto (con altura inclinada ℓ)		$V = \frac{1}{3}Bh$ o $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$L = \pi r\ell$; $T = L + B$ o $T = \pi r\ell + \pi r^2$ **NOTA:** $\ell^2 = r^2 + h^2$
Esfera		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$S = 4\pi r^2$

▶▶ Capítulo 9 EJERCICIOS DE REPASO

1. Cada lado de la base de un prisma octogonal recto mide 7 pulg de largo. La altura del prisma mide 12 pulg. Encuentre el área lateral.

2. La base de un prisma recto es un triángulo cuyos lados miden 7, 8 y 12 cm. La altura del prisma mide 11 cm. Calcule el área lateral del prisma recto.

3. La altura de una caja cuadrada es 2 pulg más larga que tres veces la longitud de un lado de la base. Si el área lateral es de 480 pulg^2, encuentre las dimensiones y el volumen de la caja.

4. La base de un prisma recto es un rectángulo cuya longitud mide 3 cm más que su ancho. Si la altura del prisma es de 12 cm y el área lateral es de 360 cm^2, encuentre el área total y el volumen del prisma.

5. La base de un prisma recto es un triángulo cuyos lados tienen longitudes de 9, 15 y 12 pulg. La altura del prisma mide 10 pulg. Encuentre el
a) área lateral. b) área total. c) volumen.

6. La base de un prisma recto es un hexágono regular cuyos lados miden 8 cm de longitud. La altura del prisma es de 13 cm. Encuentre el
a) área lateral. b) área total. c) volumen.

7. Una pirámide cuadrangular regular tiene una base cuyos lados miden 10 cm de longitud. La altura de la pirámide mide 8 cm. Encuentre la longitud de la altura inclinada.

8. Una pirámide hexagonal regular tiene una base cuyos lados miden $6\sqrt{3}$ pulg de longitud. Si la altura inclinada es de 12 pulg, encuentre la longitud de la altura de la pirámide.

9. El radio de la base de un cono circular recto mide 5 pulg. Si la altura del cono mide 7 pulg, ¿cuál es la longitud de la altura inclinada?

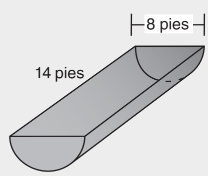
10. El diámetro de la base de un cono circular recto es igual en longitud a la altura inclinada. Si la altura del cono mide 6 cm, encuentre la longitud del radio de la base.

11. La altura inclinada de una pirámide cuadrangular regular mide 15 pulg. Un lado de la base mide 18 pulg. Encuentre el
a) área lateral. b) área total. c) volumen.

12. La base de una pirámide regular es un triángulo equilátero cuyos lados miden 12 cm. La altura de la pirámide es de 8 cm. Encuentre los valores exacto y aproximado del
a) área lateral. b) área total. c) volumen.

13. El radio de la base de un cilindro circular recto mide 6 pulg. La altura del cilindro es de 10 pulg. Encuentre el valor exacto del
a) área lateral. b) área total. c) volumen.

14. a) Para el pesebre en la forma de medio cilindro, encuentre el volumen de agua que contendrá. (Utilice $\pi \approx 3.14$ y no considere el grosor.)
b) Si el pesebre se pinta por dentro y por fuera, encuentre el número de pies cuadrados a pintarse. (Utilice $\pi = 3.14$.)



15. La altura inclinada de un cono circular recto es de 12 cm. El

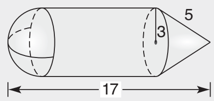
ángulo formado por la altura inclinada y la altura es de 30°. Encuentre los valores exacto y aproximado del
a) área lateral. b) área total. c) volumen.

16. El volumen de un cono circular recto es de 96π pulg^3. Si el radio de la base mide 6 pulg, encuentre la longitud de la altura inclinada.

17. Encuentre el área superficial de una esfera si el radio tiene 7 pulg de longitud. Utilice $\pi \approx \frac{22}{7}$.

18. Encuentre el volumen de una esfera si el diámetro tiene una longitud de 12 cm. Utilice $\pi \approx 3.14$.

19. El sólido que se muestra consiste en un hemisferio (mitad de una esfera), un cilindro y un cono. Encuentre el volumen exacto del sólido.



20. Si el radio de una esfera mide el triple de largo que el radio de otra esfera, ¿cómo son las áreas superficiales de las esferas comparadas entre sí? ¿Cómo se comparan los volúmenes?

21. Encuentre el volumen del sólido de revolución que resulta cuando un triángulo rectángulo con catetos de longitudes de 5 y 7 pulg rota alrededor del cateto de 7 pulg. Utilice $\pi \approx \frac{22}{7}$.

22. Encuentre el volumen exacto del sólido de revolución que resulta cuando una región rectangular con dimensiones de 6 y 8 cm rota alrededor de un lado de longitud 8 cm.

23. Encuentre el volumen exacto del sólido de revolución que resulta cuando una región semicircular con diámetro de 4 pulg de longitud rota alrededor de ese diámetro.

24. Una tubería de plástico mide 3 pies de largo y tiene un radio interior de 4 pulg y un radio exterior de 5 pulg. ¿Cuántas pulgadas cúbicas de plástico hay en la tubería? (Utilice $\pi \approx 3.14$.)

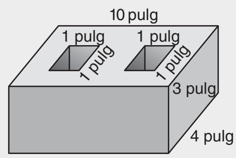
25. Una esfera con un diámetro de 14 pulg está inscrita en un hexaedro. Encuentre el volumen exacto del espacio dentro del hexaedro pero fuera de la esfera.

26. a) Un octaedro tiene ______ caras que son ______.
b) Un tetraedro tiene ______ caras que son ______.
c) Un dodecaedro tiene ______ caras que son ______.

27. Una compañía fabricante de medicamentos quiere fabricar una cápsula que contenga una píldora esférica dentro. El diámetro de la píldora mide 4 mm y la cápsula es cilíndrica con hemisferios en ambos extremos. La longitud de la cápsula entre los dos hemisferios mide 10 mm. ¿Cuál es el volumen exacto que contendrá la cápsula sin incluir el volumen de la píldora?

28. Para cada uno de los siguientes sólidos compruebe la ecuación de Euler determinando *V*, el número de vértices; *E*, el número de aristas; y *F*, el número de caras.
a) Prisma octagonal recto
b) Tetraedro
c) Octaedro

29. Encuentre el volumen de cemento que se usó en el bloque que se muestra.



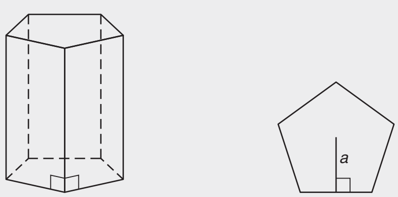
30. Para un dado en la forma de un octaedro regular, encuentre la probabilidad de que un lanzamiento produzca como resultado
a) un número par.
b) 4 o más.

31. Encuentre el área superficial total de
a) un dodecaedro regular si cada cara tiene un área de 6.5 pulg^2.
b) un tetraedro regular si cada arista mide 4 cm.

32. Tres esferas son tangentes entre sí en pares. Tienen radios de 1, 2 y 3 pulg, respectivamente. ¿Qué tipo de triángulo se forma con las rectas del centro?

Capítulo 9 EXAMEN

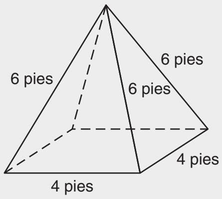
1. Para el prisma pentagonal regular que se muestra abajo encuentre el número total de:
a) aristas_____ b) caras_____



Ejercicios 1, 2

2. Para la base pentagonal regular cada arista mide 3.2 cm y la apotema mide 2 cm.
a) Encuentre el área de la base (utilice $A = \frac{1}{2}aP$)______
b) Encuentre el área total del prisma pentagonal regular si la altura mide 5 cm.________
c) Encuentre el volumen del prisma.________

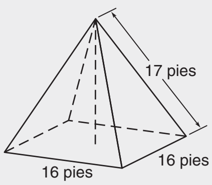
3. Para la pirámide cuadrangular regular que se muestra encuentre el número total de:
a) vértices. _______ b) caras laterales. _______



Ejercicios 3, 4

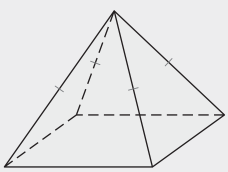
4. Para la pirámide cuadrangular regular que se muestra arriba encuentre
a) el área lateral. _______
b) el área total. _______

5. Para la pirámide cuadrangular regular que se muestra encuentre la altura inclinada. _______



6. Encuentre la altura de una pirámide cuadrangular regular (que no se muestra) si cada arista de la base mide 8 pulg y la altura inclinada de la pirámide mide 5 pulg. _______

7. Encuentre el volumen de la pirámide cuadrangular regular que se muestra si cada arista de la base mide 5 pies y la altura mide 6 pies. _______

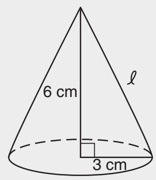


8. Determine si el enunciado es verdadero o falso.
a) Un cono circular recto tiene exactamente dos bases. ________
b) El área lateral L de un cilindro circular recto con radio de la base r y altura h está dada por $L = 2\pi rh$. _________

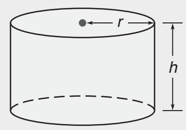
9. Determine si el enunciado es verdadero o falso.
a) El volumen de un cono circular recto está dado por $V = \frac{1}{3}Bh$, que también se puede expresar en la forma $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. _______
b) Un dodecaedro regular tiene exactamente 12 caras. _______

10. Recuerde la fórmula de Euler, $V + F = E + 2$. Cierto poliedro tiene ocho caras y seis vértices. ¿Cuántas aristas tiene? _______

11. Encuentre la altura inclinada del cono circular recto a la derecha. Deje la respuesta en forma radical simplificada. _______



12. Para el cilindro circular recto que se muestra $r = 4$ cm y $h = 6$ cm. Encuentre el valor exacto del
a) área lateral. _______
b) volumen. _______



13. El volumen exacto de un cono circular recto (que no se muestra) es de 32π pulg^3. Si la longitud del radio de la base mide 4 pulg, encuentre la longitud de la altura del cono. _______

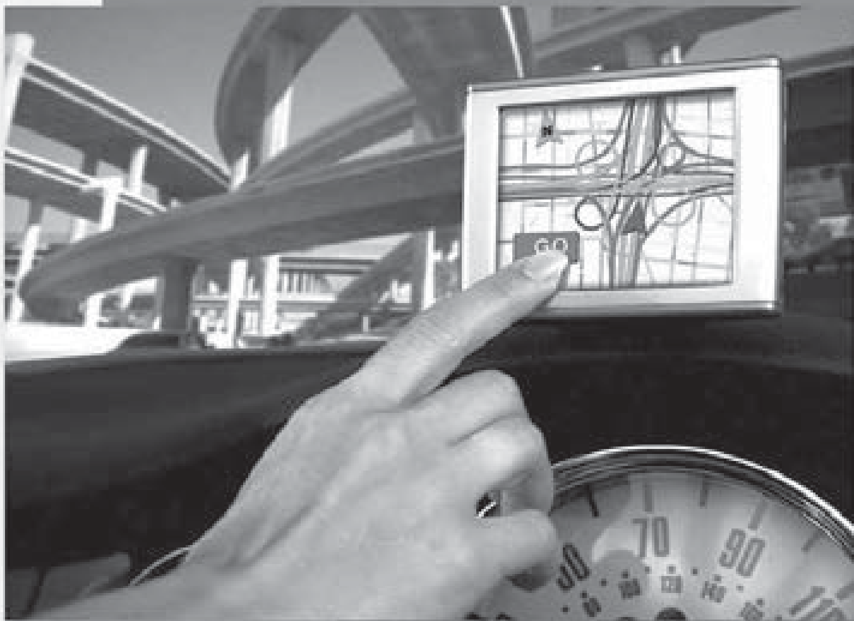
14. Suponga que un dado utilizado para jugar tiene la forma de un octaedro regular. Las caras se numeran 1, 2, 3, 4,… y 8. Cuando se lanza una vez el dado ¿cuál es la probabilidad de que el lanzamiento produzca como resultado
a) un número par?_______
b) un número mayor o igual a 6?_______

15. Un tanque de almacenamiento esférico tiene un radio de 10 pies. Utilice el valor de π guardado en la calculadora para encontrar el valor aproximado a la décima más cercana a la unidad del
a) área superficial de la esfera. _______
b) volumen de la esfera. _______

16. Una bomba mueve agua a una razón de 8π pies^3 por minuto. ¿Cuánto tardará en vaciar el tanque del ejercicio 15? (Proporcione su respuesta al minuto entero más cercano.)_______

Capítulo 10

Geometría analítica



© Nick Koudis/Getty Images

CONTENIDO

Hay un DVD disponible que cuenta con un video con explicación de conceptos, problemas de ejemplo y aplicaciones. Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

¡Orientación! El matemático francés René Descartes se considera el padre de la geometría analítica. Su inspiración para relacionar el álgebra y la geometría, el sistema coordenado cartesiano, fue un parte aguas en el desarrollo de gran parte de las matemáticas. La fotografía ilustra el uso de un sistema de posicionamiento global (GPS). El sistema permite determinar ubicaciones como la de un vehículo en movimiento o la de un sitio de destino. En el mapa los lugares identificados por una latitud y una longitud son comparables con los puntos cuyas coordenadas x y y ubican un punto en el sistema coordenado cartesiano.

10.1 Sistema coordenado rectangular

CONCEPTOS CLAVE

Geometría analítica
Sistema coordenado cartesiano (rectangular)
Eje x
Eje y
Cuadrantes
Origen
Coordenada x
Coordenada y
Par ordenado
Fórmula de la distancia
Ecuación lineal
Fórmula del punto medio

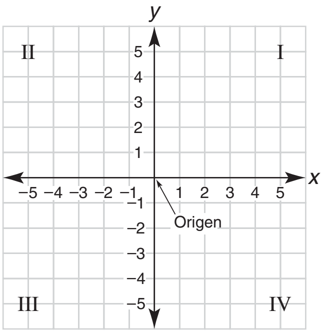


Figura 10.1

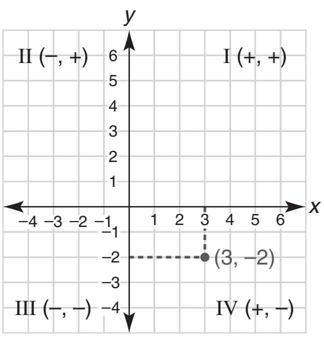


Figura 10.2

Graficar los conjuntos de soluciones para las ecuaciones $3x - 2 = 7$ y $3x - 2 > 7$ requería sólo una recta numérica para indicar el valor de x. (Vea los apéndices A.2 y A.3 para más información.) En este capítulo se estudian ecuaciones que contienen dos variables; para relacionar enunciados algebraicos con la geometría plana se necesitan dos rectas numéricas.

Al estudio de relaciones entre pares de números y puntos en general se le conoce como **geometría analítica**. El **sistema coordenado cartesiano** o **sistema coordenado rectangular** es el plano que resulta cuando dos rectas numéricas se intersecan perpendicularmente en el origen (el punto correspondiente al número 0 de cada recta). La recta numérica horizontal se conoce como **eje *x*** y sus coordenadas numéricas aumentan de izquierda a derecha. En la recta numérica vertical, el **eje *y***, los valores aumentan de abajo hacia arriba; vea la figura 10.1. Los dos ejes separan el plano en cuatro **cuadrantes** que están numerados en sentido contrario al de las manecillas del reloj I, II, III y IV, como se muestra. El punto que marca el origen común de las dos rectas numéricas es el **origen** del sistema coordenado rectangular. Es conveniente identificar el origen como (0, 0); esta notación indica que la **coordenada *x*** (que se menciona primero) es 0 y también que la **coordenada *y*** (anotada en segundo término) es 0.

En el sistema coordenado en la figura 10.2 se muestra el punto (3, −2). Para cada punto se utiliza el orden (x, y); estos pares se denominan **pares ordenados** ya que x debe preceder a y. Para trazar este punto se observa que $x = 3$ y $y = -2$; por tanto, el punto se localiza moviéndose 3 unidades a la derecha del origen y luego 2 unidades hacia abajo del eje x. Las rectas discontinuas que se muestran enfatizan la razón de por qué a la cuadrícula se le denomina *sistema coordenado rectangular*. Observe que este punto (3, −2) también se podría haber localizado primero moviéndose hacia abajo 2 unidades y después moviéndose 3 unidades hacia la derecha del eje y. Este punto se localiza en el cuadrante IV. En la figura 10.2 los pares ordenados de signos más y menos caracterizan los signos de las coordenadas de un punto localizado en cada cuadrante.

EJEMPLO 1

Trace los puntos A (−3, 4) y B (2, 4) y determine la distancia entre ellos.

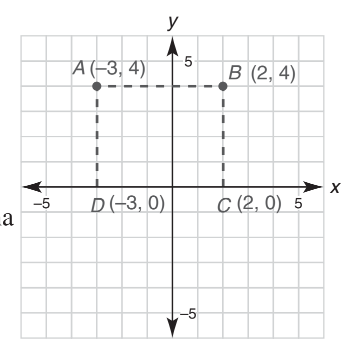


Figura 10.3

Solución El punto A se localiza moviéndose 3 unidades hacia la izquierda del origen y luego 4 unidades hacia arriba desde el eje x. El punto B se localiza moviéndose 2 unidades hacia la derecha del origen y luego 4 unidades hacia arriba desde el eje x. En la figura 10.3 $\overline{AB}$ es un segmento horizontal.

En el sistema coordenado rectangular, $ABCD$ es un rectángulo en el cual $DC = 5$; $\overline{DC}$ se mide con facilidad debido a que se encuentra en el eje x. Ya que los lados opuestos de un rectángulo son congruentes, se deduce que $AB = 5$. ■

Ejercicios 1-4

En el ejemplo 1 los puntos $(-3, 4)$ y $(2, 4)$ tienen las mismas coordenadas y. En este caso la distancia entre los puntos en una recta horizontal es simplemente la diferencia positiva en las coordenadas x; así, la distancia entre A y B es $2 - (-3)$, o 5. También es fácil encontrar la distancia entre dos puntos en una recta vertical. Cuando las coordenadas x son las mismas, la distancia entre puntos es la diferencia positiva en las coordenadas y. En la figura 10.3, donde C es $(2, 0)$ y B es $(2, 4)$, la distancia entre los puntos es $4 - 0$ o 4.

DEFINICIÓN

Dados los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en un segmento de recta horizontal $\overline{AB}$, la distancia entre estos puntos es

$$AB = x_2 - x_1 \text{ si } x_2 > x_1 \quad \text{o} \quad AB = x_1 - x_2 \text{ si } x_1 > x_2$$

En la definición anterior las coordenadas y repetidas caracterizan un segmento de recta horizontal. En la definición siguiente las coordenadas x repetidas determinan un segmento de recta vertical. En cada definición la distancia se determina restando la menor de la mayor de las dos coordenadas desiguales.

DEFINICIÓN

Dados los puntos $C(x_1, y_1)$ y $D(x_1, y_2)$ en un segmento de recta vertical $\overline{CD}$, la distancia entre estos puntos es

$$CD = y_2 - y_1 \text{ si } y_2 > y_1 \quad \text{o} \quad CD = y_1 - y_2 \text{ si } y_1 > y_2$$

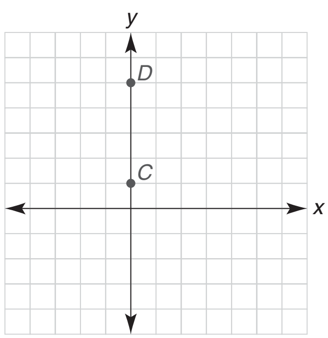


Figura 10.4

EJEMPLO 2

En la figura 10.4 nombre las coordenadas de los puntos C y D y determine la distancia entre ellos. Las coordenadas x de C y D son idénticas.

Solución C es el punto $(0, 1)$ ya que C está 1 unidad arriba del origen; de manera similar, D es el punto $(0, 5)$. Se designan las coordenadas del punto C por $x_1 = 0$ y $y_1 = 1$ y las coordenadas del punto D por $x_1 = 0$ y $y_2 = 5$. Utilizando la definición anterior,

$$CD = y_2 - y_1 = 5 - 1 = 4$$ ■

Ahora se analizará el problema más general de encontrar la distancia entre cualesquiera dos puntos.

Descubra

Trace los puntos $A(0, 0)$ y $B(4, 3)$. Ahora encuentre AB utilizando el teorema de Pitágoras. Para realizar esto necesita formar una trayectoria de A a B a lo largo de un segmento de recta horizontal y uno vertical.

RESPUESTA

5

FÓRMULA DE LA DISTANCIA

La fórmula siguiente permite encontrar la distancia entre dos puntos que se encuentran en una recta "inclinada".

TEOREMA 10.1.1 ▶ (Fórmula de la distancia)

La distancia entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

DEMOSTRACIÓN

En el sistema coordenado en la figura 10.5 están los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Además de trazar los segmentos que unen estos puntos, se traza un segmento horizontal auxiliar a través de P_1 y un segmento vertical auxiliar a través de P_2; éstos convergen en el punto $C(x_2, y_1)$ en la figura 10.5(a). Utilizando la figura 10.5(b) y las definiciones para las longitudes de los segmentos horizontal y vertical,

$$P_1C = x_2 - x_1 \qquad \text{y} \qquad P_2C = y_2 - y_1$$

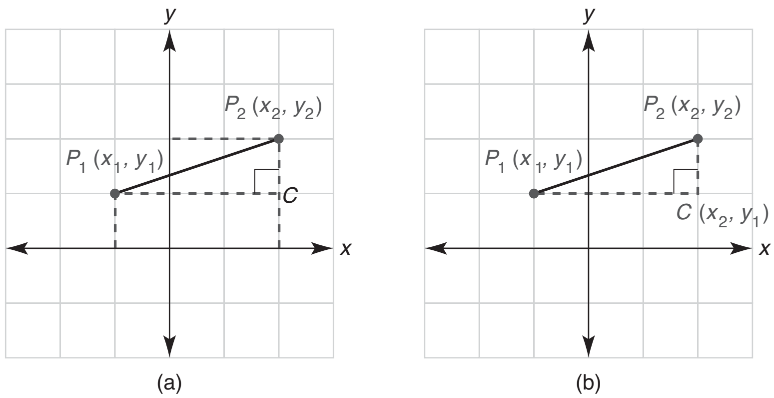


Figura 10.5

En el triángulo rectángulo P_1P_2C en la figura 10.5(b), sea $d = P_1P_2$. Por el teorema de Pitágoras,

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Tomando la raíz cuadrada positiva para la longitud d se obtiene

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ ■

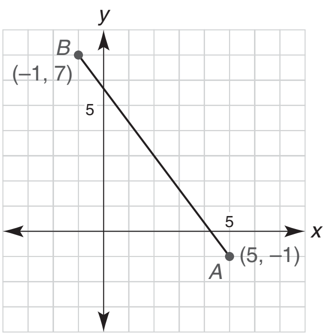


Figura 10.6

EJEMPLO 3

En la figura 10.6 encuentre la distancia entre los puntos $A(5, -1)$ y $B(-1, 7)$.

Solución Utilizando la fórmula de la distancia y eligiendo $x_1 = 5$ y $y_1 = -1$ (del punto A) y $x_2 = -1$ y $y_2 = 7$ (del punto B), se obtiene

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-1 - 5)^2 + [7 - (-1)]^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (8)^2} = \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

NOTA: Si las coordenadas del punto A se designaran $x_2 = 5$ y $y_2 = -1$ y las del punto B se designaran $x_1 = -1$ y $y_1 = 7$, la distancia sería la misma. ■

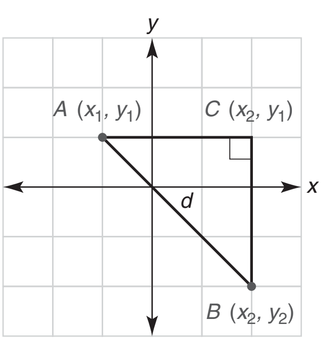


Figura 10.7

Si se analiza la demostración de la fórmula de la distancia, en la figura 10.5 se muestra sólo una de las varias localizaciones posibles de los puntos. Si la ubicación hubiera sido como se muestra en la figura 10.7, entonces se tendría $AC = x_2 - x_1$, ya que $x_2 > x_1$ y $BC = y_1 - y_2$ dado que $y_1 > y_2$. El teorema de Pitágoras conduce a lo que parece un resultado diferente:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Pero esto se puede convertir en la fórmula anterior utilizando el hecho siguiente

$$(y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$$

Esto se deduce de que $(-a)^2 = a^2$ para cualquier número real a.

El ejemplo siguiente recuerda la forma de una **ecuación lineal**, una ecuación cuya gráfica es una línea recta. En general, esta forma es $Ax + By = C$ para las constantes A, B y C (donde A y B son distintas de 0). En la sección 10.2 se considera el trazo de ecuaciones lineales.

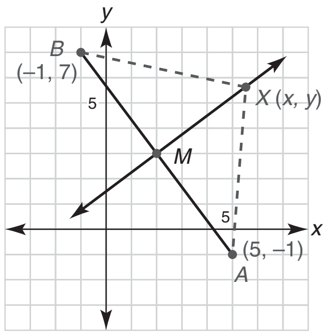


Figura 10.8

EJEMPLO 4

Encuentre la ecuación que describe todos los puntos (x, y) que son equidistantes de $A(5, -1)$ y $B(-1, 7)$. Vea la figura 10.8.

Solución En el capítulo 7 se vio que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos fijos es una recta. Esta recta ($\overleftrightarrow{MX}$ en la figura 10.8) es el bisector perpendicular de $\overline{AB}$.

Si X está en el lugar geométrico, entonces $AX = BX$. Por la fórmula de la distancia, se tiene

$$\sqrt{(x - 5)^2 + [y - (-1)]^2} = \sqrt{[x - (-1)]^2 + (y - 7)^2}$$

o $$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = (x + 1)^2 + (y - 7)^2$$

después de simplificar y elevar al cuadrado. Entonces

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 14y + 49$$

Eliminar los términos x^2 y y^2 por sustracción conduce a la ecuación

$$-12x + 16y = 24$$

GEE

Ejercicios 5-8

Cuando se divide entre 4, la ecuación de la recta queda

$$-3x + 4y = 6$$

Si se divide la ecuación $-12x + 16y = 24$ entre -4, una solución equivalente es

$$3x - 4y = -6$$

NOTA: Las ecuaciones $-3x + 4y = 6$ y $3x - 4y = -6$ se dice que son **equivalentes** ya que sus soluciones son las mismas. Por ejemplo, $(-2, 0)$, $(2, 3)$ y $(6, 6)$ son todas soluciones para las *dos* ecuaciones. ■

Descubra

En una recta numérica x_2 se encuentra a la derecha de x_1. Entonces $x_2 > x_1$ y la distancia entre puntos es $(x_2 - x_1)$. Para encontrar el número a que está a la mitad entre x_1 y x_2 se le suma la mitad de la distancia $(x_2 - x_1)$ a x_1. Es decir,

$$a = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

Complete la simplificación de a.

RESPUESTA

$a = \frac{x_1 + x_2}{2}$ o $a = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

En la figura 10.8 el punto M es el punto medio de $\overline{AB}$. En el ejemplo 5(a) se demostrará que M es el punto (2, 3).

En el teorema 10.1.2 se presenta una fórmula generalizada del punto medio. El resultado muestra que las coordenadas del punto medio M de un segmento de recta son los promedios de las coordenadas de los puntos extremos. Consulte la actividad Descubra de la izquierda.

TEOREMA 10.1.2 ▶ (Fórmula del punto medio)

El punto medio M del segmento de recta que une $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ tiene coordenadas x_M y y_M, donde

$$(x_M, y_M) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

es decir,
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Para demostrar la fórmula del punto medio se necesita establecer dos cosas:

1. $BM + MA = BA$, establece que los tres puntos A, M y B son colineales con A-M-B
2. $BM = MA$, establece que el punto M está a la mitad entre A y B

EJEMPLO 5

Utilice la fórmula del punto medio para encontrar el punto medio del segmento de recta que une:
a) $(5, -1)$ y $(-1, 7)$ b) (a, b) y (c, d)

Solución

a) Utilizando la fórmula del punto medio y estableciendo $x_1 = 5$, $y_1 = -1$, $x_2 = -1$ y $y_2 = 7$, se tiene

$$M = \left(\frac{5 + (-1)}{2}, \frac{-1 + 7}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right), \quad \text{por tanto} \quad M = (2, 3)$$

b) Utilizando la fórmula del punto medio y estableciendo $x_1 = a$, $y_1 = b$, $x_2 = c$ y $y_2 = d$ se tiene

$$M = \left(\frac{a + c}{2}, \frac{b + d}{2}\right)$$

■

Para el ejemplo 5(a) el segmento de recta descrito se muestra en la figura 10.8; en apariencia ¡la solución parece razonable! En el ejemplo 5(b) se generalizan las coordenadas en preparación para las demostraciones geométricas analíticas que aparecen más adelante en el capítulo. En esas secciones se elegirán los valores x y y de cada punto, de tal manera que sean tan generales como sea posible.

Ejercicios 9-12

DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO (OPCIONAL)

Para el segmento de recta que une P_1 y P_2, se nombra el punto medio M, como se muestra en la figura 10.9(a) de la página 455. Sean (x_M, y_M) las coordenadas de M. Ahora construya segmentos horizontales que pasen por P_1 y M y segmentos verticales que pasen por M y P_2 que se intersequen en los puntos A y B, como se muestra en la figura 10.9(b). Puesto que el $\angle A$ y el $\angle B$ son ángulos rectos, $\angle A \cong \angle B$.

Ya que $\overline{P_1A}$ y $\overline{MB}$ son horizontales, estos segmentos son paralelos, como se muestra en la figura 10.9(c). Entonces $\angle 1 \cong \angle 2$ ya que éstos son ángulos correspondientes. Con $\overline{P_1M} \cong \overline{MP_2}$ por definición de un punto medio se deduce que el $\triangle P_1AM \cong \triangle MBP_2$ por AAL. Dado que A es el punto (x_M, y_1), se tiene $P_1A = x_M - x_1$. De igual forma, las coorde-

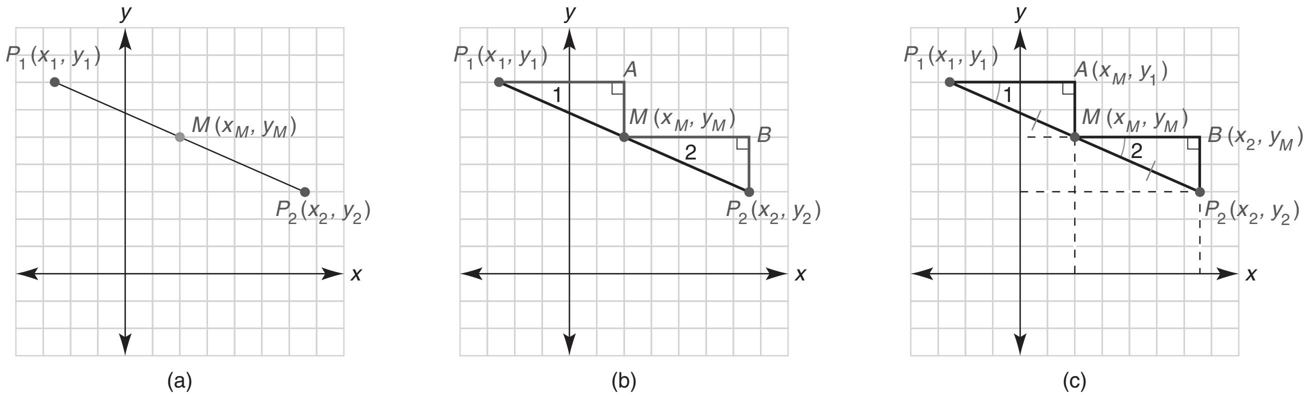


Figura 10.9

Descubra

En un mapa las coordenadas aproximadas (latitud y longitud) de Bangor, Maine, son 45°N, 70°W y las de Moline, Illinois, son 41°N, 90°W. Si las Cataratas del Niágara tienen coordenadas que están "a la mitad" entre las de Bangor y Moline, exprese su localización en coordenadas de latitud y longitud.

RESPUESTA

43°N, 80°W

nadas de B son (x_2, y_M), por tanto $MB = x_2 - x_M$. Debido a que $\overline{P_1A} \cong \overline{MB}$ por PCTCC, se representa la longitud común de los segmentos $\overline{P_1A}$ y $\overline{MB}$ con a. De la primera ecuación, $x_M - x_1 = a$, por tanto $x_M = x_1 + a$. De la segunda ecuación, $x_2 - x_M = a$; por tanto, $x_2 = x_M + a$. Sustituyendo $x_1 + a$ con x_M en la segunda ecuación, se tiene

$$(x_1 + a) + a = x_2$$

$$x_1 + 2a = x_2$$

Entonces $$2a = x_2 - x_1$$

por tanto $$a = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

Se deduce que

$$\begin{aligned} x_M &= x_1 + a \\ &= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} \\ &= \frac{2x_1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}$$

De manera similar, la coordenada y del punto medio es $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Entonces

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$ ■

El ejemplo siguiente se basa en las definiciones de simetría respecto a una recta y a un punto. Si es necesario repase la sección 2.6.

EJEMPLO 6

Considere un sistema coordenado que contiene el punto $A(2, -3)$. Encuentre el punto B si los puntos A y B tienen simetría respecto al:

a) Eje y b) Eje x c) Origen

GÉE

Ejercicios 13-15

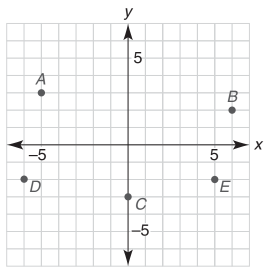
Solución

a) $(-2, -3)$ b) $(2, 3)$ c) $(-2, 3)$ ■

Ejercicios 10.1

1. Trace y marque los puntos $A(0, -3)$, $B(3, -4)$, $C(5, 6)$, $D(-2, -5)$ y $E(-3, 5)$

2. Indique las coordenadas de cada punto A, B, C, D y E. Además, mencione el cuadrante en el cual se encuentra cada punto.



3. Encuentre la distancia entre cada par de puntos:

a) $(5, -3)$ y $(5, 1)$ c) $(0, 2)$ y $(0, -3)$
b) $(-3, 4)$ y $(5, 4)$ d) $(-2, 0)$ y $(7, 0)$

4. Si la distancia entre $(-2, 3)$ y $(-2, a)$ es 5 unidades, encuentre todos los valores posibles de a.

5. Si la distancia entre $(b, 3)$ y $(7, 3)$ es 3.5 unidades, encuentre todos los valores posibles de b.

6. Encuentre una expresión para la distancia entre (a, b) y (a, c) si $b > c$.

7. Encuentre la distancia entre cada par de puntos:

a) $(0, -3)$ y $(4, 0)$ c) $(3, 2)$ y $(5, -2)$
b) $(-2, 5)$ y $(4, -3)$ d) $(a, 0)$ y $(0, b)$

8. Encuentre la distancia entre cada par de puntos:

a) $(-3, -7)$ y $(2, 5)$ c) $(-a, -b)$ y (a, b)
b) $(0, 0)$ y $(-2, 6)$ d) $(2a, 2b)$ y $(2c, 2d)$

9. Encuentre el punto medio del segmento de recta que une cada par de puntos:

a) $(0, -3)$ y $(4, 0)$ c) $(3, 2)$ y $(5, -2)$
b) $(-2, 5)$ y $(4, -3)$ d) $(a, 0)$ y $(0, b)$

10. Encuentre el punto medio del segmento de recta que une cada par de puntos:

a) $(-3, -7)$ y $(2, 5)$ c) $(-a, -b)$ y (a, b)
b) $(0, 0)$ y $(-2, 6)$ d) $(2a, 2b)$ y $(2c, 2d)$

11. Los puntos A y B tienen *simetría respecto al origen O*. Encuentre las coordenadas de B si A es el punto:

a) $(3, -4)$ c) $(a, 0)$
b) $(0, 2)$ d) (b, c)

12. Los puntos A y B tienen *simetría respecto al punto C*$(2, 3)$. Encuentre las coordenadas de B si A es el punto:

a) $(3, -4)$ c) $(5, 0)$
b) $(0, 2)$ d) (a, b)

13. Los puntos A y B tienen *simetría respecto al punto C*. Encuentre las coordenadas de C dados los puntos:

a) $A(3, -4)$ y $B(5, -1)$ c) $A(5, -3)$ y $B(2, 1)$
b) $A(0, 2)$ y $B(0, 6)$ d) $A(2a, 0)$ y $B(0, 2b)$

14. Los puntos A y B tienen *simetría respecto al* eje x. Encuentre las coordenadas de B si A es el punto:

a) $(3, -4)$ c) $(0, a)$
b) $(0, 2)$ d) (b, c)

15. Los puntos A y B tienen *simetría respecto al* eje x. Encuentre las coordenadas de A si B es el punto:

a) $(5, 1)$ c) $(2, a)$
b) $(0, 5)$ d) (b, c)

16. Los puntos A y B tienen *simetría respecto a la recta vertical donde* $x = 2$. Encuentre las coordenadas de A si B es el punto:

a) $(5, 1)$ c) $(-6, a)$
c) $(0, 5)$ d) (b, c)

17. Los puntos A y B tienen *simetría respecto al* eje y. Encuentre las coordenadas de A si B es el punto:

a) $(3, -4)$ c) $(a, 0)$
b) $(2, 0)$ d) (b, c)

18. Los puntos A y B tienen *simetría respecto a*l eje x o al eje y. Mencione el eje de simetría para:

a) $A(3, -4)$ y $B(3, 4)$ c) $A(3, -4)$ y $B(-3, -4)$
b) $A(2, 0)$ y $B(-2, 0)$ d) $A(a, b)$ y $B(a, -b)$

19. Los puntos A y B tienen *simetría respecto* a la recta vertical $(x = a)$ o a una recta horizontal $(y = b)$. Proporcione una ecuación como $x = 3$ para el eje de simetría para:

a) $A(3, -4)$ y $B(5, -4)$ c) $A(7, -4)$ y $B(-3, -4)$
b) $A(a, 0)$ y $B(a, 2b)$ d) $A(a, 7)$ y $B(a, -1)$

En los ejercicios 20 al 22 aplique la fórmula del punto medio.

20. $M(3, -4)$ es el punto medio de $\overline{AB}$, en el cual A es el punto $(-5, 7)$. Encuentre las coordenadas de B.

21. $M(2.1, -5.7)$ es el punto medio de $\overline{AB}$, en el cual A es el punto $(1.7, 2.3)$. Encuentre las coordenadas de B.

22. Un círculo tiene su centro en el punto $(-2, 3)$. Si un punto extremo de un diámetro está en $(3, -5)$, encuentre el otro punto medio del diámetro.

23. Un rectángulo $ABCD$ tiene tres de sus vértices en $A(2, -1)$, $B(6, -1)$ y $C(6, 3)$. Encuentre el cuarto vértice D y el área del rectángulo $ABCD$.

24. Un rectángulo $MNPQ$ tiene tres de sus vértices en $M(0, 0)$, $N(a, 0)$ y $Q(0, b)$. Encuentre el cuarto vértice P y el área del rectángulo $MNPQ$.

25. Utilice la fórmula de la distancia para determinar el tipo de triángulo que tiene estos vértices:

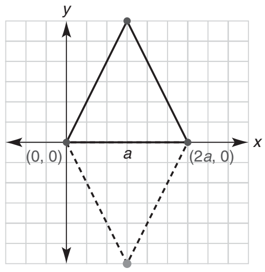
a) $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ y $C(2, 5)$
b) $D(0, 0)$ $E(4, 0)$ y $F(2, 2\sqrt{3})$
c) $G(-5, 2)$, $H(-2, 6)$ y $K(2, 3)$

26. Utilice el método del ejemplo 4 para encontrar la ecuación de la recta que describe todos los puntos equidistantes de los puntos $(-3, 4)$ y $(3, 2)$.

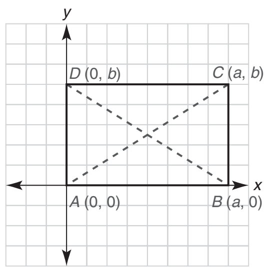
27. Utilice el método del ejemplo 4 para encontrar la ecuación de la recta que describe todos los puntos equidistantes de los puntos $(1, 2)$ y $(4, 5)$.

28. Para los puntos coplanares A, B y C suponga que se utilizó la fórmula de la distancia para demostrar que $AB = 5$, $BC = 10$ y $AC = 15$. ¿Qué puede concluir acerca de los puntos A, B y C?

29. Si dos vértices de un triángulo equilátero están en (0, 0) y $(2a, 0)$, ¿cuál punto es el tercer vértice?



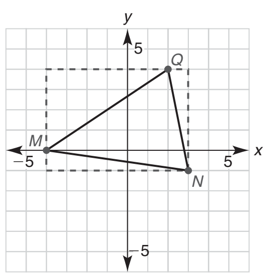
30. Se muestra el rectángulo cuyos vértices son $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, b)$ y $D(0, b)$. Utilice la fórmula de la distancia para obtener una conclusión acerca de las longitudes de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.



***31.** Hay dos puntos en el eje y que están ubicados a una distancia de 6 unidades del punto (3, 1). Determine las coordenadas de cada punto.

***32.** Hay dos puntos en el eje x que están ubicados a una distancia de 6 unidades del punto (3, 1). Determine las coordenadas de cada punto.

33. El triángulo que tiene vértices en $M(-4, 0)$, $N(3, -1)$ y $Q(2, 4)$ se ha delimitado como se muestra. Encuentre el área del $\triangle MNQ$.



Ejercicios 33, 34

34. Utilice el método que se sugiere en el ejercicio 33 para encontrar el área del $\triangle RST$, con $R(-2, 4)$, $S(-1, -2)$ y $T(6, 5)$.

35. Determine el área del $\triangle ABC$ si $A = (2, 1)$, $B = (5, 3)$ y C es el reflejo de B a través del eje x.

36. Encuentre el área del $\triangle ABC$ en el ejercicio 35, pero suponga que C es el reflejo de B a través del eje y.

Para los ejercicios 37 al 42 consulte los ejemplos 5 y 6 de la sección 9.3.

37. Encuentre el volumen exacto del cono circular recto que resulta cuando la región triangular con vértices en (0, 0), (5, 0) y (0, 9) se gira respecto al
a) eje x. b) eje y.

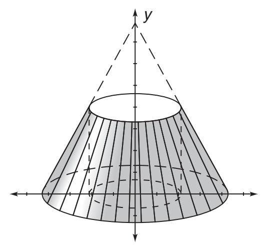
38. Encuentre el volumen exacto del sólido que resulta cuando la región triangular con vértices en (0, 0), (6, 0) y (6, 4) se gira respecto al
a) eje x. b) eje y.

39. Encuentre el volumen exacto del sólido formado cuando la región rectangular con vértices en (0, 0), (6, 0), (6, 4) y (0, 4) se gira respecto al
a) eje x. b) eje y.

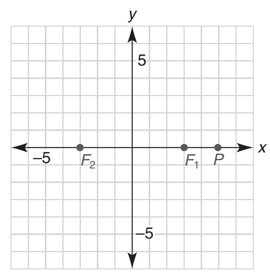
40. Encuentre el volumen exacto del sólido formado cuando la región delimitada en el cuadrante I por los ejes y las rectas $x = 9$ y $y = 5$ se gira respecto al
a) eje x. b) eje y.

41. Encuentre el área lateral exacta de cada sólido en el ejercicio 40.

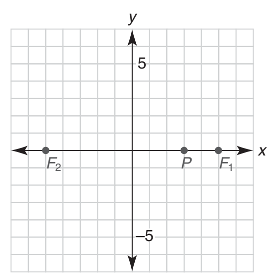
***42.** Encuentre el volumen del sólido formado cuando la región triangular que tiene vértices (2, 0), (4, 0) y (2,4) se gira respecto al eje y.



***43.** Por definición una *elipse* es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 (denominados focos) es constante. En la cuadrícula que se proporciona encuentre los puntos cuya suma de distancias desde los puntos $F_1(3, 0)$ y $F_2(-3, 0)$ es 10. Es decir, localice algunos puntos para los cuales $PF_1 + PF_2 = 10$; el punto $P(5, 0)$ es uno de esos puntos. Luego bosqueje la elipse.



***44.** Por definición una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia positiva de distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 (denominados focos) es constante. En la cuadrícula que se proporciona encuentre los puntos cuya diferencia de distancias desde los puntos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ es 6. Es decir, localice los puntos para los cuales $PF_1 - PF_2 = 6$ o $PF_2 - PF_1 = 6$; el punto $P(3, 0)$ es uno de esos puntos. Luego bosqueje la hipérbola.



45. Después de una rotación de 90° en sentido contrario al de las manecillas del reloj respecto al origen, la imagen de $A(3, 1)$ es el punto $B(-1, 3)$. ¿Cuál es la imagen del punto A después de una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj de
a) 180° respecto al origen?
b) 270° respecto al origen?
c) 360° respecto al origen?

46. Considere el punto $C(a, b)$. ¿Cuál es la imagen de C después de una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj de
a) 90° respecto al origen?
b) 180° respecto al origen?
c) 360° respecto al origen?

47. Dado el punto $D(3, 2)$, encuentre la imagen de D después de una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj de
a) 90° respecto al punto $E(3, 4)$
b) 180° respecto al punto $F(4, 5)$
c) 360° respecto al punto $G(a, b)$

10.2 Gráficas de ecuaciones lineales y pendiente

CONCEPTOS CLAVE

- Gráficas de ecuaciones lineales
- Intersección x
- Intersección y
- Pendiente
- Fórmula de la pendiente
- Recíproco negativo

En la sección 10.1 se recordó que la forma general de la ecuación de una recta es $Ax + By = C$ (donde A y B no son iguales a 0). Algunos ejemplos de ecuaciones lineales son $2x + 3y = 12$, $3x - 4y = 12$ y $3x = -6$; como se verá, la gráfica de cada una de estas ecuaciones es una recta.

GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN

DEFINICIÓN

La **gráfica de una ecuación** es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el sistema coordenado rectangular cuyos pares ordenados satisfacen la ecuación.

EJEMPLO 1

Trace la gráfica de la ecuación $2x + 3y = 12$.

Solución Se inicia completando una tabla. Es conveniente utilizar un punto para el cual $x = 0$, un segundo punto para el cual $y = 0$ y un tercer punto como comprobación de la colinealidad.

$$x = 0 \rightarrow 2(0) + 3y = 12 \rightarrow y = 4$$
$$y = 0 \rightarrow 2x + 3(0) = 12 \rightarrow x = 6$$
$$x = 3 \rightarrow 2(3) + 3y = 12 \rightarrow y = 2$$

x	y	(x, y)
0	4	(0, 4)
6	0	(6, 0)
3	2	(3, 2)

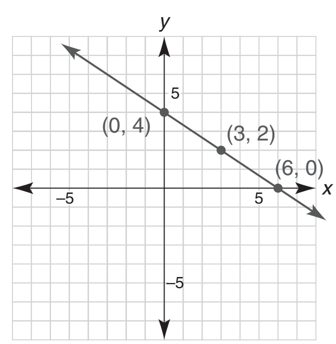


Figura 10.10

GEE

Ejercicios 1-3

Después de trazar el tercer punto se observa que los tres puntos son colineales. La gráfica de una ecuación lineal debe ser una línea recta, como se muestra en la figura 10.10. ■

Exploración tecnológica

Utilice una calculadora graficadora si dispone de ella.

1. Para graficar $2x + 3y = 12$, despeje y.
2. Ingrese su resultado del inciso (1) como el valor de Y_1.

   $$[Y_1 = -\left(\frac{2}{3}\right)x + 4]$$
3. Ahora presione $\boxed{\text{GRAPH}}$ para visualizar la recta de la figura 10.10

Debido a que la gráfica en el ejemplo 1 es un lugar geométrico, cada punto en la recta también debe satisfacer la ecuación dada. Observe que el punto $(-3, 6)$ se encuentra en la recta que se muestra en la figura 10.10. Este par ordenado también satisface la ecuación $2x + 3y = 12$; es decir, $2(-3) + 3(6) = 12$ ya que $-6 + 18 = 12$.

Para la ecuación en el ejemplo 1, el número 6 se conoce como **intersección *x*** debido a que $(6, 0)$ es el punto en el que la gráfica cruza el eje x; de manera similar, el número 4 se conoce como la **intersección *y***. La mayoría de las ecuaciones lineales tienen dos intersecciones que, por lo general, se representan por a (la intersección x) y b (la intersección y).

Para la ecuación $Ax + By = C$, se determina la

a) intersección x eligiendo $y = 0$. De la ecuación resultante se despeja x.
b) intersección y eligiendo $x = 0$. De la ecuación resultante se despeja y.

EJEMPLO 2

Encuentre las intersecciones x y y de la ecuación $3x - 4y = -12$ y con ellas trace la gráfica de la ecuación.

Solución La intersección x se determina cuando $y = 0$; $3x - 4(0) = -12$, por tanto $x = -4$. La intersección x es $a = -4$, por lo que $(-4, 0)$ está en la gráfica. La intersección y resulta cuando $x = 0$; $3(0) - 4y = -12$, por tanto $y = 3$. La intersección y es $b = 3$, por tanto $(0, 3)$ está en la gráfica. Una vez que se han trazado los puntos $(-4, 0)$ y $(0, 3)$ la gráfica se puede completar trazando la recta que pasa por dichos puntos. Vea la figura 10.11. ■

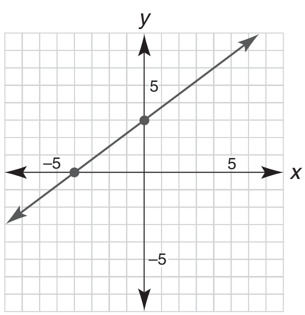


Figura 10.11

Como se verá en el ejemplo 3 una ecuación lineal sólo puede tener una intersección. Es imposible que una ecuación lineal no tenga ninguna intersección.

EJEMPLO 3

Trace las gráficas de las ecuaciones siguientes:

a) $x = -2$ b) $y = 3$

Solución Primero observe que cada ecuación es una ecuación lineal y que se puede escribir en la forma $Ax + By = C$.

$$x = -2 \text{ es equivalente a } (1 \cdot x) + (0 \cdot y) = -2$$
$$y = 3 \text{ es equivalente a } (0 \cdot x) + (1 \cdot y) = 3$$

a) La ecuación $x = -2$ afirma que el valor de x es -2 sin importar el valor de y; esto conduce a la tabla siguiente:

x	y		(x, y)
-2	-2	$\rightarrow$	$(-2, -2)$
-2	0	$\rightarrow$	$(-2, 0)$
-2	5	$\rightarrow$	$(-2, 5)$

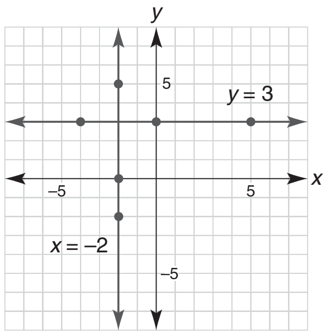


Figura 10.12

b) La ecuación $y = 3$ afirma que el valor de y es 3 sin importar el valor de x; esto conduce a la tabla siguiente:

x	y		(x, y)
-4	3	$\rightarrow$	$(-4, 3)$
0	3	$\rightarrow$	$(0, 3)$
5	3	$\rightarrow$	$(5, 3)$

Las gráficas de las ecuaciones se muestran en la figura 10.12. ■

GÉE *Ejercicios 4-8*

NOTA: Cuando una ecuación se puede escribir en la forma $x = a$ (para a constante) su gráfica es la recta vertical que contiene el punto $(a, 0)$. Cuando una ecuación se puede escribir en la forma $y = b$ (para b constante), su gráfica es la recta horizontal que contiene el punto $(0, b)$.

PENDIENTE DE UNA RECTA

La mayoría de las rectas son oblicuas; es decir, la recta no es horizontal ni vertical. Especialmente para las rectas oblicuas, es conveniente describir la cantidad de “inclinación” con un número denominado *pendiente* de la recta.

DEFINICIÓN ▶ (Fórmula de la pendiente)

La pendiente de la recta que contiene los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ para } x_1 \neq x_2$$

NOTA: Cuando $x_1 = x_2$, el denominador de la fórmula de la pendiente se convierte en 0 y se dice que la pendiente de la recta está indefinida.

Mientras que la letra mayúscula cursiva M significa punto medio, la letra minúscula cursiva m se utiliza para denotar la pendiente. Otros términos que se emplean para describir la pendiente de una recta incluyen *inclinación* y *grado*. Un carpintero puede decir que una línea de un techo tiene una inclinación de $\frac{5}{12}$. [Vea la figura 10.13(a).] En la construcción de un tramo de un camino un ingeniero puede decir que esa parte del camino tiene un grado de $\frac{3}{100}$ o 3 por ciento. [Vea la figura 10.13(b).]

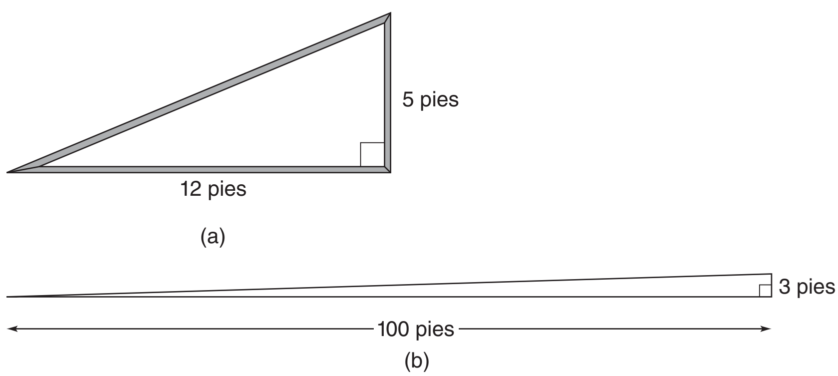
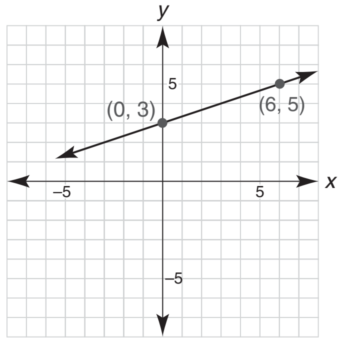


Figura 10.13

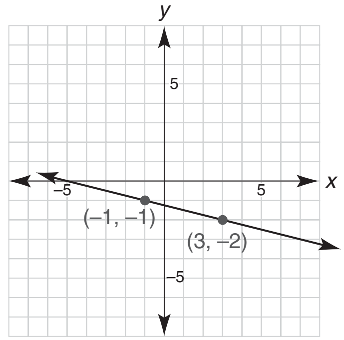
Ya sea en geometría, carpintería o ingeniería la **pendiente** de una recta es un número. La pendiente de una recta es la razón del cambio a lo largo de la vertical al cambio a lo largo de la horizontal. Para cualesquiera dos puntos en la recta en cuestión, una recta que “sube” de izquierda a derecha tiene una pendiente *positiva* y una recta que “baja” de izquierda a derecha tiene una pendiente *negativa*. Las rectas que se muestran en las figuras 10.14(a) y 10.14(b) confirman estas afirmaciones.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5 - 3}{6 - 0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(a)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-2 - (-1)}{3 - (-1)} = -\frac{1}{4}$$

(b)

Figura 10.14

Cualquier recta horizontal tiene una pendiente 0; cualquier recta vertical tiene una pendiente indefinida. En la figura 10.15 se muestra un ejemplo de cada uno de estos tipos de rectas.

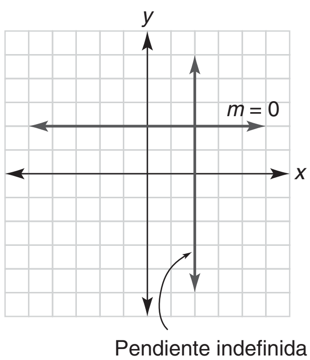


Figura 10.15

EJEMPLO 4

Sin graficar encuentre la pendiente de la recta que contiene:

a) (2, 2) y (5, 3) b) (1, −1) y (1, 3)

Solución

a) Utilizando la fórmula de la pendiente y eligiendo $x_1 = 2$, $y_1 = 2$, $x_2 = 5$ y $y_2 = 3$, se tiene

$$m = \frac{3 - 2}{5 - 2} = \frac{1}{3}$$

NOTA: Si se traza, la recta en el inciso (a) se inclinará hacia arriba de izquierda a derecha.

b) Sea $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $y_2 = 3$. Entonces se calcula

$$m = \frac{3 - (-1)}{1 - 1} = \frac{4}{0}$$

la cual está indefinida.

NOTA: Si se traza, la recta en este inciso será vertical ya que las coordenadas x de los puntos son iguales. ■

Recuerde

En la fórmula de la pendiente, asegúrese de escribir la diferencia en valores de *y* en el numerador; es decir,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta es única; es decir, la pendiente no cambia cuando:

1. El orden de los dos puntos se invierte en la fórmula de la pendiente.
2. Se seleccionan puntos diferentes en la recta.

GEE *Ejercicios 9-12*

La primera situación es verdadera ya que $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$. La segunda situación es más difícil de explicar debido a que depende de triángulos semejantes.

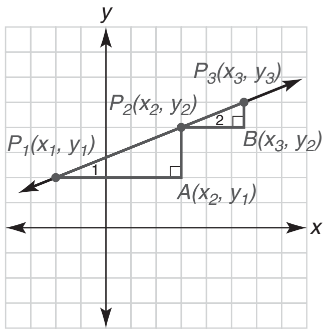


Figura 10.16

Para una explicación del punto 2 considere la figura 10.16, en la que los puntos P_1, P_2 y P_3 son colineales. Se quiere demostrar que la pendiente de la recta es la misma, ya sea que se utilicen en la fórmula de la pendiente P_1 y P_2 o bien P_2 y P_3. Si se trazan los segmentos horizontal y vertical, como se muestra en la figura 10.16, se puede demostrar que los triángulos P_1P_2A y P_2P_3B son semejantes. La semejanza se deduce de los hechos de que el $\angle 1 \cong \angle 2$ (ya que $\overline{P_1A} \parallel \overline{P_2B}$) y que el $\angle A$ y el $\angle B$ son ángulos rectos. Entonces $\frac{P_2A}{P_3B} = \frac{P_1A}{P_2B}$ debido a que éstos son lados correspondientes de triángulos semejantes. Intercambiando los medios, se tiene $\frac{P_2A}{P_1A} = \frac{P_3B}{P_2B}$. Pero

$$\frac{P_2A}{P_1A} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad \frac{P_3B}{P_2B} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

por tanto

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

Así, la pendiente de la recta no cambia si se utiliza cualquier par de puntos. En resumen, las pendientes concuerdan debido a los triángulos semejantes.

Si los puntos P_1, P_2 y P_3 son colineales, entonces las pendientes de $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$ y $\overline{P_2P_3}$ son las mismas. El recíproco de este enunciado también es verdadero. Si las pendientes de $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$ y $\overline{P_2P_3}$ son iguales, entonces P_1, P_2 y P_3 son colineales. Consulte el ejemplo 5 donde se muestra una aplicación.

EJEMPLO 5

¿Son colineales los puntos $A(2, -3)$, $B(5, 1)$ y $C(-4, -11)$?

Solución Sean $m_{\overline{AB}}$ y $m_{\overline{BC}}$ las pendientes de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Por la fórmula de la pendiente, se tiene

$$m_{\overline{AB}} = \frac{1 - (-3)}{5 - 2} = \frac{4}{3} \quad \text{y} \quad m_{\overline{BC}} = \frac{-11 - 1}{-4 - 5} = \frac{-12}{-9} = \frac{4}{3}$$

Como $m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}}$, se deduce que A, B y C son colineales. ■

Cuando se traza una recta de un punto a otro, la fórmula de la pendiente indica que

$$m = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} \quad \text{o} \quad m = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}}$$

GEE *Ejercicios 13-15*

Esta interpretación de la pendiente se utiliza en el ejemplo 6.

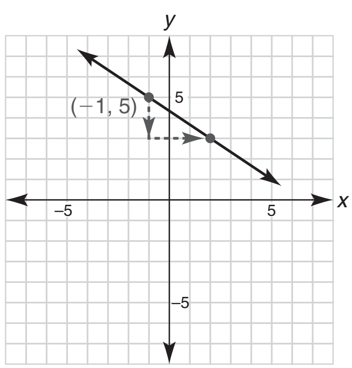


Figura 10.17

EJEMPLO 6

Trace la recta que pasa por $(-1, 5)$ con pendiente $m = -\frac{2}{3}$.

Solución Primero se traza el punto $(-1, 5)$. La pendiente se puede escribir como $m = \frac{-2}{3}$. Por tanto, se asigna que el cambio en y del primer al segundo punto es -2, en tanto que el cambio en x es 3. A partir del primer punto $(-1, 5)$ se localiza el segundo punto moviéndose 2 unidades hacia abajo y 3 unidades hacia la derecha. Luego la recta se traza como se muestra en la figura 10.17. ■

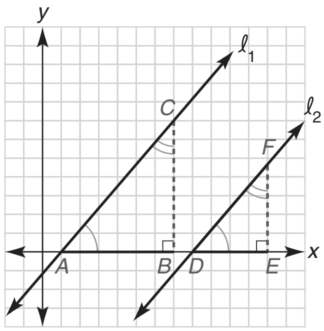


Figura 10.18

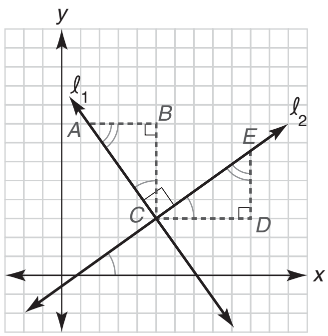


Figura 10.19

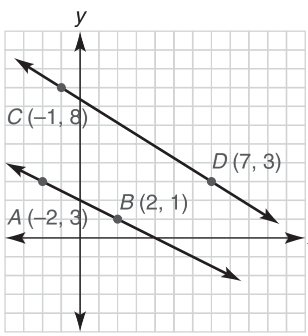


Figura 10.20

En seguida se enuncian dos teoremas sin demostración. Sin embargo, se proporcionan los dibujos que se pueden emplear en los ejercicios que siguen a esta sección. Cada demostración depende de los triángulos semejantes creados mediante los segmentos auxiliares que se encuentran en los dibujos.

TEOREMA 10.2.1

Si dos rectas no verticales son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.
Forma alterna: Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, entonces $m_1 = m_2$.

En la figura 10.18 observe que $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$. Además, $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son horizontales y $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ son segmentos verticales auxiliares. En la demostración del teorema 10.2.1, el objetivo es demostrar que $m_{\overline{AC}} = m_{\overline{DF}}$. El recíproco del teorema 10.2.1 también es verdadero; es decir, si $m_1 = m_2$, entonces $\ell_1 \parallel \ell_2$.

TEOREMA 10.2.2

Si dos rectas (ni horizontales ni verticales) son perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es -1.
Forma alterna: si $\ell_1 \perp \ell_2$, entonces $m_1 \cdot m_2 = -1$.

En la figura 10.19 se incluyeron los segmentos auxiliares. Para demostrar el teorema 10.2.2, se necesita probar que $m_{\overline{AC}} \cdot m_{\overline{CE}} = -1$. Dado que el producto de las pendientes es -1, las pendientes son **recíprocos negativos**. En general, los recíprocos negativos toman las formas $\frac{a}{b}$ y $\frac{-b}{a}$. El recíproco del teorema 10.2.2 también es verdadero; si $m_1 \cdot m_2 = -1$, entonces $\ell_1 \perp \ell_2$.

EJEMPLO 7

Dados los puntos $A(-2, 3)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 8)$ y $D(7, 3)$, ¿son $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos? (Vea la figura 10.20.)

Solución

$$m_{\overline{AB}} = \frac{1-3}{2-(-2)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$
$$m_{\overline{CD}} = \frac{3-8}{7-(-1)} = \frac{-5}{8} \text{ o } -\frac{5}{8}$$

Como $m_{\overline{AB}} \neq m_{\overline{CD}}$ $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$. Las pendientes no son recíprocos negativos; por tanto, $\overline{AB}$ no es perpendicular a $\overline{CD}$. Ninguna relación se cumple para $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. ■

En el ejemplo 7 valió la pena bosquejar las rectas descritas. De la figura 10.20 es claro que las rectas no son perpendiculares. Un esquema puede ayudar a demostrar que *no* existe una relación, pero bosquejar no es un método preciso para demostrar que las rectas son paralelas o perpendiculares.

GEE
Ejercicios 16-18

EJEMPLO 8

¿Las rectas que conforman las gráficas de $2x + 3y = 6$ y $3x - 2y = 12$ son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos?

Solución Como $2x + 3y = 6$ contiene los puntos (3, 0) y (0, 2), su pendiente es $\frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$. La recta $3x - 2y = 12$ contiene (0, −6) y (4, 0); por tanto, su pendiente es igual a $\frac{0-(-6)}{4-0} = \frac{6}{4}$ o $\frac{3}{2}$. Debido a que el producto de las pendientes es $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$ o -1, las rectas descritas son perpendiculares. ■

EJEMPLO 9

Determine el valor de a para el cual la recta que pasa por (2, −3) y (5, a) es perpendicular a la recta $3x + 4y = 12$.

Solución La recta $3x + 4y = 12$ contiene los puntos (4, 0) y (0, 3); esta recta tiene una pendiente

$$m = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$$

Para que las dos rectas sean perpendiculares, la segunda recta debe tener una pendiente $\frac{4}{3}$. Utilizando la fórmula de la pendiente, se determina que la segunda recta tiene una pendiente

$$\frac{a-(-3)}{5-2}$$

por tanto

$$\frac{a+3}{3} = \frac{4}{3}$$

Multiplicando por 3 se obtiene $a + 3 = 4$. Se deduce que $a = 1$. ■

EJEMPLO 10

En la figura 10.21 demuestre que el cuadrilátero con vértices $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, b)$ y $D(0, b)$ es un rectángulo.

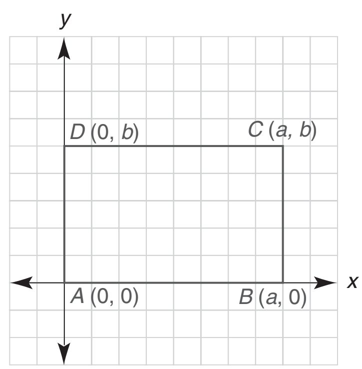


Figura 10.21

Solución Aplicando la fórmula de la pendiente, se observa que

$$m_{\overline{AB}} = \frac{0-0}{a-0} = 0$$

y

$$m_{\overline{DC}} = \frac{b-b}{a-0} = 0$$

Entonces $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son horizontales y por tanto paralelas entre sí.

Para $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$, las pendientes están indefinidas ya que los dos denominadores en la fórmula de la pendiente son iguales a 0. Entonces $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$ son ambas verticales y por tanto paralelas entre sí.

GEE *Ejercicio 19*

Así, $ABCD$ es un paralelogramo. Con $\overline{AB}$ horizontal y $\overline{DA}$ vertical, se deduce que $\overline{DA} \perp \overline{AB}$. Por tanto, $ABCD$ es un rectángulo por definición. ■

Ejercicios 10.2

En los ejercicios 1 al 8 trace la gráfica de cada ecuación e indique cualquier intersección.

1. $3x + 4y = 12$ **2.** $3x + 5y = 15$
3. $x - 2y = 5$ **4.** $x - 3y = 4$
5. $2x + 6 = 0$ **6.** $3y - 9 = 0$
7. $\frac{1}{2}x + y = 3$ **8.** $\frac{2}{3}x - y = 1$

9. Encuentre las pendientes de las rectas que contienen:
a) $(2, -3)$ y $(4, 5)$ d) $(-2.7, 5)$ y $(-1.3, 5)$
b) $(3, -2)$ y $(3, 7)$ e) (a, b) y (c, d)
c) $(1, -1)$ y $(2, -2)$ f) $(a, 0)$ y $(0, b)$

10. Encuentre las pendientes de las rectas que contienen:
a) $(3, -5)$ y $(-1, 2)$
b) $(-2, -3)$ y $(-5, -7)$
c) $(2\sqrt{2}, -3\sqrt{6})$ y $(3\sqrt{2}, 5\sqrt{6})$
d) $(\sqrt{2}, \sqrt{7})$ y $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
e) $(a, 0)$ y $(a + b, c)$
f) (a, b) y $(-b, -a)$

11. Encuentre x tal que $\overline{AB}$ tenga pendiente m, donde:
a) A es $(2, -3)$, B es $(x, 5)$ y $m = 1$
b) A es $(x, -1)$, B es $(3, 5)$ y $m = -0.5$

12. Encuentre y tal que $\overline{CD}$ tenga pendiente m, donde:
a) C es $(2, -3)$, D es $(4, y)$ y $m = \frac{3}{2}$
b) C es $(-1, -4)$, D es $(3, y)$ y $m = -\frac{2}{3}$

13. ¿Son colineales estos puntos?
a) $A(-2, 5)$, $B(0, 2)$ y $C(4, -4)$
b) $D(-1, -1)$, $E(2, -2)$ y $F(5, -5)$

14. ¿Son colineales estos puntos?
a) $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$ y $C(5, 5)$
b) $D(a, c - d)$, $E(b, c)$ y $F(2b - a, c + d)$

15. Las rectas paralelas ℓ_1 y ℓ_2 tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Encuentre m_2 si m_1 es igual a:
a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{5}{3}$ c) -2 d) $\frac{a - b}{c}$

16. Las rectas paralelas ℓ_1 y ℓ_2 tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Encuentre m_2 si m_1 es igual a:
a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) 3 d) $\frac{f + g}{h + j}$

17. Las rectas perpendiculares ℓ_1 y ℓ_2 tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Encuentre m_2 si m_1 es igual a:
a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 3 d) $\frac{f + g}{h + j}$

18. Las rectas perpendiculares ℓ_1 y ℓ_2 tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Encuentre m_2 si m_1 es igual a:
a) 5 b) $-\frac{5}{3}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{a - b}{c}$

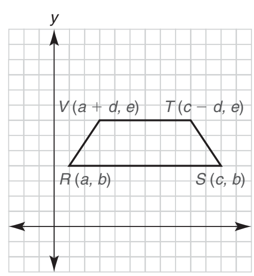
En los ejercicios 19 al 22 determine si las rectas son paralelas, perpendiculares, iguales o ninguna de las anteriores.

19. $2x + 3y = 6$ y $2x - 3y = 12$
20. $2x + 3y = 6$ y $4x + 6y = -12$
21. $2x + 3y = 6$ y $3x - 2y = 12$
22. $2x + 3y = 6$ y $4x + 6y = 12$

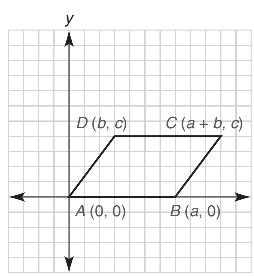
23. Encuentre x tal que los puntos $A(x, 5)$, $B(2, 3)$ y $C(4, -5)$ sean colineales.
24. Encuentre a tal que los puntos $A(1, 3)$, $B(4, 5)$ y $C(a, a)$ sean colineales.
25. Encuentre x tal que la recta que pasa por $(2, -3)$ y $(3, 2)$ sea perpendicular a la recta que pasa por $(-2, 4)$ y $(x, -1)$.
26. Encuentre x tal que la recta que pasa por $(2, -3)$ y $(3, 2)$ sea paralela a la recta que pasa por $(-2, 4)$ y $(x, -1)$.

En los ejercicios 27 al 32 trace la recta descrita.

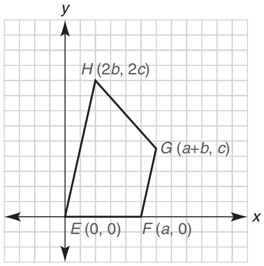
27. A través de $(3, -2)$ y con $m = 2$.
28. A través de $(-2, -5)$ y con $m = \frac{5}{7}$.
29. Con intersección $y = 5$ y con $m = -\frac{3}{4}$.
30. Con intersección $x = -3$ y con $m = 0.25$.
31. A través de $(-2, 1)$ y paralela a la recta $2x - y = 6$.
32. A través de $(-2, 1)$ y perpendicular a la recta que tiene intersecciones $a = -2$ y $b = 3$.
33. Utilice las pendientes para decidir si el triángulo con vértices en $(6, 5)$, $(-3, 0)$ y $(4, -2)$ es un triángulo rectángulo.
34. Si $A(2, 2)$, $B(7, 3)$ y $C(4, x)$ son los vértices de un triángulo rectángulo con ángulo recto C, encuentre el valor de x.
***35.** Si $(2, 3)$, $(5, -2)$ y $(7, 2)$ son tres vértices (no necesariamente consecutivos) de un paralelogramo, encuentre las localizaciones posibles del cuarto vértice.
36. Tres vértices del rectángulo $ABCD$ son $A(-5, 1)$, $B(-2, -3)$ y $C(6, y)$. Encuentre el valor de y y también el cuarto vértice.
37. Demuestre que el cuadrilátero $RSTV$ es un trapezoide isósceles.



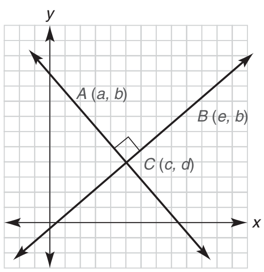
38. Demuestre que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.



39. El cuadrilátero $EFGH$ tiene los vértices $E(0, 0)$, $F(a, 0)$, $G(a + b, c)$ y $H(2b, 2c)$. Compruebe que $EFGH$ es un trapezoide demostrando que las pendientes de dos lados son iguales.



40. Encuentre una ecuación que comprenda a, b, c, d y e si $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BC}$. *(SUGERENCIA: Utilice pendientes.)*



41. Demuestre que si dos rectas no verticales son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.

(SUGERENCIA: Vea la figura 10.18.)

***42.** Demuestre que si dos rectas (ninguna horizontal ni vertical) son perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es -1.

(SUGERENCIA: Vea la figura 10.19. Usted necesita demostrar y usar el hecho de que $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.)

***43.** Si $m < 0$ y $b > 0$, la gráfica de $y = mx + b$ (junto con los ejes x y y) determina una región triangular en el cuadrante I. Encuentre una expresión para el área del triángulo en términos de m y b.

***44.** Si $m > 0$, $a > 0$ y $b > 0$, la gráfica de $y = mx + b$, los ejes y la recta vertical a través de $(a, 0)$ determinan una región trapezoidal en el cuadrante I. Encuentre una expresión para el área de este trapezoide en términos de a, b y m.

10.3 Preparación para realizar demostraciones analíticas

CONCEPTOS CLAVE Fórmulas y relaciones | Colocación de la figura

En esta sección se establecen las bases para la construcción de demostraciones analíticas de teoremas geométricos. Una demostración analítica requiere el uso del sistema coordenado y de la aplicación de fórmulas que se encuentran en secciones anteriores de este capítulo. Debido a la necesidad de estas fórmulas, a continuación se presenta un resumen. Asegúrese de memorizarlas y de saber cuándo y cómo utilizarlas.

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Distancia	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Punto medio	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
Pendiente	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ donde $x_1 \neq x_2$
Relaciones especiales para rectas	$\ell_1 \parallel \ell_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$ $\ell_1 \perp \ell_2 \leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

NOTA: Ni ℓ_1 ni ℓ_2 son rectas verticales en las afirmaciones anteriores.

GÉE

Ejercicios 1-6

Para ver cómo podría usarse la lista anterior, considere los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1

Suponga que va a demostrar las relaciones siguientes:

a) Dos rectas son paralelas.
b) Dos rectas son perpendiculares.
c) Dos segmentos de recta son congruentes.

¿Cuál(es) fórmula(s) utilizaría? ¿Cómo completaría la demostración?

Solución

a) Utilice la fórmula de la pendiente para encontrar la pendiente de cada recta. Luego demuestre que las pendientes son iguales.
b) Utilice la fórmula de la pendiente para encontrar la pendiente de cada recta. Luego demuestre que $m_1 \cdot m_2 = -1$.
c) Utilice la fórmula de la distancia para encontrar la longitud de cada segmento de recta. Luego demuestre que las longitudes resultantes son iguales. ■

El ejemplo siguiente tiene una demostración que es sutil. Se presenta un dibujo para ayudarle a comprender el concepto.

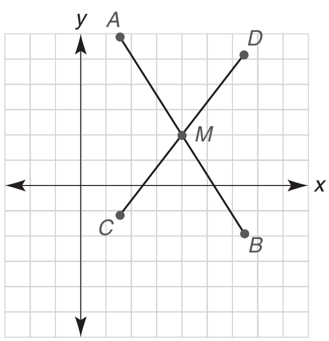


Figura 10.22

EJEMPLO 2

¿Cómo se puede emplear la fórmula del punto medio para comprobar que los dos segmentos de recta que se muestran en la figura 10.22 se bisecan entre sí?

Solución Si $\overline{AB}$ biseca $\overline{CD}$ y viceversa, entonces M es el punto medio común de los dos segmentos de recta. La fórmula del punto medio se utiliza para encontrar el punto medio de cada segmento de recta y luego se demuestra que los resultados son el mismo punto. Esto establece que cada segmento de recta se ha bisecado en un punto que está en el otro segmento de recta. ■

EJEMPLO 3

Suponga que la recta ℓ_1 tiene pendiente $\frac{c}{d}$. Utilice este hecho para identificar las pendientes de las rectas siguientes:

a) ℓ_2 si $\ell_1 \parallel \ell_2$
b) ℓ_3 si $\ell_1 \perp \ell_3$

Solución

a) $m_2 = \frac{c}{d}$ $\quad$ ($m_1 = m_2$ cuando $\ell_1 \parallel \ell_2$.)
b) $m_3 = -\frac{d}{c}$ $\quad$ ($m_1 \cdot m_3 = -1$ cuando $\ell_1 \perp \ell_3$.) ■

EJEMPLO 4

¿Qué puede concluir si sabe que el punto (p, q) se encuentra en la recta $y = mx + b$?

GEE
Ejercicios 7-9

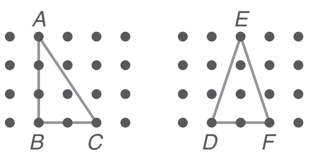
Solución Como (p, q) está en la recta, también es una solución para la ecuación $y = mx + b$. Por tanto, $q = mp + b$. ■

Para construir demostraciones de teoremas geométricos utilizando métodos analíticos se debe emplear la hipótesis para determinar el dibujo. A diferencia de los dibujos en los capítulos 1-9, la figura se debe colocar en el sistema coordenado. Hacer el dibujo requiere una colocación cuidadosa de la figura y la identificación adecuada de los vértices, utilizando coordenadas del sistema rectangular. Las directrices siguientes deben ser útiles al posicionar la figura y nombrar sus vértices.

Descubra

El tablero geométrico (o tablero de clavijas) crea un sistema coordenado por sí mismo. Aunque las coordenadas de los vértices no se nombran describa el tipo de triángulo que representa:

a) $\triangle ABC$ b) $\triangle DEF$



RESPUESTAS
a) Rectángulo b) Isósceles

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ El dibujo para una demostración analítica

Algunas consideraciones para preparar el dibujo:

1. Las coordenadas de los vértices deben ser generales; por ejemplo, se puede utilizar (a, b) como un vértice, pero *no* se debe utilizar un punto como (2, 3).
2. Haga que el dibujo satisfaga la hipótesis sin proporcionar ningunas cualidades adicionales; si el teorema describe un rectángulo trace e identifique un rectángulo pero *no* un cuadrado.
3. Por simplicidad en sus cálculos coloque la figura en el sistema coordenado rectangular, de tal manera que
   a) se utilicen tantas coordenadas 0 como sea posible.
   b) las coordenadas restantes representen números positivos debido al posicionamiento de los vértices restantes en el cuadrante I.

NOTA: En algunos casos es conveniente colocar una figura tal que tenga simetría respecto al eje y, en cuyo caso se presentan algunas coordenadas negativas.

4. Cuando sea posible utilice segmentos de rectas horizontales y verticales ya que conoce sus relaciones paralelas y perpendiculares.
5. Utilice la menor cantidad de nombres de variables en las coordenadas como sea posible.

Ahora considere el ejemplo 5 que aclara la lista de sugerencias que se encuentra en la “Estrategia para una demostración”. Conforme observe el dibujo en cada parte del ejemplo, imagine que el $\triangle ABC$ se ha cortado de una pieza de cartón y que se colocó en el sistema coordenado en la posición que se indica. Puesto que se tiene libertad de colocación se elige la posición que permita obtener la solución más simple para una demostración o problema.

EJEMPLO 5

Suponga que necesita hacer un dibujo para el teorema siguiente, que se demostrará analíticamente: “El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices del triángulo.” Explique por qué se podría mejorar la colocación del $\triangle ABC$ en cada parte de la figura 10.23 en la página 469. ■

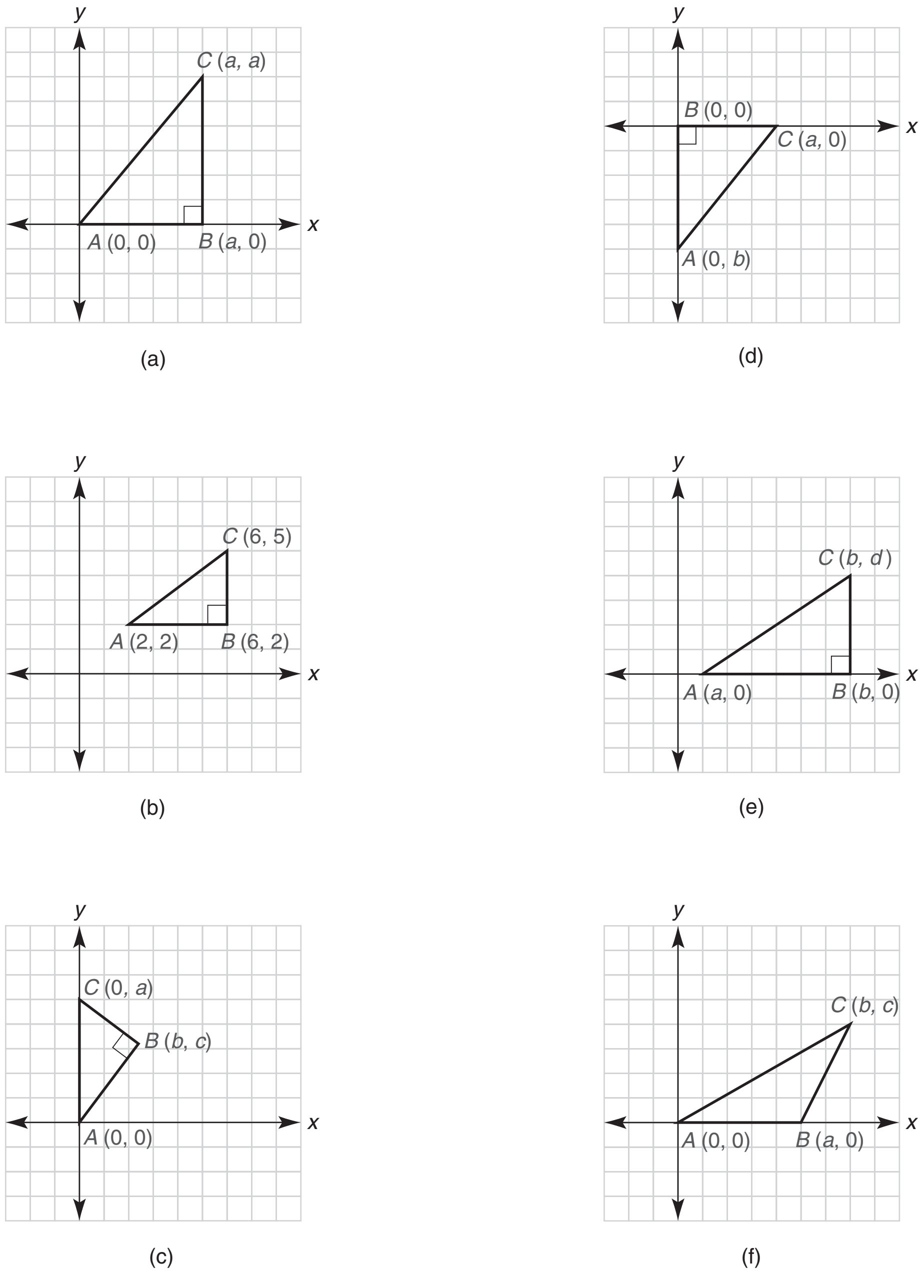


Figura 10.23

Solución Vea la figura 10.23.

a) La elección de los vértices ocasiona que $AB = BC$, por lo que el triángulo también es un triángulo isósceles. Esto contradice el punto 2 de las lista de sugerencias.
b) ¡Las coordenadas son demasiado específicas! Esto contradice el punto 1 de la lista. Una demostración con estas coordenadas *no* establecería el caso general.
c) En el dibujo no se utilizan rectas horizontales ni verticales para obtener el ángulo recto. Esto viola el punto 4 de la lista.
d) Esta colocación falla en el punto 3 de la lista, ya que b es un número negativo. La longitud de $\overline{AB}$ sería $-b$, lo que podría ser confuso.
e) Esta colocación falla en el punto 3 debido a que no se utilizaron tantas coordenadas 0 como podrían haberse utilizado. Como se verá esto también falla en el punto 5.
f) Esta colocación falla en el punto 2. El triángulo no es un triángulo rectángulo a menos que $a = b$. ■

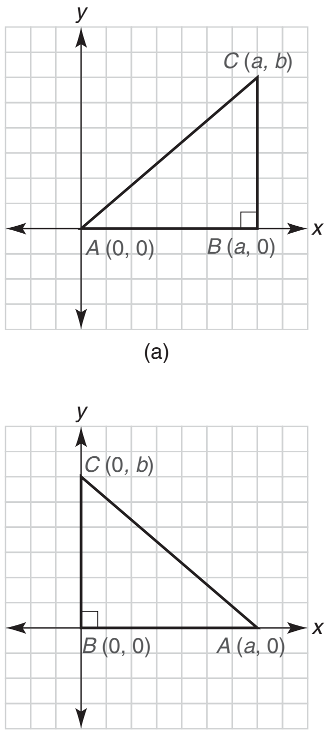


Figura 10.24

En el ejemplo 5 se quiso colocar el $\triangle ABC$ de tal manera que se cumplieron tantas condiciones como fue posible de las listadas en la página 468. En la figura 10.24 se indican dos colocaciones convenientes. El triángulo en la figura 10.24(b) es ligeramente mejor que el de la figura 10.24(a) ya que utiliza cuatro coordenadas 0 en vez de tres. Otra ventaja de la figura 10.24(b) es que la colocación obliga a que el ángulo B sea recto, debido a que los ejes x y y son perpendiculares.

Ahora se estudiará el papel que desempeña la conclusión del teorema para la demostración. En una segunda lista se examinan algunas consideraciones para demostrar enunciados de forma analítica.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ La conclusión para una demostración analítica

Tres consideraciones para utilizar la conclusión como una guía:

1. Si la conclusión es una conjunción "P y Q", asegúrese de comprobar las dos partes de la conclusión.

2. Los pares siguientes indican cómo demostrar enunciados del tipo que se muestra en la columna izquierda.

Para demostrar la conclusión:	*Utilice la:*
a) Los segmentos son congruentes o tienen longitudes iguales (como $AB = CD$).	Fórmula de la distancia
b) Los segmentos son paralelos (como $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$).	Fórmula de la pendiente (se necesita $m_{\overline{AB}} = m_{\overline{CD}}$).
c) Los segmentos son perpendiculares (como $\overline{AB} \perp \overline{CD}$).	Fórmula de la pendiente (se necesita $m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{CD}} = -1$)
d) Se biseca un segmento.	Fórmula de la distancia
e) Los segmentos se bisecan entre sí.	Fórmula del punto medio

3. Anticipe la demostración considerando los pasos en la demostración en orden inverso.

Ejercicios 10-15

EJEMPLO 6

a) Haga un esquema ideal para el teorema siguiente: El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de tres vértices del triángulo.

b) Al estudiar el teorema nombre al menos dos de las fórmulas que se emplearán para completar la demostración.

Solución

a) Se mejora la figura 10.24(b) dándole el valor $2a$ a la coordenada x de A y el valor $2b$ a la coordenada y de C. (Un factor de 2 facilita calcular y representar el punto medio M de $\overline{AC}$. Vea la figura 10.25.)

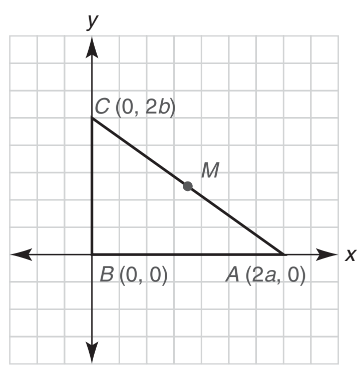
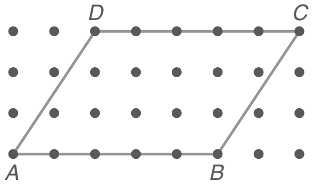


Figura 10.25

Descubra

El tablero geométrico (tablero de clavijas) crea un sistema coordenado por sí mismo. Describa el tipo de cuadrilátero representado por *ABCD*.



RESPUESTA
Paralelogramo

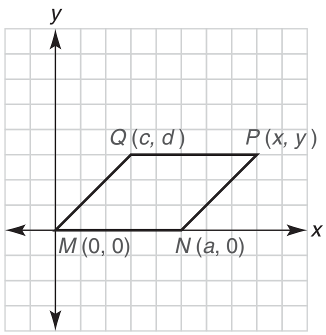


Figura 10.26

b) Se aplica la fórmula del punto medio para describir el punto medio de $\overline{AC}$. Utilizando la fórmula, se encuentra que

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{2a + 0}{2}, \frac{0 + 2b}{2}\right) = \left(\frac{2a}{2}, \frac{2b}{2}\right) = (a, b)$$

Por tanto, el punto medio es (a, b). La fórmula de la distancia será también necesaria ya que el teorema establece que las distancias de M a A, de M a B y de M a C deben ser iguales. ■

El objetivo del ejemplo siguiente es demostrar la eficiencia en el etiquetado de los vértices. El propósito es utilizar pocas variables al caracterizar los vértices del paralelogramo de la figura 10.26.

EJEMPLO 7

Si *MNPQ* es un paralelogramo en la figura 10.26, encuentre las coordenadas del punto *P* en términos de *a*, *c* y *d*.

Solución Considere el $\square MNPQ$ en donde al punto P se le refiere como (x, y). Debido a que $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, se tiene $m_{\overline{MN}} = m_{\overline{QP}}$. Pero $m_{\overline{MN}} = \frac{0-0}{a-0} = 0$ y $m_{\overline{QP}} = \frac{y-d}{x-c}$, lo que conduce a la ecuación

$$\frac{y-d}{x-c} = 0 \rightarrow y - d = 0 \rightarrow y = d$$

Ahora P se describe con (x, d). Debido a que $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$, también conduce a pendientes iguales para estos segmentos. Pero

$$m_{\overline{MQ}} = \frac{d-0}{c-0} = \frac{d}{c} \qquad \text{y} \qquad m_{\overline{NP}} = \frac{d-0}{x-a} = \frac{d}{x-a}$$

Entonces
$$\frac{d}{c} = \frac{d}{x-a}$$

Utilizando la propiedad medios-extremos, se tiene

$$\begin{aligned} d(x-a) &= d \cdot c && \textbf{(con } d \neq 0\textbf{)} \\ x - a &= c && \textbf{(dividiendo entre } d\textbf{)} \\ x &= a + c && \textbf{(sumando } a\textbf{)} \end{aligned}$$

Por tanto, P es el punto $(a + c, d)$. ■

En retrospectiva, el ejemplo 7 demuestra que el $\square MNPQ$ se caracteriza por los vértices $M(0, 0)$, $N(a, 0)$, $P(a + c, d)$ y $Q(c, d)$. Como $\overline{MN}$ y $\overline{QP}$ son segmentos horizontales, es obvio que $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$. Tanto $\overline{MQ}$ (iniciando en M) como $\overline{NP}$ (iniciando en N) trazan trayectorias que se mueven a lo largo de cada segmento *c unidades hacia la derecha* y *d unidades hacia arriba*. Por tanto, las pendientes de $\overline{MQ}$ y $\overline{NP}$ son $\frac{d}{c}$ y se deduce que $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$.

En el ejemplo 7 se nombraron las coordenadas de los vértices de un paralelogramo con el menor número de letras posible. Ahora se amplía el resultado del ejemplo 7 para un rombo; un paralelogramo con dos lados adyacentes congruentes.

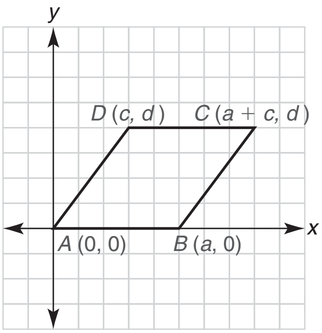


Figura 10.27

EJEMPLO 8

En la figura 10.27 encuentre una ecuación que relacione a, c y d si el $\square ABCD$ es un rombo.

Solución Como se vio en el ejemplo 7, las coordenadas de los vértices de $ABCD$ definen un paralelogramo. Para enfatizar, se observa que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ya que

$$m_{\overline{AB}} = m_{\overline{DC}} = 0 \qquad \text{y} \qquad m_{\overline{AD}} = m_{\overline{BC}} = \frac{d}{c}$$

Para que la figura 10.27 represente un rombo es necesario que $AB = AD$. Ahora $AB = a - 0 = a$ ya que $\overline{AB}$ es un segmento horizontal. Para encontrar una expresión para la longitud de $\overline{AD}$ se necesita la fórmula de la distancia.

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(c - 0)^2 + (d - 0)^2} \\ &= \sqrt{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

GEE
Ejercicios 16-18

Como $AB = AD$, se tiene que $a = \sqrt{c^2 + d^2}$. Elevando al cuadrado, se obtiene la relación deseada, $a^2 = c^2 + d^2$. ■

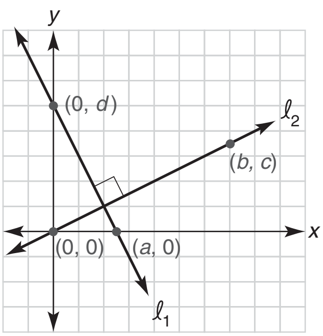


Figura 10.28

EJEMPLO 9

Si $\ell_1 \perp \ell_2$ en la figura 10.28 encuentre una relación entre las variables a, b, c y d.

Solución Primero se determinan las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2. Para ℓ_1, se tiene

$$m_1 = \frac{0 - d}{a - 0} = -\frac{d}{a}$$

Para ℓ_2, se tiene

$$m_2 = \frac{c - 0}{b - 0} = \frac{c}{b}$$

Con $\ell_1 \perp \ell_2$, se deduce que $m_1 \cdot m_2 = -1$. Sustituyendo las pendientes anteriores en la ecuación $m_1 \cdot m_2 = -1$, se tiene

$$-\frac{d}{a} \cdot \frac{c}{b} = -1 \qquad \text{por tanto} \qquad -\frac{dc}{ab} = -1$$

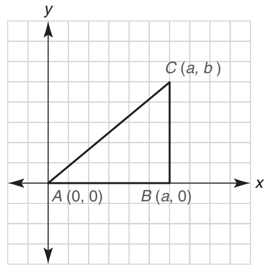
De manera equivalente, $\dfrac{dc}{ab} = 1$ y se deduce que $dc = ab$. ■

▶▶▶ Ejercicios 10.3

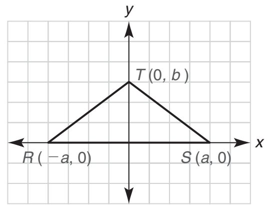
1. Encuentre una expresión para:
   a) La distancia entre $(a, 0)$ y $(0, a)$
   b) La pendiente del segmento que une (a, b) y (c, d)
2. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos
   a) $(a, 0)$ y $(0, b)$ b) $(2a, 0)$ y $(0, 2b)$
3. Encuentre la pendiente de la recta que contiene los puntos
   a) $(a, 0)$ y $(0, a)$ b) $(a, 0)$ y $(0, b)$
4. Encuentre la pendiente de la recta que es:
   a) Paralela a la recta que contiene $(a, 0)$ y $(0, b)$
   b) Perpendicular a la recta que pasa por $(a, 0)$ y $(0, b)$

En los ejercicios 5 al 10 los números reales a, b y c son positivos.

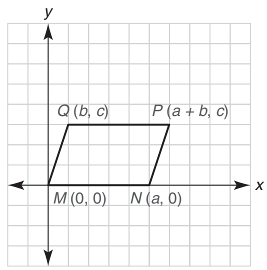
5. Considere el triángulo con vértices en $A(0, 0)$, $B(a, 0)$ y $C(a, b)$. Explique por qué el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.



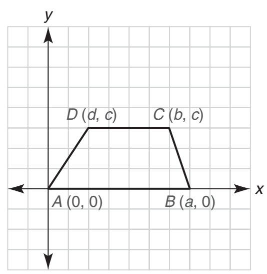
6. Considere el triángulo con vértices en $R(-a, 0)$, $S(a, 0)$ y $T(0, b)$. Explique por qué el $\triangle RST$ es un triángulo isósceles.



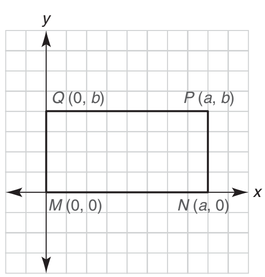
7. Considere el cuadrilátero con vértices en $M(0, 0)$, $N(a, 0)$, $P(a + b, c)$ y $Q(b, c)$. Explique por qué $MNPQ$ es un paralelogramo.



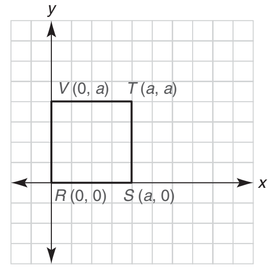
8. Considere el cuadrilátero con vértices en $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(b, c)$ y $D(d, c)$. Explique por qué $ABCD$ es un trapezoide.



9. Considere el cuadrilátero con vértices en $M(0, 0)$, $N(a, 0)$, $P(a, b)$ y $Q(0, b)$. Explique por qué $MNPQ$ es un rectángulo.

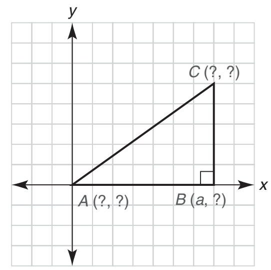


10. Considere el cuadrilátero con vértices en $R(0, 0)$, $S(a, 0)$, $T(a, a)$ y $V(0, a)$. Explique por qué $RSTV$ es un cuadrado.



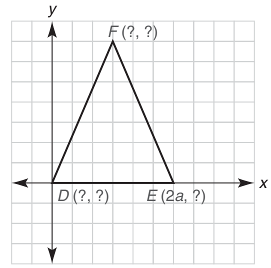
En los ejercicios 11 al 16 proporcione las coordenadas que faltan para los vértices, utilizando tan pocas variables como sea posible.

11.



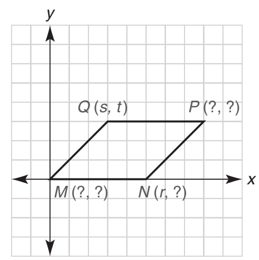
ABC es un triángulo rectángulo.

12.



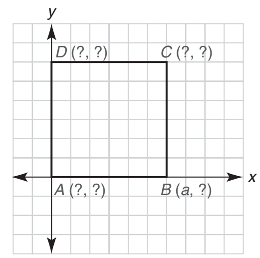
DEF es un triángulo isósceles con $\overline{DF} \cong \overline{FE}$.

13.



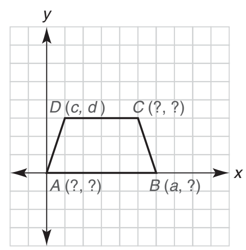
MNPQ es un paralelogramo.

14.



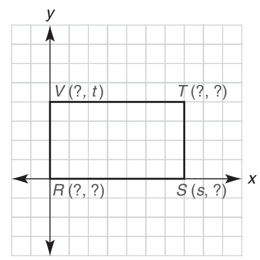
ABCD es un cuadrado.

15.



ABCD es un trapezoide isósceles; $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

16.



RSTV es un rectángulo.

En los ejercicios 17 al 22 trace una figura colocada idealmente en el sistema coordenado; luego nombre las coordenadas de cada vértice de la figura.

17. a) Un cuadrado
b) Un cuadrado (se necesitan los puntos medios de los lados)

18. a) Un rectángulo
b) Un rectángulo (se necesitan los puntos medios de los lados)

19. a) Un paralelogramo
b) Un paralelogramo (se necesitan los puntos medios de los lados)

20. a) Un triángulo
b) Un triángulo (se necesitan los puntos medios de los lados)

21. a) Un triángulo isósceles

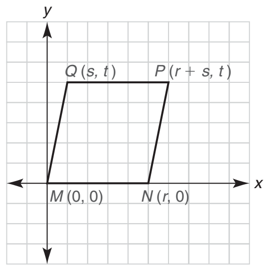
b) Un triángulo isósceles (se necesitan los puntos medios de los lados)

22. a) Un trapezoide

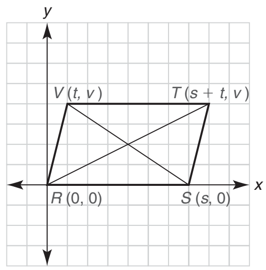
b) Un trapezoide (se necesitan los puntos medios de los lados)

En los ejercicios 23 al 28 encuentre la ecuación (relación) pedida. Luego elimine las fracciones y las raíces cuadradas de la ecuación.

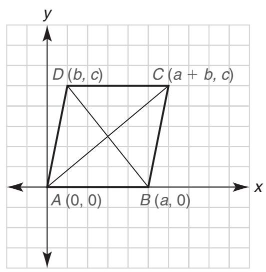
23. Si el $\square MNPQ$ es un rombo, deduzca una ecuación que relacione r, s y t.



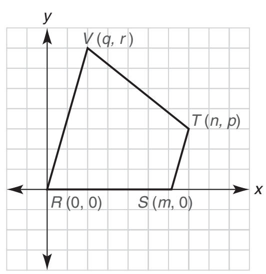
24. Para el $\square RSTV$ suponga que $RT = VS$. Establezca una ecuación que relacione s, t y v.



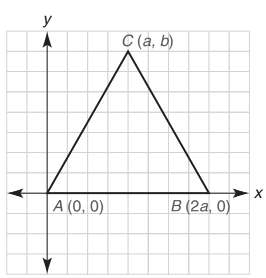
25. Para el $\square ABCD$ suponga que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ son perpendiculares. Establezca una ecuación que relacione a, b y c.



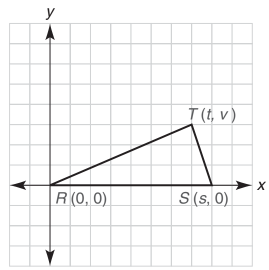
26. Para el cuadrilátero $RSTV$ suponga que $\overline{RV} \parallel \overline{ST}$. Establezca una ecuación que relacione m, n, p, q y r.



27. Suponga que el $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero. Establezca una ecuación que relacione las variables a y b.



28. Suponga que el $\triangle RST$ es un triángulo isósceles, con $\overline{RS} \cong \overline{RT}$. Establezca una ecuación que relacione s, t y v.

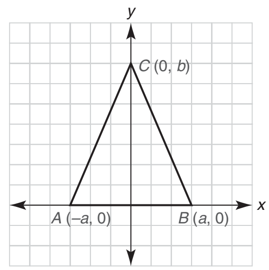


29. El dibujo ilustra un $\triangle ABC$ isósceles con $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

a) ¿Qué tipo de número es a?

b) ¿Qué tipo de número es $-a$?

c) Deduzca una expresión para la longitud de $\overline{AB}$.

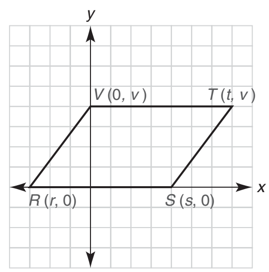


30. El dibujo muestra un paralelogramo $RSTV$.

a) ¿Qué tipo de número es r?

b) Encuentre una expresión para RS.

c) Describa la coordenada t en términos de las otras variables que se indican.



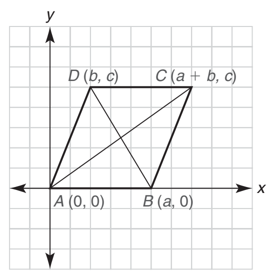
31. ¿Cuál fórmula utilizaría para establecer cada una de las afirmaciones siguientes?

a) $\overline{AC} \perp \overline{DB}$

b) $AC = DB$

c) $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$ se bisecan entre sí

d) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



ABCD es un paralelogramo.

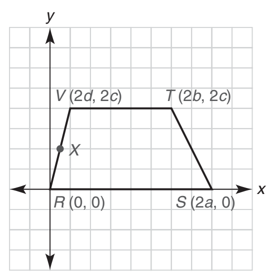
32. ¿Cuál fórmula utilizaría para establecer cada una de las afirmaciones siguientes?

a) Las coordenadas de X son (d, c)

b) $m_{\overline{VT}} = 0$

c) $\overline{VT} \parallel \overline{RS}$

d) La longitud de $\overline{RV}$ es $2\sqrt{d^2 + c^2}$.



Trapezoide *RSTV*; *X* es el punto medio de $\overline{RV}$.

En los ejercicios 33 al 36 trace e identifique una figura bien colocada en el sistema coordenado para cada teorema. ¡No intente demostrar el teorema!

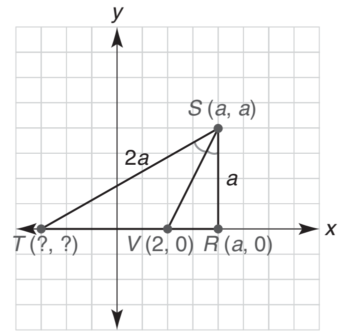
33. El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados no paralelos de un trapezoide es paralelo a cada base del trapezoide.

***34.** Si los puntos medios de los lados de un cuadrilátero se unen en orden, el cuadrilátero resultante es un paralelogramo.

35. Las diagonales de un rectángulo tienen la misma longitud.

36. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.

37. En el $\triangle RST$, $\overline{SV}$ biseca el $\angle RST$. Encuentre las coordenadas del punto T en términos de a.



10.4 Demostraciones analíticas

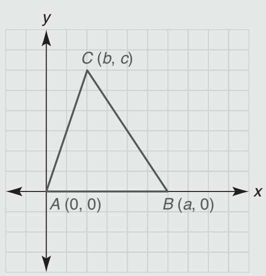
CONCEPTOS CLAVE Demostración analítica Demostración sintética

Cuando se emplea álgebra junto con el sistema coordenado rectangular para demostrar un teorema geométrico, el método de demostración es **analítico**. El método analítico (algebraico) se basa en gran medida en la colocación de la figura en el sistema coordenado y en la aplicación de la fórmula de la distancia, la fórmula del punto medio o la fórmula de la pendiente (en el momento apropiado). Para contrastar la demostración analítica con la demostración **sintética** (las demostraciones a dos columnas o demostraciones en párrafo utilizadas en capítulos anteriores), en esta sección se repiten y se demuestran analíticamente algunos teoremas anteriores.

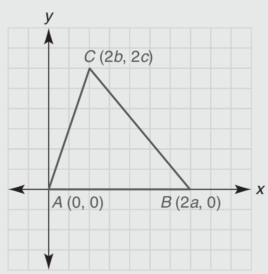
En la sección 10.3 se vio cómo colocar triángulos con cualidades especiales en el sistema coordenado. Esta información se repasa en la tabla 10.1 y luego, en el ejemplo 1,

TABLA 10.1

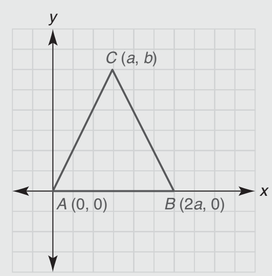
Demostración analítica: Sugerencias para la colocación del triángulo



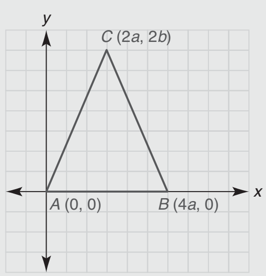
Triángulo general



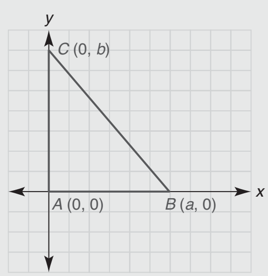
Triángulo general (puntos medios)



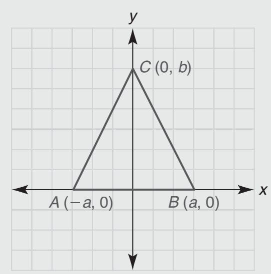
Triángulo isósceles



Triángulo isósceles (puntos medios)



Triángulo rectángulo

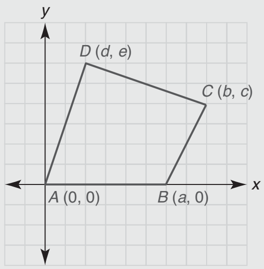


Triángulo equilátero (donde $2a = \sqrt{a^2 + b^2}$, por tanto $3a^2 = b^2$)

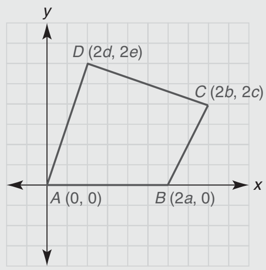
se considera la demostración de un teorema que implica triángulos. En la tabla 10.1 encontrará que la figura determinada por cualesquiera elecciones numéricas de a, b y c coincide con el tipo de triángulo descrito. Cuando se implican los puntos extremos se utilizan coordenadas como $2a$ y $2b$.

En la tabla 10.2 se repasan colocaciones convenientes para tipos de cuadriláteros.

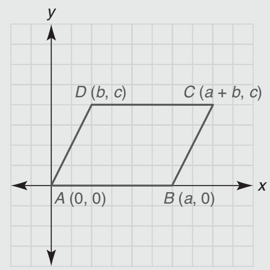
TABLA 10.2
Demostración analítica: Sugerencias para la colocación de cuadriláteros



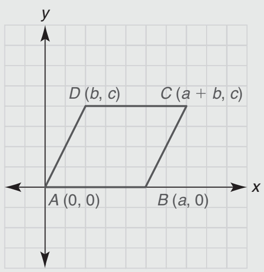
Cuadrilátero general



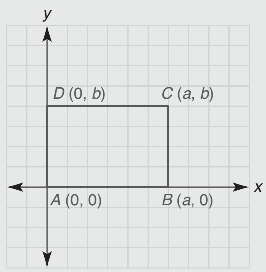
Cuadrilátero general
(puntos medios)



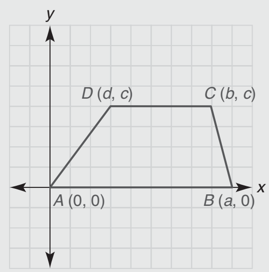
Paralelogramo



Rombo
(donde $a = \sqrt{b^2 + c^2}$
por tanto $a^2 = b^2 + c^2$)



Rectángulo



Trapezoide

GEE
Ejercicios 1-4

EJEMPLO 1

Demuestre el teorema siguiente mediante el método analítico (vea la figura 10.29).

TEOREMA 10.4.1

El segmento de recta determinado por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado.

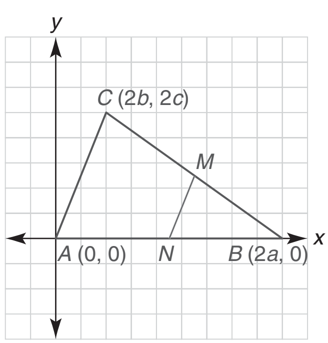


Figura 10.29

PLAN: Utilice la fórmula de la pendiente; si $m_{\overline{MN}} = m_{\overline{AC}}$, entonces $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$.

DEMOSTRACIÓN: Como se muestra en la figura 10.29, el $\triangle ABC$ tiene vértices en $A(0, 0)$, $B(2a, 0)$ y $C(2b, 2c)$. Con M el punto medio de $\overline{BC}$ y N el punto medio de $\overline{AB}$,

$$M = \left(\frac{2a + 2b}{2}, \frac{0 + 2c}{2}\right), \quad \text{que se simplifica a } (a + b, c)$$

$$N = \left(\frac{0 + 2a}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right), \quad \text{que se simplifica a } (a, 0)$$

Después se aplica la fórmula de la pendiente para determinar $m_{\overline{MN}}$ y $m_{\overline{AC}}$. Ahora $m_{\overline{MN}} = \frac{c - 0}{(a + b) - a} = \frac{c}{b}$; además, $m_{\overline{AC}} = \frac{2c - 0}{2b - 0} = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b}$. Como $m_{\overline{MN}} = m_{\overline{AC}}$, se observa que $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$. ■

Como se hizo en el ejemplo 1, se incluye un “plan” para el ejemplo 2. Aunque no se muestra un plan para el ejemplo 3 o para el ejemplo 4, se necesita uno antes de poder escribir la demostración.

EJEMPLO 2

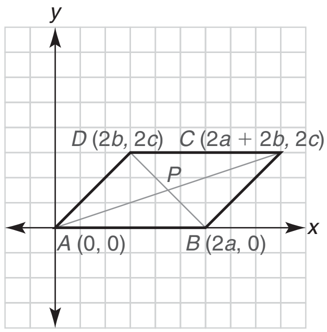


Figura 10.30

Demuestre el teorema siguiente mediante el método analítico. Vea la figura 10.30.

TEOREMA 10.4.2

Las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

PLAN: Utilice la fórmula del punto medio para demostrar que las dos diagonales tienen un punto medio común. Utilice un factor de 2 en las coordenadas.

DEMOSTRACIÓN: Con las coordenadas que se muestran en la figura 10.30, el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo. Las diagonales se intersecan en el punto *P*. Por la fórmula del punto medio, se tiene

$$M_{\overline{AC}} = \left(\frac{0 + (2a + 2b)}{2}, \frac{0 + 2c}{2}\right)$$
$$= (a + b, c)$$

Además, el punto medio de $\overline{DB}$ es

$$M_{\overline{DB}} = \left(\frac{2a + 2b}{2}, \frac{0 + 2c}{2}\right)$$
$$= (a + b, c)$$

GEE
Ejercicios 5-9

Por tanto, $(a + b, c)$ es el punto medio común de las dos diagonales y debe ser el punto de intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$. Entonces $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ se bisecan entre sí en el punto *P*. ■

¡La demostración del teorema 10.4.2 no es única! En la sección 10.5 se podría demostrar el teorema 10.4.2 siguiendo una demostración de tres pasos:

1. Determine las ecuaciones de las dos rectas.
2. Determine el punto de intersección de estas rectas.
3. Demuestre que este punto de intersección es el punto medio común.

Pero la frase *se bisecan entre sí* en el teorema 10.4.2 implicó el uso de la fórmula del punto medio. El método del ejemplo 2 fue mucho más fácil e igual de válido que los tres pasos descritos antes. El uso de la fórmula del punto medio por lo general es el mejor método cuando aparece la frase *se bisecan entre sí* en el enunciado de un teorema.

Ahora se perfila el método de la demostración analítica.

ESTRATEGIA PARA UNA DEMOSTRACIÓN ▶ Realización de una demostración analítica

1. Lea el teorema con cuidado para distinguir la hipótesis y la conclusión. La hipótesis caracteriza la figura a emplear.
2. Utilice la hipótesis (y nada más) para determinar una colocación conveniente de la figura en el sistema coordenado rectangular. Luego etiquete la figura. Consulte las tablas 10.1 y 10.2

3. Si la hipótesis proporciona alguna cualidad especial, asegúrese de enunciarla al inicio en la demostración. (Por ejemplo, un rombo se debe describir como un paralelogramo que tiene dos lados adyacentes congruentes.)
4. Estudie la conclusión y diseñe un plan para demostrar esta afirmación; esto puede comprender un razonamiento hacia atrás desde la conclusión paso a paso hasta llegar a la hipótesis.
5. Escriba la demostración teniendo cuidado de ordenar apropiadamente los enunciados y de justificar cada uno de ellos.

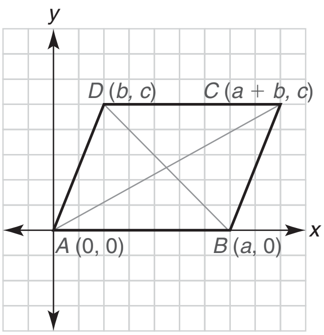


Figura 10.31

EJEMPLO 3

Demuestre el teorema 10.4.3 con el método analítico. (Vea la figura 10.31.)

TEOREMA 10.4.3

Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Solución En la figura 10.31 *ABCD* tiene las coordenadas de un paralelogramo.

Puesto que el $\square ABCD$ es un rombo, $AB = AD$. Luego $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ por la fórmula de la distancia y, elevando al cuadrado, obtenemos $a^2 = b^2 + c^2$.

La fórmula de la pendiente conduce a

$$m_{\overline{AC}} = \frac{c - 0}{(a + b) - 0} \quad \text{y} \quad m_{\overline{DB}} = \frac{0 - c}{a - b}$$

por tanto $$m_{\overline{AC}} = \frac{c}{a + b} \quad \text{y} \quad m_{\overline{DB}} = \frac{-c}{a - b}$$

Recuerde

Se comprobó que las rectas son perpendiculares, lo que demuestra que el producto de sus pendientes es -1.

Entonces el producto de las pendientes de las diagonales es

$$\begin{aligned} m_{\overline{AC}} \cdot m_{\overline{DB}} &= \frac{c}{a + b} \cdot \frac{-c}{a - b} \\ &= \frac{-c^2}{a^2 - b^2} \\ &= \frac{-c^2}{(b^2 + c^2) - b^2} \qquad \text{(reemplazando } a^2 \text{ por } b^2 + c^2\text{)} \\ &= \frac{-c^2}{c^2} = -1 \end{aligned}$$

Por tanto, $\overline{AC} \perp \overline{DB}$ ya que el producto de sus pendientes es igual a -1. ■

En el ejemplo 3 se tuvo que utilizar la condición de que dos lados adyacentes del rombo fueran congruentes para completar la demostración. Si se hubiera omitido la condición, no se hubiera demostrado que el producto de las pendientes es igual a -1. En general, las diagonales de un paralelogramo no son perpendiculares.

En el ejemplo siguiente se considera la demostración del recíproco de un teorema anterior. Aunque es fácil completar una demostración analítica del enunciado “Las diagonales de un rectángulo tienen la misma longitud”, la demostración del recíproco no es tan directa.

GEE *Ejercicios 10, 11*

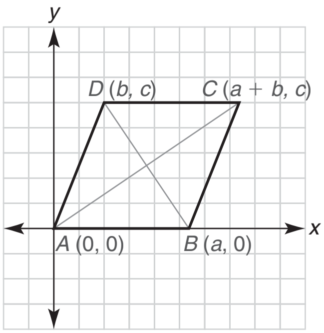


Figura 10.32

EJEMPLO 4

Demuestre el teorema 10.4.4 con el método analítico. Vea la figura 10.32.

TEOREMA 10.4.4

Si las diagonales de un paralelogramo tienen la misma longitud, entonces el paralelogramo es un rectángulo.

Solución En el paralelogramo $ABCD$ de la figura 10.32, $AC = DB$. Aplicando la fórmula de la distancia, se tiene

$$AC = \sqrt{[(a + b) - 0]^2 + (c - 0)^2}$$

y

$$DB = \sqrt{(a - b)^2 + (0 - c)^2}$$

Ya que las diagonales tienen la misma longitud,

$$\begin{aligned} \sqrt{(a + b)^2 + c^2} &= \sqrt{(a - b)^2 + (-c)^2} \\ (a + b)^2 + c^2 &= (a - b)^2 + (-c)^2 && \textbf{(elevando al cuadrado)} \\ a^2 + 2ab + b^2 + c^2 &= a^2 - 2ab + b^2 + c^2 && \textbf{(simplificando)} \\ 4ab &= 0 \\ a \cdot b &= 0 && \textbf{(dividiendo entre 4)} \end{aligned}$$

Por tanto, $a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$

Como $a \neq 0$ (de lo contrario, los puntos A y B coincidirían), es necesario que $b = 0$, por tanto el punto D se encuentra en el eje y. Las coordenadas resultantes de la figura son $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, c)$ y $D(0, c)$. Ya que $\overline{AB}$ es horizontal y $\overline{AD}$ es vertical, $ABCD$ debe ser un rectángulo con un ángulo recto en A. ■

Ejercicios 12, 13

Ejercicios 10.4

En los ejercicios 1 al 17 complete una demostración analítica para cada teorema.

1. Las diagonales de un rectángulo tienen la misma longitud.
2. Los lados opuestos de un paralelogramo tienen la misma longitud.
3. Las diagonales de un cuadrado son bisectores perpendiculares entre sí.
4. Las diagonales de un trapezoide isósceles tienen la misma longitud.
5. La mediana que va del vértice de un triángulo isósceles hasta la base es perpendicular a la base.
6. Las medianas a los lados congruentes de un triángulo isósceles tienen la misma longitud.
7. Los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero forman un paralelogramo.
8. Los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se bisecan entre sí.
9. Los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados consecutivos de un rectángulo forman un rombo.
10. Los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados consecutivos de un rombo forman un rectángulo.
11. El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices del triángulo.
12. La mediana de un trapezoide es paralela a las bases del trapezoide y tiene una longitud igual a la mitad de la suma de las longitudes de las dos bases.
13. El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene una longitud igual a la mitad del tercer lado.

14. El bisector perpendicular de la base de un triángulo isósceles contiene el vértice del triángulo.

15. Si el punto medio de un lado de un rectángulo se une a los puntos extremos del lado opuesto, entonces se forma un triángulo isósceles.

***16.** Si la mediana a un lado de un triángulo también es una altura del triángulo, entonces el triángulo es isósceles.

***17.** Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, entonces el paralelogramo es un rombo.

18. Utilice el método analítico para decidir qué tipo de cuadrilátero se forma cuando los puntos medios de los lados consecutivos de un paralelogramo se unen con segmentos de recta.

19. Utilice el método analítico para decidir qué tipo de triángulo se forma cuando los puntos medios de los lados de un triángulo isósceles se unen con segmentos de recta.

20. Utilice pendientes para comprobar que las gráficas de las ecuaciones

$$Ax + By = C \qquad \text{y} \qquad Ax + By = D$$

son paralelas.

(NOTA: $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C \neq D$.)

21. Utilice pendientes para comprobar que las gráficas de las ecuaciones

$$Ax + By = C \qquad \text{y} \qquad Bx - Ay = D$$

son perpendiculares.

(NOTA: $A \neq 0$ y $B \neq 0$.)

22. Utilice el resultado del ejercicio 20 para encontrar la ecuación de la recta que contiene (4, 5) y es paralela a la gráfica de $2x + 3y = 6$.

23. Utilice el resultado del ejercicio 21 para encontrar la ecuación de la recta que contiene (4, 5) y es perpendicular a la gráfica de $2x + 3y = 6$.

24. Utilice la fórmula de la distancia para demostrar que el círculo con centro (0, 0) y radio de longitud r tiene la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

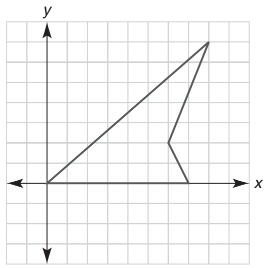
25. Utilice el resultado en el ejercicio 24 para encontrar la ecuación del círculo con centro (0, 0) y longitud del radio $r = 3$.

26. Utilice el resultado en el ejercicio 24 para encontrar la ecuación del círculo que tiene centro (0, 0) y contiene el punto (3, 4).

27. Suponga que el círculo con centro (0, 0) y longitud del radio r contiene el punto (a, b). Encuentre la pendiente de la recta tangente al círculo en el punto (a, b).

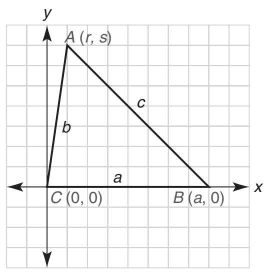
28. Considere el círculo con centro (h, k) y longitud del radio r. Si el círculo contiene el punto (c, d), encuentre la pendiente de la recta tangente al círculo en el punto (c, d).

29. ¿Seguiría siendo verdadero el teorema del ejercicio 7 para un cuadrilátero cóncavo como el que se ilustra?



Ejercicio 29

***30.** Complete una demostración analítica del teorema siguiente: en un triángulo que tiene lados de longitudes a, b y c, si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.



Ejercicio 30

10.5 Ecuaciones de rectas

CONCEPTOS CLAVE

- Forma pendiente-intersección de una recta
- Forma punto-pendiente de una recta
- Sistemas de ecuaciones

En la sección 10.2 se vio que ecuaciones como $2x + 3y = 6$ y $4x - 12y = 60$ tienen gráficas que son rectas. Para trazar una ecuación de la forma general $Ax + By = C$, con frecuencia dicha ecuación se reemplaza con una ecuación equivalente de la forma $y = mx + b$. Por ejemplo, $2x + 3y = 6$ se puede transformar en $y = -\frac{2}{3}x + 2$; a ecuaciones como éstas se les conoce como *equivalentes* debido a que sus soluciones de par ordenado (y sus gráficas) son idénticas. En particular, una ecuación lineal se debe expresar en la forma $y = mx + b$ para trazarla en una calculadora graficadora.

EJEMPLO 1

Escriba la ecuación $4x - 12y = 60$ en la forma $y = mx + b$.

Solución Dado $4x - 12y = 60$, se resta $4x$ a cada lado de la ecuación para obtener $-12y = -4x + 60$. Dividiendo entre -12,

$$\frac{-12y}{-12} = \frac{-4x}{-12} + \frac{60}{-12}$$

GEE

Ejercicios 1-3

Entonces $y = \frac{1}{3}x - 5$. ■

FORMA PENDIENTE-INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

Ahora se analizará un método para determinar la ecuación de una recta. En la siguiente técnica la ecuación se puede encontrar si se conocen la pendiente y la intersección y de la recta. La forma $y = mx + b$ se conoce como forma pendiente-intersección de una recta.

TEOREMA 10.5.1 ▶ (Forma pendiente-intersección de una recta)

La recta cuya pendiente es m y cuya intersección y es b tiene la ecuación $y = mx + b$.

DEMOSTRACIÓN

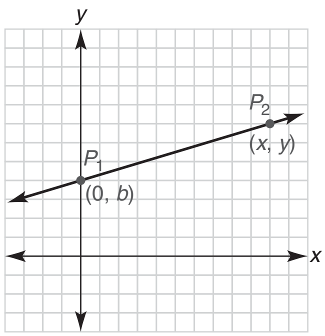


Figura 10.33

Considere la recta cuya pendiente es m (vea la figura 10.33). Utilizando la fórmula de la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

se designa (x, y) como P_2 y $(0, b)$ como P_1. Entonces

$$m = \frac{y - b}{x - 0} \qquad \text{o} \qquad m = \frac{y - b}{x}$$

Multiplicando por x, se tiene $mx = y - b$. Entonces $mx + b = y$, o $y = mx + b$. ■

Descubra

Utilice una calculadora graficadora para trazar $Y_1 = x$, $Y_2 = x^2$ y $Y_3 = x^3$. ¿Cuál o cuáles de éstas son rectas?

RESPUESTA

$Y_1 = x$

EJEMPLO 2

Encuentre la ecuación general $Ax + By = C$ para la recta con pendiente $m = -\frac{2}{3}$ e intersección y es -2.

Solución Con $y = mx + b$, se tiene

$$y = -\frac{2}{3}x - 2$$

Multiplicando por 3 se obtiene

$$3y = -2x - 6 \qquad \text{por tanto} \qquad 2x + 3y = -6$$

NOTA: Una solución equivalente y correcta es $-2x - 3y = 6$. ■

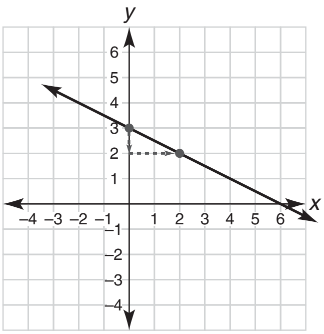


Figura 10.34

Con frecuencia es más fácil trazar una ecuación si está en la forma $y = mx + b$. Cuando una ecuación tiene esta forma se sabe que su gráfica es una recta que tiene pendiente m y que contiene $(0, b)$.

EJEMPLO 3

Trace la gráfica de $\frac{1}{2}x + y = 3$.

Solución Despejando y se tiene $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Entonces $m = -\frac{1}{2}$ y la intersección y es 3.

Primero se traza el punto (0, 3). Puesto que $m = -\frac{1}{2}$ o $\frac{-1}{2}$, el cambio vertical de -1 corresponde a un cambio horizontal de $+2$. Por tanto, el segundo punto se localiza 1 unidad abajo del primer punto y 2 unidades a la derecha del mismo. En la figura 10.34 se muestra el trazo de la recta. ■

Al observar de nuevo la figura 10.34 se ve que la gráfica contiene los puntos (2, 2) y (6, 0). Es fácil demostrar que los dos pares ordenados son soluciones para la ecuación $1/2x + y = 3$ del ejemplo 3.

FORMA PUNTO-PENDIENTE DE UNA RECTA

GEE *Ejercicios 4-8*

Si se conocen la pendiente m y un punto distinto de la intersección y de una recta, por lo general no se utiliza la forma pendiente-intersección para encontrar la ecuación de la recta. En su lugar se emplea la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta. Esta forma también se emplea cuando se conocen las coordenadas de dos puntos de la recta; en ese caso, el valor de m se determina mediante la fórmula de la pendiente. La forma $y - y_1 = m(x - x_1)$ se conoce como forma punto-pendiente de una recta.

TEOREMA 10.5.2 ▶ (Forma punto-pendiente de una recta)

La recta que tiene pendiente m y que contiene el punto (x_1, y_1) tiene la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

DEMOSTRACIÓN

Sea P_1 el punto dado (x_1, y_1) en la recta y sea P_2 (x, y), que representa cualquier otro punto en la recta. (Vea la figura 10.35.) Utilizando la fórmula de la pendiente, se tiene

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Multiplicando la ecuación por $(x - x_1)$ se obtiene

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

Se deduce que

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

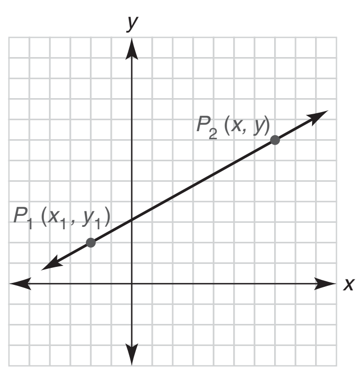


Figura 10.35 ■

EJEMPLO 4

Encuentre la ecuación general, $Ax + By = C$, para la recta que tiene la pendiente $m = 2$ y que contiene el punto $(-1, 3)$.

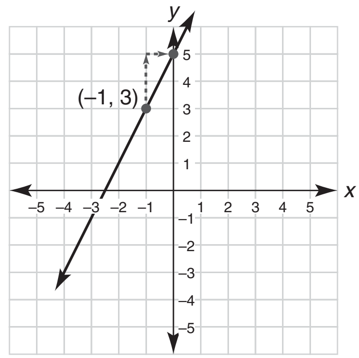


Figura 10.36

Solución Se tiene $m = 2$, $x_1 = -1$ y $y_1 = 3$. Aplicando la forma punto-pendiente, se determina que la recta en la figura 10.36 tiene la ecuación

$$\begin{aligned} y - 3 &= 2[x - (-1)] \\ y - 3 &= 2(x + 1) \\ y - 3 &= 2x + 2 \\ -2x + y &= 5 \end{aligned}$$

■

Una respuesta equivalente para el ejemplo 4 es la ecuación $2x - y = -5$. La forma $y = 2x + 5$ enfatiza que la pendiente es $m = 2$ y que la intersección y es $(0, 5)$. Con $m = 2$, o $\frac{2}{1}$, el cambio vertical de 2 corresponde a un cambio horizontal de 1. Vea la figura 10.36.

EJEMPLO 5

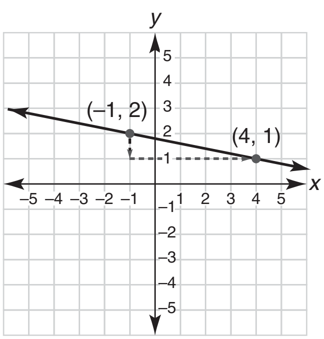


Figura 10.37

Encuentre una ecuación para la recta que contiene los puntos $(-1, 2)$ y $(4, 1)$.

Solución Para utilizar la forma punto-pendiente, se necesita conocer la pendiente de la recta (vea la figura 10.37). Cuando se elige $P_1(-1, 2)$ y $P_2(4, 1)$, la fórmula de la pendiente se escribe como

$$m = \frac{1 - 2}{4 - (-1)} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$$

Por tanto, $$y - 2 = -\frac{1}{5}[x - (-1)]$$

Entonces $$y - 2 = -\frac{1}{5}[x + 1]$$

y $$y - 2 = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$$

Multiplicando la ecuación por 5, se obtiene

$$5y - 10 = -1x - 1 \qquad \text{por tanto} \qquad x + 5y = 9$$

NOTA: Otras formas de la respuesta son $-x - 5y = -9$ y $y = -\frac{1}{5}x + \frac{9}{5}$. En cualquier forma correcta los puntos dados P_1 y P_2 deben satisfacer la ecuación. ■

En el ejemplo 6 se utiliza la fórmula punto-pendiente para encontrar una ecuación para una mediana de un triángulo.

GEE
Ejercicios 9-12

EJEMPLO 6

Para el $\triangle ABC$, los vértices son $A(0, 0)$, $B(2a, 0)$ y $C(2b, 2c)$. Encuentre la ecuación de la mediana $\overline{CM}$ en la forma $y = mx + b$. Vea la figura 10.38 en la página 484.

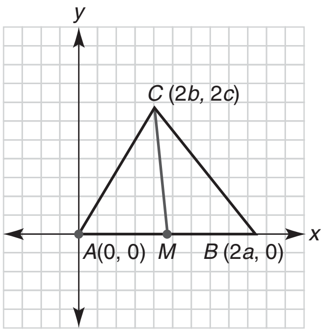


Figura 10.38

Solución Para que $\overline{CM}$ sea una mediana del $\triangle ABC$, M debe ser el punto medio de $\overline{AB}$. Entonces

$$M = \left(\frac{0 + 2a}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right) = (a, 0)$$

Para determinar una ecuación para $\overline{CM}$, también se necesita conocer su pendiente. Con $M(a, 0)$ y $C(2b, 2c)$ en $\overline{CM}$, la pendiente es $m_{\overline{CM}} = \frac{2c - 0}{2b - a}$ o $\frac{2c}{2b - a}$. Con $M = (a, 0)$ como el punto en la recta, $y - y_1 = m(x - x_1)$ se vuelve

$$y - 0 = \frac{2c}{2b - a}(x - a) \qquad \text{o} \qquad y = \frac{2c}{2b - a}x - \frac{2ac}{2b - a}$$

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

En capítulos anteriores se resolvieron sistemas de ecuaciones como

$$\begin{aligned} x + 2y &= 6 \\ 2x - y &= 7 \end{aligned}$$

utilizando la propiedad de la adición o de la sustracción de la igualdad. En el ejemplo 7 se repasa el método. La solución para el sistema es un par ordenado; de hecho, la solución es el punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones dadas.

Exploración tecnológica

Utilice una calculadora graficadora si dispone de ella.

1. Despeje y de cada ecuación del ejemplo 7.
2. Trace $Y_1 = -\left(\frac{1}{2}\right)x + 3$ y $Y_2 = 2x - 7$.
3. Utilice la tecla $\boxed{\text{Intersect}}$ para mostrar que la solución para el sistema es (4, 1).

EJEMPLO 7

Resuelva el sistema siguiente en forma algebraica:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - \ \ y = 7 \end{cases}$$

Solución Cuando la segunda ecuación se multiplica por 2, el sistema se convierte

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 4x - 2y = 14 \end{cases}$$

Sumando estas ecuaciones se obtiene $5x = 20$, por tanto $x = 4$. Sustituyendo $x = 4$ en la primera ecuación se obtiene $4 + 2y = 6$, por lo que $2y = 2$. Entonces $y = 1$. La solución es el par ordenado (4, 1).

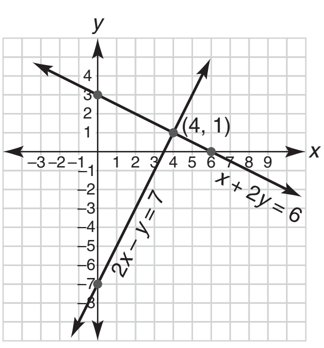


Figura 10.39

Otro método para resolver un sistema de ecuaciones es geométrico y requiere graficar. Resolver geométricamente consiste en determinar el punto de intersección de las gráficas lineales. Ese punto es el par ordenado que es la solución común (cuando existe) para las dos ecuaciones. Observe que en el ejemplo 8 se repite el sistema del ejemplo 7. Las gráficas de la exploración tecnológica deben tener la apariencia de la figura 10.39.

EJEMPLO 8

Resuelva el sistema siguiente graficando:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Solución Cada ecuación se cambia a la forma $y = mx + b$ de modo que al graficar se utilicen la pendiente y la intersección y:

$$x + 2y = 6 \rightarrow 2y = -1x + 6 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$
$$2x - y = 7 \rightarrow -y = -2x + 7 \rightarrow y = 2x - 7$$

La gráfica de $y = -\frac{1}{2}x + 3$ es una recta con intersección $y = 3$ y pendiente $m = -\frac{1}{2}$. La gráfica de $y = 2x - 7$ es una recta con intersección $y = -7$ y pendiente $m = 2$.

Las gráficas se trazan en el mismo sistema coordenado. Vea la figura 10.39. El punto de intersección (4, 1) es la solución común para cada una de las ecuaciones dadas y por tanto es la solución del sistema. ■

NOTA: Para comprobar el resultado de los ejemplos 7 y 8, se demuestra que (4, 1) satisface las dos ecuaciones dadas:

$$x + 2y = 6 \rightarrow 4 + 2(1) = 6 \text{ es } \textit{verdadero}.$$
$$2x - y = 7 \rightarrow 2(4) - 1 = 7 \text{ es } \textit{verdadero}.$$

La solución se comprueba ya que los dos enunciados son verdaderos.

Algunas de las ventajas del método geométrico de solución de un sistema de ecuaciones son las siguientes:

1. Es fácil comprender por qué un sistema como

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \quad \text{se puede reemplazar con} \quad \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 4x - 2y = 14 \end{cases}$$

cuando se resuelve por suma o resta. Se sabe que las gráficas de $2x - y = 7$ y $4x - 2y = 14$ son la misma recta ya que cada una se puede cambiar a la forma $y = 2x - 7$.

2. Es fácil comprender por qué un sistema como

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = -4 \end{cases}$$

no tiene solución. En la figura 10.40 las gráficas de estas ecuaciones son rectas paralelas. La primera ecuación es equivalente a $y = -\frac{1}{2}x + 3$ y la segunda se puede cambiar a $y = -\frac{1}{2}x - 1$. Las dos rectas tienen pendiente $m = -\frac{1}{2}$ pero tienen intersecciones diferentes. Por tanto, las rectas son paralelas.

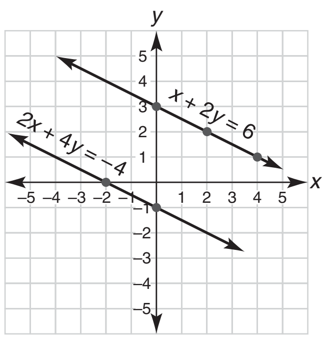


Figura 10.40

Para resolver un sistema de ecuaciones también se puede utilizar sustitución algebraica. En nuestro método se escribe cada ecuación en la forma $y = mx + b$ y luego se igualan las expresiones para y. Una vez que se conoce la coordenada x de la solución, se sustituye este valor de x en cualquier ecuación para encontrar el valor de y.

EJEMPLO 9

Utilice sustitución para resolver $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

Solución Despejando y, se tiene

$$x + 2y = 6 \rightarrow 2y = -1x + 6 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$
$$2x - y = 7 \rightarrow -1y = -2x + 7 \rightarrow y = 2x - 7$$

Igualando las expresiones para y se obtiene $-\frac{1}{2}x + 3 = 2x - 7$. Entonces $-2\frac{1}{2}x = -10$, o $-2.5x = -10$. Dividiendo entre -2.5, se obtiene $x = 4$. Sustituyendo 4 por x en la ecuación $y = 2x - 7$ se tiene $y = 2(4) - 7$, por tanto $y = 1$. La solución es el par ordenado (4, 1).

NOTA: La sustitución de $x = 4$ en la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + 3$ conduciría al mismo valor de y, que es $y = 1$. Por tanto se puede sustituir uno en cualquier ecuación. ■

GEE *Ejercicios 13-16*

El método que se ilustra en el ejemplo 9 también se emplea en el ejemplo final. En la demostración del teorema 10.5.3 se utilizan ecuaciones de rectas para determinar el centroide de un triángulo.

EJEMPLO 10

Formule un plan para completar la demostración del teorema 10.5.3. Vea la figura 10.41 de la página 487.

TEOREMA 10.5.3

Las tres medianas de un triángulo son congruentes en un punto que está a dos tercios de la distancia desde cualquier vértice hasta el punto medio del lado opuesto.

Solución La demostración se puede completar como sigue:

1. Encuentre las coordenadas de los dos puntos medios X y Y. Vea las figuras 10.41(a) y 10.41(b). Observe que

$$X = (a + b, c) \qquad \text{y} \qquad Y = (b, c)$$

2. Encuentre las ecuaciones de las rectas que contienen $\overline{AX}$ y $\overline{BY}$. Las ecuaciones para $\overline{AX}$ y $\overline{BY}$ son $y = \frac{c}{a+b}x$ y $y = \frac{-c}{2a-b}x + \frac{2ac}{2a-b}$, respectivamente.
3. Encuentre el punto de intersección Z de $\overline{AX}$ y $\overline{BY}$, como se muestra en la figura 10.41(b). Resolviendo el sistema se obtiene la solución

$$Z = \left(\frac{2}{3}(a + b), \frac{2}{3}c\right)$$

4. Ahora se puede demostrar que $AZ = \frac{2}{3} \cdot AX$ y $BZ = \frac{2}{3} \cdot BY$. Vea la figura 10.41(b) en donde se puede demostrar que

$$AZ = \frac{2}{3}\sqrt{(a + b)^2 + c^2} \qquad \text{y} \qquad AX = \sqrt{(a + b)^2 + c^2}$$

5. También se puede demostrar que Z se encuentra en la tercera mediana $\overline{CW}$, cuya ecuación es $y = \frac{2c}{2b-a}(x - a)$. Vea la figura 10.41(c).
6. También se puede demostrar que $CZ = \frac{2}{3} \cdot CW$, lo que completaría la demostración. ■

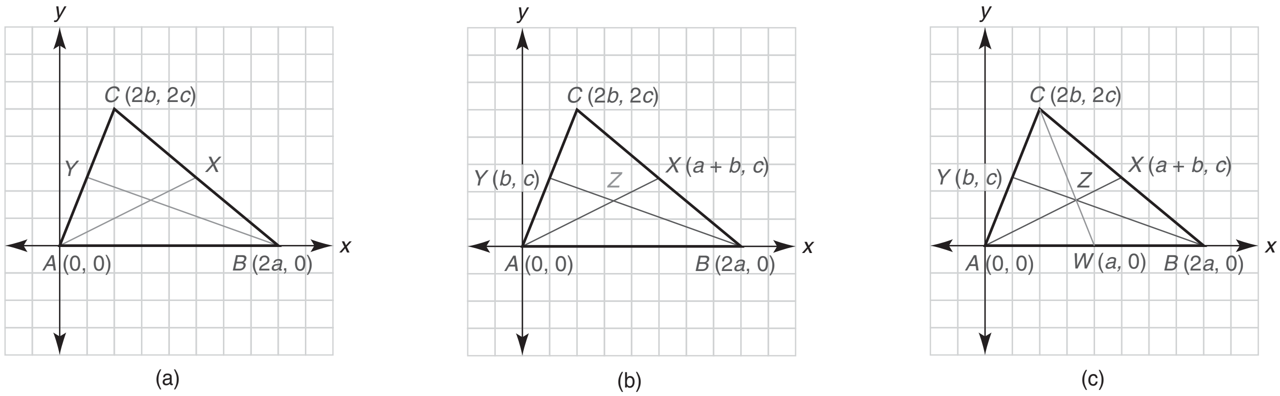


Figura 10.41

Ejercicios 10.5

En los ejercicios 1 al 4 utilice la división para escribir una ecuación de la forma $Ax + By = C$ que sea equivalente a la proporcionada. Luego escriba la ecuación dada en la forma $y = mx + b$.

1. $8x + 16y = 48$

2. $15x - 35y = 105$

3. $-6x + 18y = -240$

4. $27x - 36y = 108$

En los ejercicios 5 al 8 trace la gráfica de cada ecuación utilizando el método del ejemplo 3.

5. $y = 2x - 3$

6. $y = -2x + 5$

7. $\frac{2}{5}x + y = 6$

8. $3x - 2y = 12$

En los ejercicios 9 al 24 encuentre la ecuación de la recta descrita. Deje la solución en la forma $Ax + By = C$.

9. La recta tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$ y contiene (0, 5).

10. La recta tiene pendiente $m = -3$ y contiene (0, −2).

11. La recta contiene (2, 4) y (0, 6).

12. La recta contiene (−2, 5) y (2, −1).

13. La recta contiene (0, −1) y (3, 1).

14. La recta contiene (−2, 0) y (4, 3).

15. La recta contiene $(0, b)$ y $(a, 0)$.

16. La recta contiene (b, c) y tiene pendiente d.

17. La recta tiene intersecciones $a = 2$ y $b = -2$.

18. La recta tiene intersecciones $a = -3$ y $b = 5$.

19. La recta contiene (−1, 5) y es paralela a la recta $5x + 2y = 10$.

20. La recta contiene (0, 3) y es paralela a la recta $3x + y = 7$.

21. La recta contiene (0, −4) y es perpendicular a la recta $y = \frac{3}{4}x - 5$.

22. La recta contiene (2, −3) y es perpendicular a la recta $2x - 3y = 6$.

23. La recta es el bisector perpendicular del segmento de recta que une (3, 5) y (5, −1).

24. La recta es el bisector perpendicular del segmento de recta que une (−4, 5) y (1, 1).

En los ejercicios 25 y 26 encuentre la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$.

25. La recta contiene (g, h) y es *perpendicular* a la recta $y = \frac{a}{b}x + c$.

26. La recta contiene (g, h) y es *paralela* a la recta $y = \frac{a}{b}x + c$.

En los ejercicios 27 al 32 utilice álgebra para encontrar el punto de intersección de las dos rectas cuyas ecuaciones se proporcionan. Utilice el ejemplo 8 como guía.

27. $y = \frac{1}{2}x - 3$ y $y = \frac{1}{3}x - 2$

28. $y = 2x + 3$ y $y = 3x$

29. $2x + y = 6$ y $3x - y = 19$

30. $\frac{1}{2}x + y = -3$ y $\frac{3}{4}x - y = 8$

31. $4x + 3y = 18$ y $x - 2y = 10$

32. $2x + 3y = 3$ y $3x - 2y = 24$

En los ejercicios 33 al 38 utilice álgebra para encontrar el punto de intersección de las dos rectas cuyas ecuaciones se proporcionan. Utilice el ejemplo 7 como guía.

33. $2x + y = 8$ y $3x - y = 7$

34. $2x + 3y = 7$ y $x + 3y = 2$

35. $2x + y = 11$ y $3x + 2y = 16$

36. $x + y = 1$ y $4x - 2y = 1$

37. $2x + 3y = 4$ y $3x - 4y = 23$

38. $5x - 2y = -13$ y $3x + 5y = 17$

En los ejercicios 39 al 42 utilice sustitución para resolver el sistema. Utilice el ejemplo 9 como guía.

39. $y = \frac{1}{2}x - 3$ y $y = \frac{1}{3}x - 2$

40. $y = 2x + 3$ y $y = 3x$

41. $y = a$ y $y = bx + c$

42. $x = d$ y $y = fx + g$

43. Para el $\triangle ABC$, los vértices son $A(0, 0)$, $B(a, 0)$ y $C(b, c)$. En términos de a, b y c encuentre las coordenadas del ortocentro del $\triangle ABC$. (El ortocentro es el punto de concurrencia de las alturas de un triángulo.)

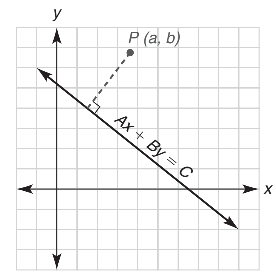
44. Para el $\triangle PNQ$ isósceles los vértices son $P(-2a, 0)$, $N(2a, 0)$ y $Q(0, 2b)$. En términos de a y b encuentre las coordenadas del circuncentro del $\triangle PNQ$. (El circuncentro es el punto de concurrencia de los bisectores perpendiculares de los lados de un triángulo.)

En los ejercicios 45 y 46 complete una demostración analítica para cada teorema.

45. Las alturas de un triángulo son concurrentes.

46. Los bisectores perpendiculares de los lados de un triángulo son concurrentes.

47. Describa los pasos del procedimiento que permite encontrar la distancia desde un punto $P(a, b)$ hasta la recta $Ax + By = C$.



PERSPECTIVA HISTÓRICA

La paradoja de Banach-Tarski

En la década de 1920 dos matemáticos polacos propusieron un dilema matemático a sus colegas. Conocida como la paradoja de Banach-Tarski, su propuesta ha intrigado a estudiantes de geometría durante décadas. ¡Lo más desconcertante era que la propuesta sugería que la materia se podría crear mediante el reacomodo de las piezas de una figura! Los pasos siguientes delinean la paradoja de Banach-Tarski.

Primero considere el cuadrado cuyos lados son cada uno de longitud 8. [Vea la figura 10.42(a).] Al contar los cuadrados o al aplicar una fórmula es claro que el cuadrado de 8 por 8 debe tener un área de 64 unidades cuadradas. Ahora se subdivide el cuadrado (como se muestra) para formar dos triángulos y dos trapezoides. Observe las dimensiones que se indican en cada pieza del cuadrado en la figura 10.42(b).

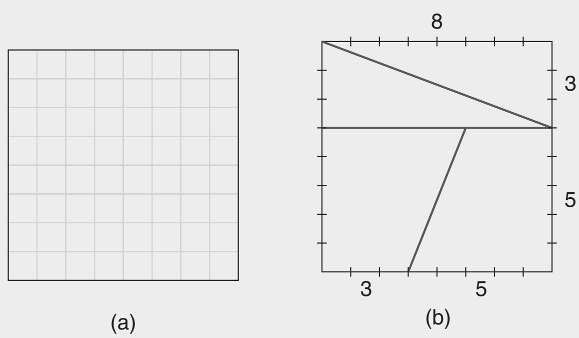


Figura 10.42

Ahora las partes del cuadrado se reacomodan para formar un rectángulo (vea la figura 10.43) cuyas dimensiones son 13 y 5. Este rectángulo claramente tiene un área que mide 65 unidades cuadradas, ¡1 unidad cuadrada más que el cuadrado dado! ¿Cómo es posible que la segunda figura tenga un área mayor que la primera?

El acertijo es real, pero también se puede percibir que algo está mal. Esta paradoja se puede explicar considerando las pendientes de las rectas. Los triángulos,

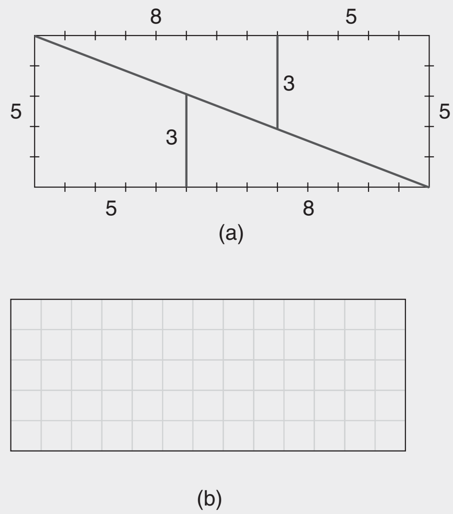


Figura 10.43

los cuales tienen catetos de longitudes 3 y 8, determinan una hipotenusa cuya pendiente es $-\frac{3}{8}$. Aunque el lado del trapezoide parece ser colineal con la hipotenusa, en realidad tiene una pendiente de $-\frac{2}{5}$. Fue fácil aceptar que los segmentos eran colineales ya que las pendientes son casi iguales; de hecho $-\frac{3}{8} = -0.375$ y $\frac{2}{5} = -0.400$. En la figura 10.44 (que está un tanto exagerada) aparece un paralelogramo muy delgado en el espacio entre los segmentos originales del cuadrado cortado. Es posible concluir apresuradamente que el área de ese paralelogramo es 1 unidad cuadrada ¡y que la paradoja se ha resuelto una vez más!

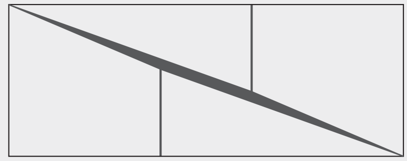


Figura 10.44

PERSPECTIVA DE APLICACIÓN

Fórmulas del punto de división

El tema de esta presentación es una generalización de las fórmulas que condujeron a la fórmula del punto medio. Recuerde que el punto medio del segmento de recta que une $A(x_1, y_1)$ con $B(x_2, y_2)$ está dado por $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, que se deduce de las fórmulas $x = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$ y $y = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$. Las fórmulas para una localización más general del punto entre A y B son las siguientes; para comprender mejor cómo se aplican estas fórmulas, se observa que r representa la parte fraccional de la distancia del punto A al punto B en $\overline{AB}$; en la fórmula del punto medio $r = \frac{1}{2}$.

> Fórmulas del punto de división: sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ que representan los puntos extremos de $\overline{AB}$. Donde r representa una fracción común $(0 < r < 1)$, las coordenadas del punto P que se encuentra en esta parte de r de la distancia de A a B están dadas por
>
> $$x = x_1 + r(x_2 - x_1) \quad \text{y} \quad y = y_1 + r(y_2 - y_1)$$

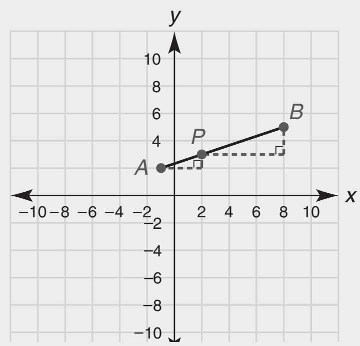
La tabla siguiente aclara el uso de las fórmulas anteriores.

TABLA 10.3

Valor de r	Localización del Punto P en $\overline{AB}$
$\frac{1}{3}$	El punto P se encuentra a $\frac{1}{3}$ de la distancia de A a B.
$\frac{3}{4}$	El punto P se encuentra a $\frac{3}{4}$ de la distancia de A a B.

EJEMPLO 1

Encuentre el punto P en $\overline{AB}$ que está a un tercio de la distancia de $A(-1, 2)$ a $B(8, 5)$.



Solución

$$x = -1 + \tfrac{1}{3}(8 - [-1]) \quad \text{y} \quad y = 2 + \tfrac{1}{3}(5 - 2)$$

Entonces $x = -1 + \frac{1}{3}(9)$ por tanto $x = -1 + 3$ o 2

Además, $y = 2 + \frac{1}{3}(3)$ por tanto $y = 2 + 1$ o 3

El punto deseado es $P(2, 3)$.

NOTA: Vea la figura anterior en donde se pueden utilizar triángulos semejantes para explicar por qué el punto P es el punto deseado.

En algunos cursos de nivel superior, el valor de r no se restringe a valores entre 0 y 1. Por ejemplo, se podría elegir $r = 2$ o $r = -1$. Para esos valores de r, el punto P producido por las fórmulas del punto de división permanecen colineales con A y B. Sin embargo, el punto P que se produce no se encuentra entre A y B.

Resumen

UNA VISTA RETROSPECTIVA AL CAPÍTULO 10

El objetivo de este capítulo fue relacionar el álgebra y la geometría. Esta relación se llama *geometría analítica* o *geometría coordenada*. Se desarrollaron las fórmulas para la longitud de un segmento de recta, para el punto medio de un segmento de recta y para la pendiente de una recta. Se determinó la ecuación para una recta, misma que se utilizó para graficar. Se proporcionaron demostraciones analíticas para muchos teoremas de geometría.

UNA VISTA PRELIMINAR DEL CAPÍTULO 11

En el capítulo siguiente se analizará de nuevo al triángulo rectángulo. Se definirán tres relaciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en términos de sus lados. Se deducirá una fórmula de área para triángulos utilizando la relación seno. También se demostrará la ley de los senos y la ley de los cosenos para triángulos agudos.

CONCEPTOS CLAVE

10.1

Geometría analítica • Sistema coordenado cartesiano • Sistema coordenado rectangular • Eje x • Eje y • Cuadrantes • Origen • Coordenada x • Coordenada y • Par ordenado • Fórmula de la distancia • Ecuación lineal • Fórmula del punto medio

10.2

Gráficas de ecuaciones • Intersección x • Intersección y • Pendiente • Fórmula de la pendiente • Recíproco negativo

10.3

Fórmulas y relaciones • Colocación de la figura

10.4

Demostración analítica • Demostración sintética

10.5

Forma pendiente-intersección de una recta • Forma punto-pendiente de una recta • Sistemas de ecuaciones

Capítulo 10 EJERCICIOS DE REPASO

1. Encuentre la distancia entre cada par de puntos:

a) $(6, 4)$ y $(6, -3)$
b) $(1, 4)$ y $(-5, 4)$
c) $(-5, 2)$ y $(7, -3)$
d) $(x - 3, y + 2)$ y $(x, y - 2)$

2. Encuentre la distancia entre cada par de puntos:

a) $(2, -3)$ y $(2, 5)$
b) $(3, -2)$ y $(-7, -2)$
c) $(-4, 1)$ y $(4, 5)$
d) $(x - 2, y - 3)$ y $(x + 4, y + 5)$

3. Encuentre el punto medio del segmento de recta que une cada par de puntos en el ejercicio 1.

4. Encuentre el punto medio del segmento de recta que une cada par de puntos en el ejercicio 2.

5. Encuentre la pendiente de la recta que contiene cada par de puntos en el ejercicio 1.

6. Encuentre la pendiente de la recta que contiene cada par de puntos en el ejercicio 2.

7. $(2, 1)$ es el punto medio de $\overline{AB}$, en donde A tiene coordenadas $(8, 10)$. Encuentre las coordenadas de B.

8. El eje y es el bisector perpendicular de $\overline{RS}$. Encuentre las coordenadas de R si S es el punto $(-3, 7)$.

9. Si A tiene coordenadas $(2, 1)$ y B tiene coordenadas $(x, 3)$, encuentre x de modo que la pendiente de $\overleftrightarrow{AB}$ sea -3.

10. Si R tiene coordenadas $(-5, 2)$ y S tiene coordenadas $(2, y)$, encuentre y de modo que la pendiente de $\overleftrightarrow{RS}$ sea $\frac{-6}{7}$.

11. Sin graficar determine si el par de rectas son paralelas, perpendiculares, las mismas o ninguna de ellas:

a) $x + 3y = 6$ y $3x - y = -7$
b) $2x - y = -3$ y $y = 2x - 14$
c) $y + 2 = -3(x - 5)$ y $2y = 6x + 11$
d) $0.5x + y = 0$ y $2x - y = 10$

12. Determine si los puntos $(-6, 5)$, $(1, 7)$ y $(16, 10)$ son colineales.

13. Encuentre x de modo que $(-2, 3)$, $(x, 6)$ y $(8, 8)$ sean colineales.

14. Trace la gráfica de $3x + 7y = 21$ y llame a a la intersección x y b a la intersección y.

15. Trace la gráfica de $4x - 3y = 9$ cambiando la ecuación a la forma pendiente-intersección.

16. Trace la gráfica de $y + 2 = \frac{-2}{3}(x - 1)$.

17. Escriba la ecuación para:

a) La recta que pasa por $(2, 3)$ y $(-3, 6)$
b) La recta que pasa por $(-2, -1)$ y es paralela a la recta que pasa por $(6, -3)$ y $(8, -9)$
c) La recta que pasa por $(3, -2)$ y es perpendicular a la recta $x + 2y = 4$
d) La recta que pasa por $(-3, 5)$ y es paralela al eje x

18. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $A(-2, -3)$, $B(4, 5)$ y $C(-4, 1)$ es un triángulo rectángulo.

19. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $A(3, 6)$, $B(-6, 4)$ y $C(1, -2)$ es un triángulo isósceles.

20. Demuestre que el cuadrilátero $RSTV$ con vértices $R(-5, -3)$, $S(1, -11)$, $T(7, -6)$ y $V(1, 2)$ es un paralelogramo.

En los ejercicios 21 y 22, trazando las gráficas, encuentre la intersección de las dos ecuaciones.

21. $4x - 3y = -3$
$x + 2y = 13$

22. $y = x + 3$
$y = 4x$

En los ejercicios 23 y 24 resuelva el sistema de ecuaciones en los ejercicios 21 y 22 utilizando métodos algebraicos.

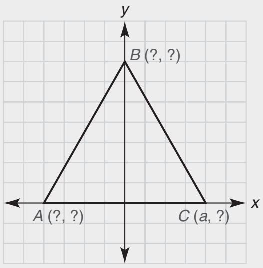
23. Consulte el ejercicio 21.

24. Consulte el ejercicio 22.

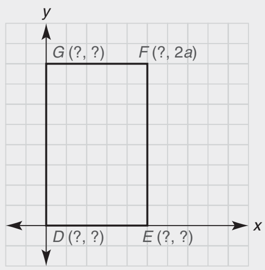
25. Tres de los cuatro vértices de un paralelogramo son $(0, -2)$, $(6, 8)$ y $(10, 1)$. Encuentre las posibilidades para las coordenadas del vértice restante.

26. $A(3, 1)$, $B(5, 9)$ y $C(11, 3)$ son los vértices del $\triangle ABC$.
a) Encuentre la longitud de la mediana de B a $\overline{AC}$.
b) Encuentre la pendiente de la altura de B a $\overline{AC}$.
c) Encuentre la pendiente de una recta a través de B paralela a $\overline{AC}$.

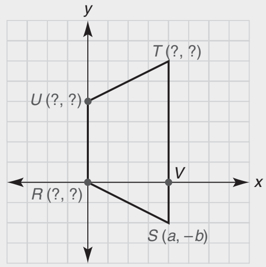
En los ejercicios 27 al 30 proporcione las coordenadas que faltan para los vértices, utilizando tan pocas variables como sea posible.

27.


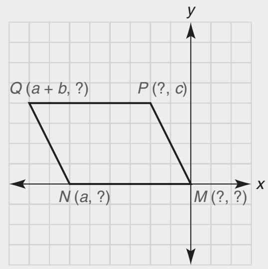
Isósceles $\triangle ABC$ con base $\overline{AC}$

28.


Rectángulo $DEFG$ con $DG = 2 \cdot DE$

29.


Trapezoide isósceles $RSTU$ con $\overline{RV} \cong \overline{RU}$

30.


Paralelogramo $MPQN$

31. $A(2a, 2b)$, $B(2c, 2d)$ y $C(0, 2e)$ son los vértices del $\triangle ABC$.
a) Encuentre la longitud de la mediana de C a $\overline{AB}$.
b) Encuentre la pendiente de la altura de B a $\overline{AC}$.
c) Encuentre la ecuación de la altura de B a $\overline{AC}$.

Demuestre los enunciados en los ejercicios 32 al 36 utilizando geometría analítica.

32. Los segmentos de recta que unen los puntos medios de lados consecutivos de un paralelogramo forman otro paralelogramo.

33. Si las diagonales de un rectángulo son perpendiculares, entonces el rectángulo es un cuadrado.

34. Si las diagonales de un trapezoide tienen la misma longitud, entonces el trapezoide es un trapezoide isósceles.

35. Si dos medianas de un triángulo tienen la misma longitud, entonces el triángulo es isósceles.

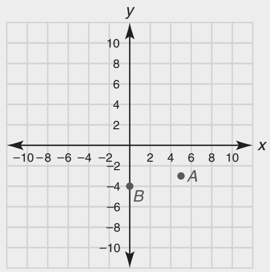
36. Los segmentos de recta que unen los puntos medios de lados consecutivos de un trapezoide isósceles forman un rombo.

Capítulo 10 EXAMEN

1. En el sistema coordenado dado, indique las coordenadas de:

a) Punto A en la forma (x, y) __________

b) Punto B en la forma (x, y) __________



Ejercicios 1-4

2. En el sistema coordenado para el ejercicio 1, trace e identifique cada punto: $C(-6, 1)$ y $D(0, 9)$

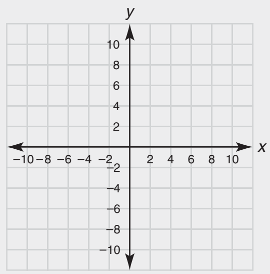
3. Utilice $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ para encontrar la longitud de $\overline{CD}$ como se describe en el ejercicio 2.

____

4. En la forma (x, y) determine el punto medio de $\overline{CD}$ como se describe en el ejercicio 2. __________

5. Complete la tabla siguiente de coordenadas x y y de los puntos en la gráfica de la ecuación $2x + 3y = 12$.

x	0	3		9
y			4	



Ejercicios 5-6

6. Utilizando la tabla del ejercicio 5, bosqueje la gráfica de $2x + 3y = 12$.

7. Encuentre la pendiente m de una recta que contenga estos puntos:

a) $(-1, 3)$ y $(2, -6)$ __________

b) (a, b) y (c, d) __________

8. La recta ℓ tiene pendiente $m = \frac{2}{3}$. Encuentre la pendiente de cualquier recta que sea:

a) Paralela a ℓ __________

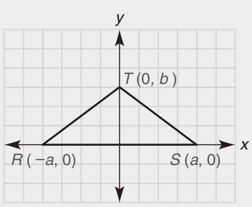
b) Perpendicular a ℓ __________

9. ¿Qué tipo de cuadrilátero $ABCD$ está representado si sus vértices son $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a + b, c)$ y $D(b, c)$?

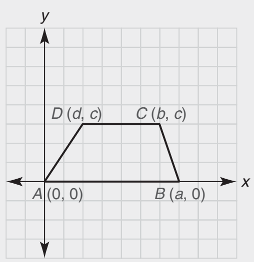
____

10. Para que el cuadrilátero $ABCD$ del ejercicio 9 sea un rombo, sería necesario que $AB = AD$. Utilizando a, b y c (como en el ejercicio 9), escriba una ecuación que establezca que $AB = AD$. __________

11. Siendo tan específico como le sea posible, describa el polígono que se muestra en cada figura.



a) __________________



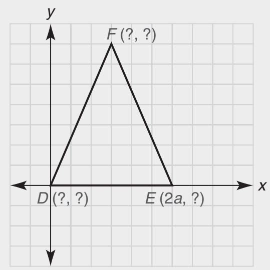
b) __________________

12. ¿Qué fórmula (por nombre) se utiliza para establecer que

a) dos rectas son paralelas? __________

b) dos segmentos de recta son congruentes? __________

13. Utilizando tan pocas variables como sea posible, determine las coordenadas de cada punto si el $\triangle DEF$ es isósceles con $\overline{DF} \cong \overline{FE}$.

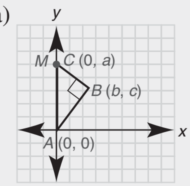


DEF es un triángulo isósceles con $\overline{DF} \cong \overline{FE}$

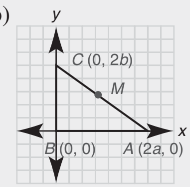
D (,), E ($2a$,), F (,).

14. Para demostrar el teorema "El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices", ¿cuál dibujo es mejor? __________

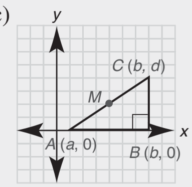
a)



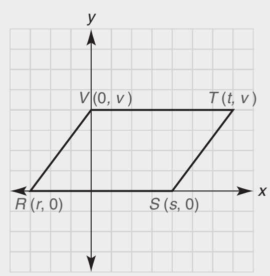
b)



c)



15. En la figura se observa que $m_{\overline{RS}} = m_{\overline{VT}} = 0$. Encuentre la ecuación que relacione r, s y t si se sabe que $RSTV$ es un paralelogramo.



16. En la forma $y = mx + b$, encuentre la ecuación de la recta que:

a) Contiene los puntos $(0, 4)$ y $(2, 6)$ __________

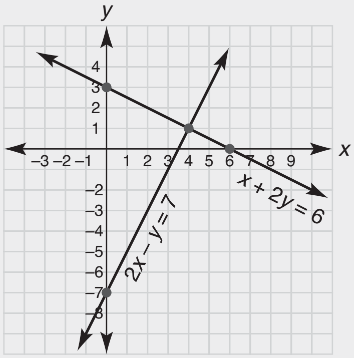
b) Contiene $(0, -3)$ y es paralela a la recta $y = \frac{3}{4}x - 5$

____

17. Utilice $y - y_1 = m(x - x_1)$ para encontrar la ecuación de la recta que contiene (a, b) y es perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{c}x + d$. Deje la respuesta (ecuación) en la forma $y = mx + b$. __________

18. Utilice las gráficas proporcionadas para resolver el sistema que consiste en las ecuaciones $x + 2y = 6$ y $2x - y = 7$.

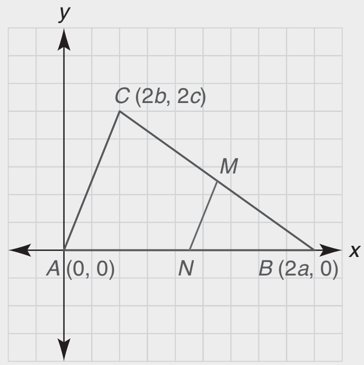
____



19. Utilice álgebra para resolver el sistema que consiste en las ecuaciones $5x - 2y = -13$ y $3x + 5y = 17$.

____

20. Utilice el dibujo proporcionado para completar la demostración del teorema "El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado del triángulo".



Demostración: Dado el $\triangle ABC$ con vértices como se muestran, sea que M y N representen los puntos medios de los lados $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$, respectivamente.

Entonces ______________________________
____
____
____
____

Capítulo 11

Introducción a la trigonometría

© Fernbach Antal/Dreamstime

CONTENIDO

Hay un DVD disponible que cuenta con un video con explicación de conceptos, problemas de ejemplo y aplicaciones. Este material se vende por separado y se encuentra disponible sólo en inglés.

¡Surrealista! El Faro Pontusval se localiza en la costa accidentada de la península de Bretagne (Bretaña) al noroeste de Francia. Igual que cualquier faro envía un mensaje de "bienvenida", así como "de precaución", a la tripulación a bordo de cualquier nave que se aproxime. Los métodos de la trigonometría permiten que el capitán de un barco determine la distancia desde su nave hasta la costa rocosa bajo el faro. La palabra *trigonometría*, que significa "la medida de un triángulo", proporciona métodos para la medición de las partes (lados y ángulos) de un triángulo. En este capítulo se encuentran algunas técnicas que permiten encontrar medidas de una parte de un triángulo rectángulo cuando se conocen las medidas de las otras partes. Estos métodos se pueden ampliar al incluir técnicas para medir partes de triángulos agudos.

Para las aplicaciones de este capítulo, será necesario utilizar una calculadora científica o graficadora.

11.1 Relación proporcional seno y aplicaciones

CONCEPTOS CLAVE

Letras griegas: $\alpha, \beta, \gamma, \theta$
Lado (cateto) opuesto
Hipotenusa

Relación proporcional seno:
$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

Ángulo de elevación
Ángulo de depresión

En esta sección se tratará estrictamente con triángulos rectángulos semejantes. En la figura 11.1, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y $\angle C$ y $\angle F$ son ángulos rectos. Considere los ángulos correspondientes A y D; si se compara la longitud del lado opuesto de cada ángulo con la longitud de la hipotenusa de cada triángulo, se obtiene este resultado por la razón LCTSP:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE} \quad \text{o} \quad \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

En los dos triángulos semejantes la relación proporcional de este par de lados correspondientes depende de la medida del $\angle A$ agudo (o $\angle D$, debido a que $m\angle A = m\angle D$); para este ángulo, el valor numérico de la relación proporcional

$$\frac{\text{longitud del lado opuesto al ángulo agudo}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

es única. Esta relación proporcional se vuelve más pequeña para medidas menores del $\angle A$ y mayor para medidas mayores del $\angle A$. Esta relación proporcional es única para cada medida de un ángulo agudo aunque las longitudes de los lados de dos triángulos semejantes que contienen el ángulo sean diferentes.

Geometría en el mundo real

Un topógrafo utiliza trigonometría para determinar mediciones de ángulos y distancias.

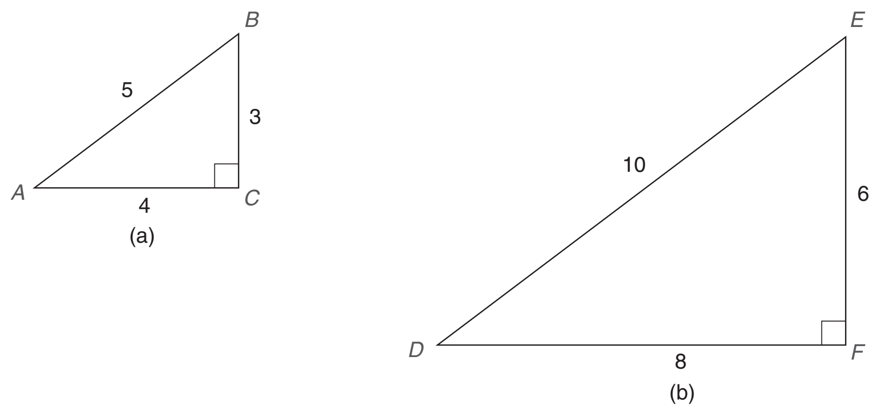


Figura 11.1

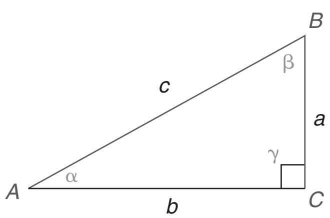


Figura 11.2

En la figura 11.2 se nombran las medidas de los ángulos de un triángulo rectángulo con las letras griegas α (alfa) en el vértice A, β (beta) en el vértice B y γ (gama) en el vértice C. Las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C son a, b y c, respectivamente. En relación con el ángulo agudo, las longitudes de los lados del triángulo rectángulo en la definición siguiente se describen como "opuesta" e "hipotenusa". La palabra **opuesto** se utiliza para denotar la longitud del lado opuesto al ángulo nombrado; la palabra **hipotenusa** se utiliza para denotar la longitud de la hipotenusa.

DEFINICIÓN

En un triángulo rectángulo, la **relación proporcional seno** para un ángulo agudo es la relación proporcional $= \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$.

NOTA: En el $\triangle ABC$ de la figura 11.2, se dice que sen $\alpha = \frac{a}{c}$ y sen $\beta = \frac{b}{c}$ donde "sen" es una abreviatura de la palabra *seno*. También es correcto decir que sen $A = \frac{a}{c}$ y sen $B = \frac{b}{c}$.

EJEMPLO 1

En la figura 11.3 encuentre sen α y sen β para el $\triangle ABC$ rectángulo.

Solución $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$. Por tanto,

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}$$

y

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$$

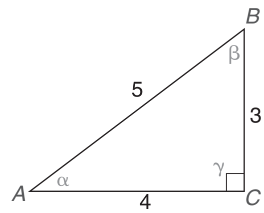


Figura 11.3

NOTA: En el ejemplo 1 es correcto establecer que sen $A = \frac{3}{5}$ y sen $B = \frac{4}{5}$. ■

EJEMPLO 2

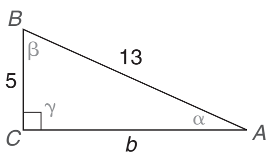


Figura 11.4

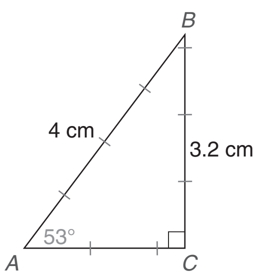
En la figura 11.4 encuentre sen α y sen β para el $\triangle ABC$ rectángulo.

Solución Con $a = 5$ y $c = 13$ se sabe que $b = 12$ ya que (5, 12, 13) es una tripleta pitagórica. Este resultado se comprueba utilizando el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 13^2 &= 5^2 + b^2 \\ 169 &= 25 + b^2 \\ b^2 &= 144 \\ b &= 12 \end{aligned}$$

Por tanto, $\quad \text{sen } \alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \quad$ y $\quad \text{sen } \beta = \frac{b}{c} = \frac{12}{13}$ ■

Donde α es la medida de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, el valor de sen α es único. La actividad Descubra siguiente está diseñada para que se comprenda mejor el significado de una expresión como sen 53°, así como su unicidad.



Descubra

Dado que un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 53°, encuentre el valor aproximado de sen 53°. El valor de sen 53° se puede estimar como sigue (refiérase al triángulo a la izquierda).

1. Trace el $\triangle ABC$ rectángulo de modo que $\alpha = 53°$ y $\gamma = 90°$.
2. Por conveniencia marque la longitud de la hipotenusa como 4 cm.
3. Utilizando una regla mida la longitud del cateto opuesto al ángulo que mide 53°. Es de aproximadamente 3.2 cm de largo.
4. Ahora divida $\frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ o $\frac{3.2}{4}$ para encontrar sen 53° $\approx$ 0.8.

NOTA: Una calculadora proporciona mayor precisión que el método geométrico que se encuentra en la actividad Descubra; en particular sen 53° $\approx$ 0.7986.

GEE
Ejercicios 1-5

Repita el procedimiento de la actividad Descubra anterior y utilícelo para encontrar una aproximación para sen 37°. Necesitará aplicar el teorema de Pitágoras para determinar *AC*. Debe encontrar que sen 37° $\approx$ 0.6.

Aunque las relaciones proporcionales seno para medidas de ángulos están disponibles en una calculadora, se pueden justificar varios resultados de la calculadora utilizando triángulos especiales. Para ciertos ángulos se pueden encontrar resultados *exactos* en tanto que la calculadora proporciona aproximaciones.

Recuerde la relación 30-60-90, en donde el lado opuesto al ángulo de 30° tiene una longitud igual a la mitad de la hipotenusa; el cateto restante tiene una longitud igual al producto de la longitud del cateto más corto y $\sqrt{3}$. En la figura 11.5, se ve que sen $30° = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$, en tanto que sen $60° = \frac{x\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Aunque el valor exacto de sen 30° es 0.5 y el valor exacto de sen 60° es $\frac{\sqrt{3}}{2}$, una calculadora da un valor aproximado para sen 60° como 0.8660254. Si se redondea la relación proporcional para sen 60° a cuatro cifras decimales, entonces sen 60° $\approx$ 0.8660. Utilice su calculadora para mostrar que $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$.

Advertencia

Asegúrese de escribir sen $\alpha = \frac{5}{13}$ o sen 54° $\approx$ 0.8090. Es incorrecto escribir "sen" en una afirmación sin nombrar el ángulo o su medida; por ejemplo, sen $= \frac{5}{13}$ y sen $\approx$ 0.8090 no tienen ningún significado.

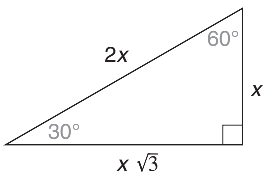


Figura 11.5

EJEMPLO 3

Encuentre los valores exacto y aproximado para sen 45°.

Solución Utilizando el triángulo 45°-45°-90° en la figura 11.6, se ve que sen $45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. De manera equivalente, sen $45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Una aproximación de la calculadora es sen 45° $\approx$ 0.7071.

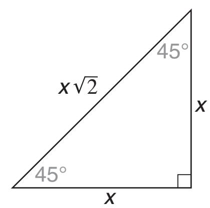


Figura 11.6 ■

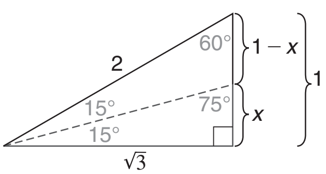


Figura 11.7

Ahora se utilizará el teorema ángulo-bisector (de la sección 5.6) para determinar las relaciones proporcionales seno para ángulos que miden 15 y 75°. Recuerde que un bisector de ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en dos segmentos que son proporcionales a los lados que forman el ángulo bisecado. Utilizando este hecho en el triángulo 30°-60°-90° en la figura 11.7, se llega a la proporción

$$\frac{x}{1 - x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aplicando la propiedad medios-extremos, se tiene

$$\begin{aligned} 2x &= \sqrt{3} - x\sqrt{3} \\ 2x + x\sqrt{3} &= \sqrt{3} \\ (2 + \sqrt{3})x &= \sqrt{3} \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \approx 0.4641 \end{aligned}$$

El número 0.4641 es la longitud del lado que es opuesto al ángulo de 15° del triángulo 15°-75°-90° (vea la figura 11.8). Utilizando el teorema de Pitágoras se puede demostrar que la longitud de la hipotenusa es de aproximadamente 1.79315. A su vez, sen $15° = \frac{0.46410}{1.79315} \approx 0.2588$. Empleando el mismo triángulo, se obtiene sen $75° = \frac{1.73205}{1.79315} \approx 0.9659$.

Ahora se empieza a formular una tabla pequeña de valores de relaciones proporcionales seno. En la tabla 11.1 la letra griega θ (teta) designa la medida del ángulo en grados. La segunda columna tiene el encabezado sen θ y proporciona la relación proporcional para el ángulo correspondiente; esta relación proporcional por lo general se da con una precisión de cuatro cifras decimales. Observe que los valores de sen θ aumentan conforme la medida de θ aumenta.

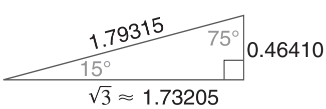


Figura 11.8

TABLA 11.1
Relaciones proporcionales seno

θ	sen θ
15°	0.2588
30°	0.5000
45°	0.7071
60°	0.8660
75°	0.9659

Advertencia

Observe que sen$\left(\frac{1}{2}\theta\right) \neq \frac{1}{2}$sen θ en la tabla 11.1. Si $\theta = 60°$, sen 30° $\neq \frac{1}{2}$ sen 60° ya que $0.5000 \neq \frac{1}{2}(0.8660)$.

NOTA: La mayoría de los valores encontrados en tablas o proporcionados por una calculadora son aproximaciones. Aunque se utiliza el símbolo de igualdad (=) al leer valores de una tabla (o calculadora), las soluciones para los problemas que siguen por lo general son aproximaciones.

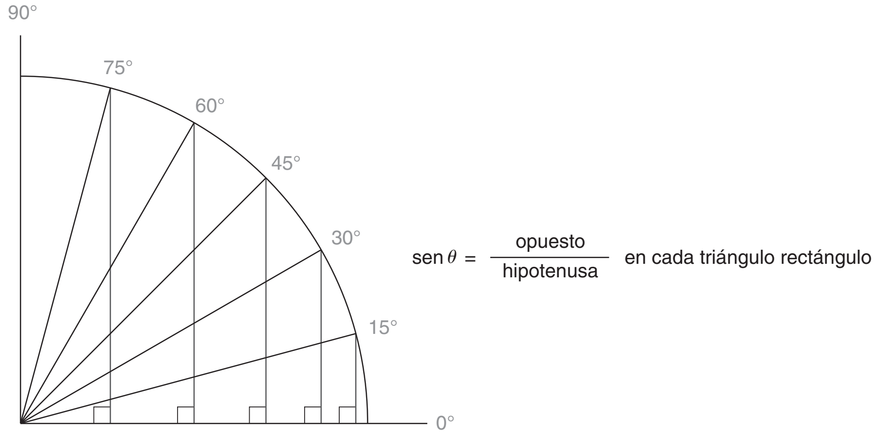


Figura 11.9

En la figura 11.9 sea el $\angle\theta$ el ángulo agudo cuya medida aumenta como se muestra. En la figura observe que la longitud de la hipotenusa es constante; siempre es igual a la longitud del radio del círculo. Sin embargo, el lado opuesto al $\angle\theta$ aumenta conforme θ aumenta. De hecho, cuando θ tiende a 90° ($\theta \to 90°$), la longitud del cateto opuesto al $\angle\theta$ tiende a la longitud de la hipotenusa. Cuando $\theta \to 90°$, sen $\theta \to 1$. Cuando θ disminuye, sen θ también disminuye. Cuando θ disminuye ($\theta \to 0°$), la longitud del lado opuesto al $\angle\theta$ tiende a 0. Cuando $\theta \to 0°$, sen $\theta \to 0$. Estas observaciones conducen a la definición siguiente.

DEFINICIÓN

sen 0° = 0 y sen 90° = 1

GEE
Ejercicios 6-10

NOTA: Utilice su calculadora para comprobar estos resultados.

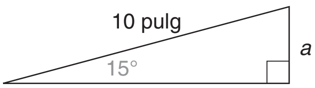


Figura 11.10

EJEMPLO 4

Utilizando la tabla 11.1 encuentre la longitud de a en la figura 11.10 hasta la décima más cercana de pulgada.

Solución

$$\text{sen } 15° = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{10}$$

De la tabla se tiene sen 15° = 0.2588.

$$\frac{a}{10} = 0.2588 \qquad \textbf{(por sustitución)}$$
$$a = 2.588$$

Por tanto, $a \approx 2.6$ pulg cuando se redondea a décimas. ■

En un problema de aplicación se puede utilizar la relación proporcional seno para encontrar la medida de cualquier lado o de un ángulo de un triángulo. Para determinar la relación proporcional seno del ángulo implicado se puede utilizar una tabla de relaciones proporcionales o una calculadora. La tabla 11.2 proporciona relaciones proporcionales para muchas más medidas de ángulos que la tabla 11.1. Al igual que las calculadoras, las relaciones proporcionales seno que se encuentran en las tablas son sólo aproximaciones.

Exploración tecnológica

Si tiene una calculadora graficadora trace la gráfica de $y =$ sen x sujeta a estas condiciones:

i. La calculadora debe estar en el modo grados.
ii. La ventana tiene $0 \leq x \leq 90$ y $0 \leq y \leq 1$.

Demuestre con su gráfica que $y =$ sen x aumenta cuando x aumenta.

TABLA 11.2
Relaciones proporcionales seno

θ	sen θ	θ	sen θ	θ	sen θ	θ	sen θ
0°	0.0000	23°	0.3907	46°	0.7193	69°	0.9336
1°	0.0175	24°	0.4067	47°	0.7314	70°	0.9397
2°	0.0349	25°	0.4226	48°	0.7431	71°	0.9455
3°	0.0523	26°	0.4384	49°	0.7547	72°	0.9511
4°	0.0698	27°	0.4540	50°	0.7660	73°	0.9563
5°	0.0872	28°	0.4695	51°	0.7771	74°	0.9613
6°	0.1045	29°	0.4848	52°	0.7880	75°	0.9659
7°	0.1219	30°	0.5000	53°	0.7986	76°	0.9703
8°	0.1392	31°	0.5150	54°	0.8090	77°	0.9744
9°	0.1564	32°	0.5299	55°	0.8192	78°	0.9781
10°	0.1736	33°	0.5446	56°	0.8290	79°	0.9816
11°	0.1908	34°	0.5592	57°	0.8387	80°	0.9848
12°	0.2079	35°	0.5736	58°	0.8480	81°	0.9877
13°	0.2250	36°	0.5878	59°	0.8572	82°	0.9903
14°	0.2419	37°	0.6018	60°	0.8660	83°	0.9925
15°	0.2588	38°	0.6157	61°	0.8746	84°	0.9945
16°	0.2756	39°	0.6293	62°	0.8829	85°	0.9962
17°	0.2924	40°	0.6428	63°	0.8910	86°	0.9976
18°	0.3090	41°	0.6561	64°	0.8988	87°	0.9986
19°	0.3256	42°	0.6691	65°	0.9063	88°	0.9994
20°	0.3420	43°	0.6820	66°	0.9135	89°	0.9998
21°	0.3584	44°	0.6947	67°	0.9205	90°	1.0000
22°	0.3746	45°	0.7071	68°	0.9272		

NOTA: En secciones posteriores se utilizará una calculadora (en vez de tablas) para encontrar valores de relaciones proporcionales trigonométricas como sen 36°.

EJEMPLO 5

Encuentre sen 36°, utilizando

a) La tabla 11.2.
b) Una calculadora científica o graficadora

Solución

a) Encuentre 36° bajo el encabezado θ. Ahora lea el número bajo el encabezado sen θ: sen 36° = 0.5878
b) En una calculadora científica en el *modo grados* utilice la secuencia de teclas siguiente:

$\boxed{3} \rightarrow \boxed{6} \rightarrow \boxed{\text{sen}} \rightarrow \boxed{\mathbf{0.5878}}$

El resultado es sen 36° = 0.5878, redondeado a cuatro cifras decimales. ■

NOTA 1: El número en negritas en el recuadro representa la respuesta final.
NOTA 2: La secuencia de teclas para una calculadora graficadora es la siguiente. En este caso la calculadora está en el modo grados y la respuesta se redondea a cuatro cifras decimales.

$\boxed{\text{sin}} \to \boxed{3} \to \boxed{6} \to \boxed{\text{Enter}} \to \boxed{\mathbf{0.5878}}$

La entrada puede requerir paréntesis y que se ingrese en la forma sin (36). ■

La tabla o la calculadora también se pueden utilizar para encontrar la medida de un ángulo. Esto es posible cuando se conoce el seno del ángulo.

EJEMPLO 6

Si sen $\theta = 0.7986$, encuentre θ aproximado al grado más cercano empleando

a) La tabla 11.2.
b) Una calculadora.

Solución

a) Encuentre 0.7986 bajo el encabezado sen θ. Ahora observe a la izquierda para encontrar la medida en grados del ángulo en la columna θ:

$$\text{sen}\,\theta = 0.7986 \to \theta = 53°$$

b) En algunas calculadoras científicas (siempre que estén en el modo grados) se puede utilizar la secuencia de teclas siguiente para encontrar θ:

$\boxed{\cdot} \to \boxed{7} \to \boxed{9} \to \boxed{8} \to \boxed{6} \to \boxed{\text{inv}} \to \boxed{\text{sin}} \to \boxed{\mathbf{53}}$

Con la combinación “inv” y “sin” se obtiene el ángulo cuya relación proporcional seno se conoce, por tanto $\theta = 53°$.

NOTA: En una calculadora graficadora que esté en el modo grados, utilice esta secuencia:

$\boxed{\text{sin}^{-1}} \to \boxed{\cdot} \to \boxed{7} \to \boxed{9} \to \boxed{8} \to \boxed{6} \to \boxed{\text{ENTER}} \to \boxed{\mathbf{53}}$

Ejercicios 11-15

Esta entrada puede requerir la forma $\text{sin}^{-1}(.7986)$. La expresión $\text{sin}^{-1}(.7986)$ significa “El ángulo cuyo seno es 0.7986”. La función de la calculadora $\boxed{\text{sin}^{-1}}$ se realiza presionando $\boxed{\text{2nd}}$ y enseguida $\boxed{\text{sin}}$. ■

En la mayoría de las aplicaciones un esquema proporciona gran cantidad de información y cierta perspectiva en el método de solución. En algunos esquemas y aplicaciones se usan las frases *ángulo de elevación* y *ángulo de depresión*. Estos ángulos se miden desde la horizontal, como se ilustra en la figuras 11.11(a) y 11.11(b). En la figura 11.11(a) el ángulo α medido hacia arriba desde el rayo horizontal es el **ángulo de elevación**. En la figura 11.11(b), el ángulo β medido hacia abajo desde el rayo horizontal es el **ángulo de depresión.**

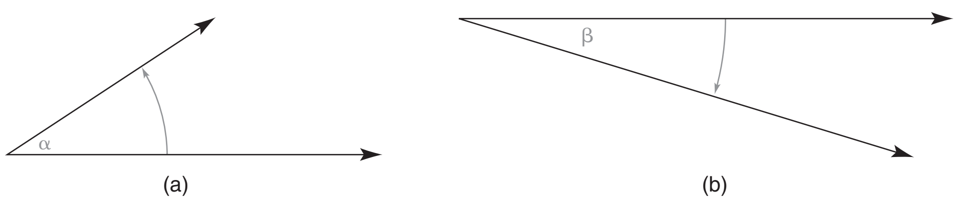


Figura 11.11

EJEMPLO 7

La torre de una estación de radio tiene una altura de 200 pies. Un alambre tensor de 250 pies de longitud soporta la antena, como se muestra en la figura 11.12. Encuentre la medida del ángulo de elevación α aproximada al grado más cercano.

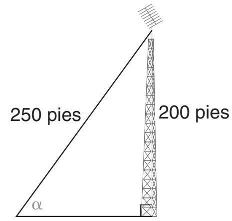


Figura 11.12

Solución

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{200}{250} = 0.8$$

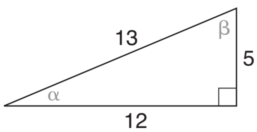
GEE
Ejercicios 16, 17

De la tabla 11.2 (o con una calculadora) se tiene que el ángulo cuya relación proporcional seno es 0.8 es $\alpha \approx 53°$. ■

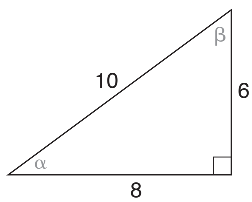
Ejercicios 11.1

En los ejercicios 1 al 6 encuentre sen α y sen β para el triángulo que se muestra.

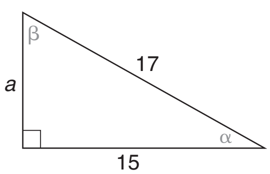
1.



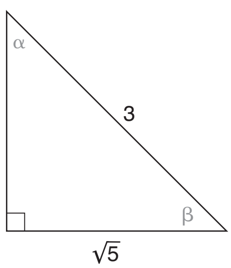
2.



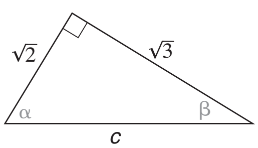
3.



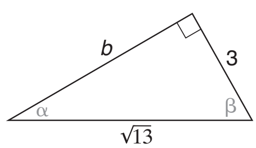
4.



5.



6.

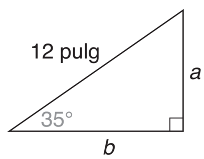


En los ejercicios 7 al 14 utilice la tabla 11.2 o una calculadora para determinar el seno del ángulo que se indica aproximado a cuatro cifras decimales.

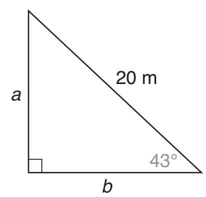
7. sen 90°
8. sen 0°
9. sen 17°
10. sen 23°
11. sen 82°
12. sen 46°
13. sen 72°
14. sen 57°

En los ejercicios 15 al 20 encuentre las longitudes de los lados que se indican por las variables. Utilice la tabla 11.2 o una calculadora y redondee las respuestas a la décima más cercana de pulgada.

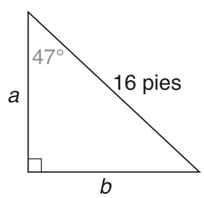
15.



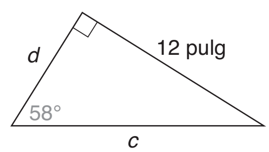
16.



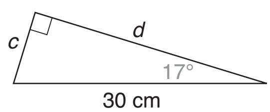
17.



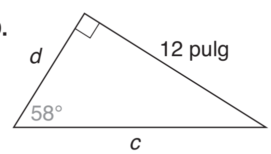
18.



19.

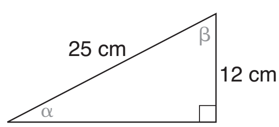


20.

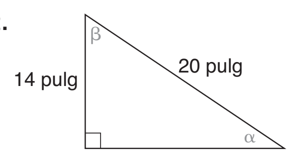


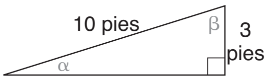
En los ejercicios 21 al 26 encuentre las medidas aproximadas al grado más cercano de los ángulos indicados.

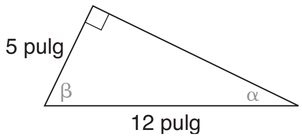
21.

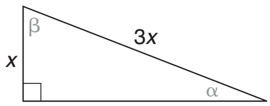


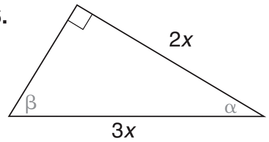
22.



23.


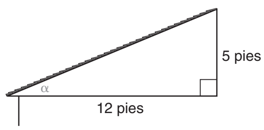
24.


25.


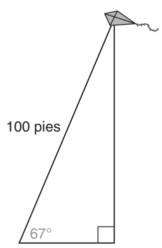
26.


En los ejercicios 27 al 34 utilice los dibujos proporcionados para resolver cada problema. Las medidas de ángulos se deben dar aproximadas al grado más cercano y las distancias, a la décima de una unidad más cercana.

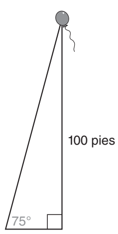
27. La inclinación o pendiente de un techo es 5 a 12. Encuentre la medida del ángulo α.



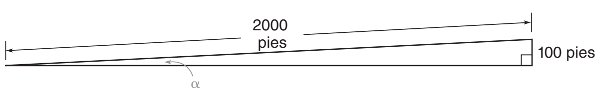
28. Zaidah vuela una cometa a un ángulo de elevación de 67° respecto a un punto en el suelo. Si se han desenrollado 100 pies de cuerda, ¿qué tan alejada está la cometa del suelo?



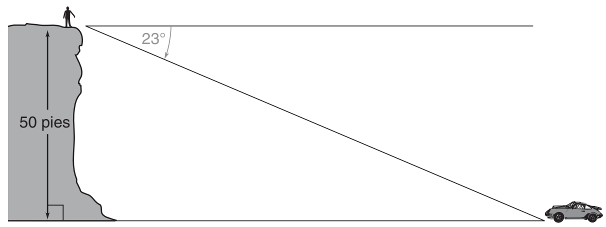
29. Danny observa un globo que está 100 pies por encima del suelo. Si el ángulo de elevación desde Danny hasta el globo es 75°, ¿qué tan alejado de Danny está el globo?



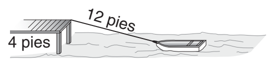
30. Sobre un tramo de autopista de 2000 pies a través de una colina, hay una elevación de 100 pies. ¿Cuál es la medida del ángulo formado por el camino y la horizontal?



31. Desde un acantilado una persona observa un automóvil a un ángulo de depresión de 23°. Si el acantilado tiene una altura de 50 pies, ¿qué tan alejado está el automóvil de la persona?

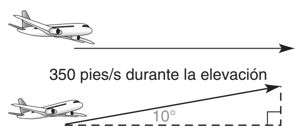


32. Una soga de 12 pies asegura un bote de remos a un muelle que está a 4 pies por encima de la superficie del agua. Suponga que el extremo inferior de la soga está en el "nivel del agua". ¿Cuál es el ángulo que se forma por la soga y el agua? Suponga que la cuerda está tensa.



33. Una escalera de 10 pies está apoyada sobre un muro vertical de tal manera que la parte inferior de la escalera está a 4 pies de la base del muro. ¿Cuánto mide el ángulo que se forma entre la escalera y el muro?

34. Un avión que vuela a una velocidad de 350 pies por segundo empieza a subir a un ángulo de 10°. ¿Cuál es el aumento en la altitud en los siguientes 15 segundos?



En los ejercicios 35 al 38 haga los dibujos que considere necesarios.

35. En el paralelogramo $ABCD$, $AB = 6$ pies y $AD = 10$ pies. Si $m\angle A = 65°$ y $\overline{BE}$ es la altura de $\overline{AD}$, encuentre:
a) BE redondeada a décimas
b) El área del $\square ABCD$

36. En el $\triangle ABC$ rectángulo, $\gamma = 90°$ y $\beta = 55°$. Si $AB =$ 20 pulg, encuentre:
a) a (la longitud de $\overline{BC}$) redondeada a décimas
b) b (la longitud de $\overline{AC}$) redondeada a décimas
c) El área del $\triangle ABC$ rectángulo

37. En un cono circular recto la altura inclinada mide 13 cm y la altura mide 10 cm. Aproximada al grado más cercano, encuentre la medida del ángulo θ que se forma por el radio y la altura inclinada.

38. En un cono circular recto la altura inclinada es 13 cm. Si $\theta = 48°$ es el ángulo formado por el radio y la altura inclinada, encuentre la longitud de la altura del cono, redondeada a décimas.

***39. En el pentágono regular $ABCDE$ los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ junto con la diagonal $\overline{AC}$) forman el $\triangle ABC$ isósceles. Sea $AB = BC = s$. En términos de s encuentre una expresión para**
a) h, la longitud de la altura del $\triangle ABC$ desde el vértice B hasta el lado $\overline{AC}$.
b) d, la longitud de la diagonal $\overline{AC}$ del pentágono regular $ABCDE$.

11.2 Relación proporcional coseno y aplicaciones

CONCEPTOS CLAVE

Lado (cateto) adyacente

Relación proporcional coseno: $\cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

Identidad: $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$

De nuevo se trata estrictamente con triángulos rectángulos semejantes, como se muestra en la figura 11.13. Si $\overline{BC}$ es el cateto opuesto al ángulo A, se dice que $\overline{AC}$ es el cateto **adyacente** al ángulo A. En los dos triángulos las relaciones proporcionales de la forma

$$\frac{\text{longitud del cateto adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

son iguales; es decir,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE} \qquad \text{o} \qquad \frac{4}{5} = \frac{8}{10}$$

Esta relación se deduce del hecho de que los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales (LCTSP).

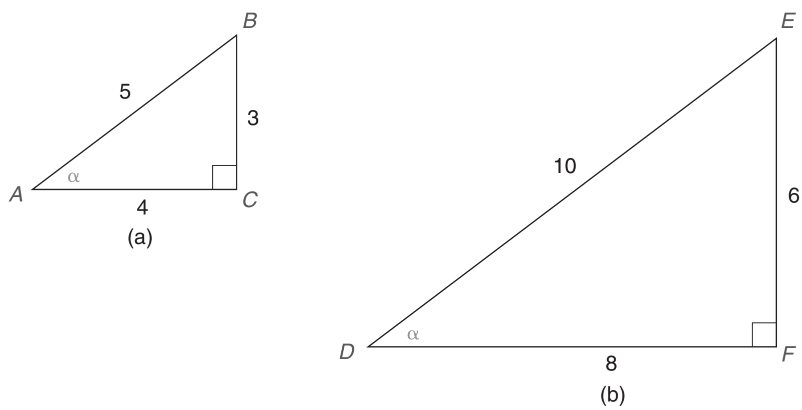


Figura 11.13

Al igual que la relación proporcional seno, la *relación proporcional coseno* depende de la medida del ángulo agudo A (o D) en la figura 11.13. En la definición siguiente, el término *adyacente* se refiere a la longitud del cateto que es adyacente al ángulo mencionado.

DEFINICIÓN

En un triángulo rectángulo la **relación proporcional coseno** para un ángulo agudo es la relación proporcional $\frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$.

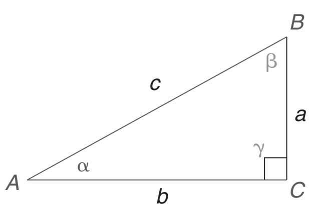


Figura 11.14

NOTA: Para el $\triangle ABC$ en la figura 11.14 se tiene $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ y $\cos\beta = \frac{a}{c}$; en donde "cos" es una forma abreviada de la palabra *coseno*. Estas ecuaciones también se pueden expresar en las formas $\cos A = \frac{b}{c}$ y $\cos B = \frac{a}{c}$.

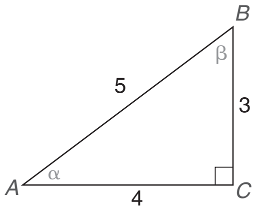


Figura 11.15

EJEMPLO 1

Encuentre $\cos \alpha$ y $\cos \beta$ para el $\triangle ABC$ rectángulo en la figura 11.15.

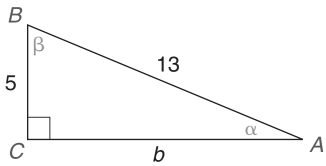
Solución $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$ para el triángulo que se muestra en la figura 11.15. Como b es la longitud del cateto adyacente a α y a es la longitud del cateto adyacente a β,

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} \qquad \text{y} \qquad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}$$

■

EJEMPLO 2

Encuentre $\cos \alpha$ y $\cos \beta$ para el $\triangle ABC$ rectángulo en la figura 11.16.



Ejercicios 1-5

Figura 11.16

Solución $a = 5$ y $c = 13$. Entonces $b = 12$ de la tripleta de Pitágoras (5, 12, 13). En consecuencia,

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} \qquad \text{y} \qquad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{5}{13}$$

■

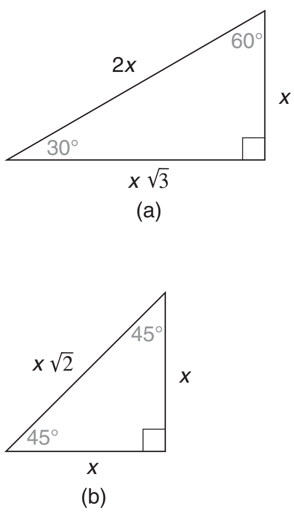


Figura 11.17

Así como la relación proporcional seno de cualquier ángulo es única, la relación proporcional coseno de cualquier ángulo también es única. Utilizando los triángulos 30°-60°-90° y 45°-45°-90° de la figura 11.17, se observa que

$$\cos 30° = \frac{x\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$$

$$\cos 45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$$

$$\cos 60° = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Ahora considere emplear el triángulo 15°-75°-90° que se muestra en la figura 11.18 para encontrar cos 75° y cos 15°. De la sección 11.1, sen 15° $= \frac{a}{c}$ y sen 15° $= 0.2588$. Pero $\cos 75° = \frac{a}{c}$, por tanto $\cos 75° = 0.2588$. De manera similar, dado que sen 75° $= \frac{b}{c} = 0.9659$, se observa que $\cos 15° = \frac{b}{c} = 0.9659$.

En la figura 11.19 en la página 506 las relaciones proporcionales coseno aumentan conforme θ disminuye y disminuyen conforme θ aumenta. Para comprender por qué, considere la definición

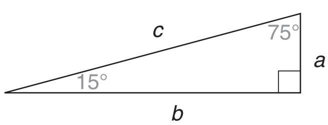


Figura 11.18

$$\cos \theta = \frac{\text{longitud del cateto adyacente}}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

y la figura 11.19. Recuerde que el símbolo $\rightarrow$ se lee "tiende". Cuando $\theta \rightarrow 0°$, la longitud del cateto adyacente $\rightarrow$ a la longitud de la hipotenusa y, por tanto, $\cos 0° \rightarrow 1$. De manera similar, $\cos 90° \rightarrow 0$ ya que el cateto adyacente se vuelve menor cuando $\theta \rightarrow 90°$. En consecuencia, se tiene la definición siguiente.

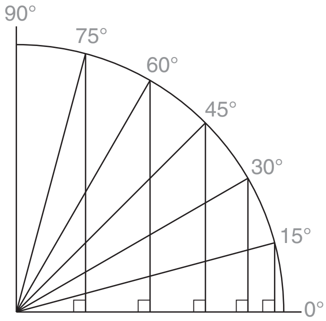


Figura 11.19

DEFINICIÓN

$\cos 0° = 1$ y $\cos 90° = 0$.

NOTA: Utilice su calculadora para comprobar los resultados encontrados en esta definición.

En la tabla 11.3 se resumen las relaciones proporcionales coseno.

TABLA 11.3
Relaciones proporcionales coseno

θ	$\cos \theta$
0°	1.0000
15°	0.9659
30°	0.8660
45°	0.7071
60°	0.5000
75°	0.2588
90°	0.0000

Exploración tecnológica

Si tiene una calculadora graficadora, trace la gráfica de $y = \cos x$ sujeta a estas condiciones:

i. La calculadora debe estar en el modo grados.
ii. La ventana tiene $0 \leq x \leq 90$ y $0 \leq y \leq 1$.

Muestre con su gráfica que $y = \cos x$ disminuye conforme x aumenta.

En algunos libros se proporciona una tabla ampliada de relaciones proporcionales coseno comparable a la tabla 11.2 para las relaciones proporcionales seno. Aunque este libro no proporciona una tabla ampliada de relaciones proporcionales coseno, en el ejemplo 3 se ilustra la aplicación de dicha tabla.

GEE
Ejercicios 6-10

EJEMPLO 3

Utilice la tabla 11.3 para encontrar la longitud b en la figura 11.20 redondeada a la décima más cercana.

Solución $\cos 15° = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{10}$ del triángulo.

Además, de la tabla $\cos 15° = 0.9659$. Entonces

$$\frac{b}{10} = 0.9659 \qquad \textbf{(ya que son iguales a cos 15°)}$$

$$b = 9.659$$

Por tanto,

$$b \approx 9.7 \text{ pulg}$$

cuando se redondea a la décima más cercana de pulgada. ■

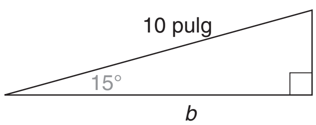


Figura 11.20

Recuerde

$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

$\cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

En un triángulo rectángulo con frecuencia se puede utilizar la relación proporcional coseno para encontrar una longitud desconocida o una medida de ángulo desconocida. Mientras que la relación proporcional seno requiere utilizar el *opuesto* y la *hipotenusa*, la relación proporcional coseno requiere que se utilice el *adyacente* y la *hipotenusa*.

Una ecuación de la forma $\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c}$ o $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ contiene tres variables; para la ecuación $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, las variables son α, b y c. Cuando se conocen los valores de dos de las variables se puede determinar el valor de la tercera variable. Sin embargo, se debe decidir cuál relación proporcional trigonométrica se necesita para resolver el problema.

EJEMPLO 4

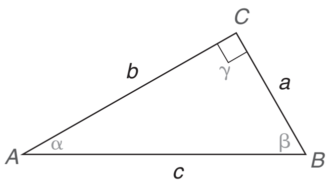


Figura 11.21

En la figura 11.21, ¿qué relación proporcional trigonométrica utilizaría para encontrar

a) α, si se conocen a y c?
b) b, si se conocen α y c?
c) c, si se conocen a y α?
d) β, si se conocen a y c?

Solución

a) seno, ya que sen $\alpha = \frac{a}{c}$ y se conocen a y c
b) coseno, ya que $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ y se conocen α y c
c) seno, ya que sen $\alpha = \frac{a}{c}$ y se conocen a y α
d) coseno, ya que $\cos \beta = \frac{a}{c}$ y se conocen a y c

Para resolver problemas de aplicación por lo general se utiliza una calculadora.

EJEMPLO 5

Encuentre el cos 67° redondeado a cuatro cifras decimales utilizando una calculadora científica.

Solución En una calculadora científica que esté en el modo grados siga la secuencia de teclas siguiente:

$\boxed{6} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{\cos} \rightarrow \boxed{\mathbf{0.3907}}$

Utilizando una calculadora graficadora (en el modo grados) siga esta secuencia de teclas:

$\boxed{\cos} \rightarrow \boxed{6} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{\text{ENTER}} \rightarrow \boxed{\mathbf{0.3907}}$

Es decir, $\cos 67° \approx 0.3907$.

EJEMPLO 6

Utilice una calculadora para encontrar la medida del ángulo θ aproximada al grado más cercano si $\cos \theta = 0.5878$.

Solución Usando una calculadora científica (en el modo grados) siga la siguiente secuencia de teclas:

$\boxed{\cdot} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{8} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{8} \rightarrow \boxed{\text{inv}} \rightarrow \boxed{\cos} \rightarrow \boxed{\mathbf{54}}$

Utilizando una calculadora graficadora (en el modo grados) siga esta secuencia de teclas:

$\boxed{\cos^{-1}} \rightarrow \boxed{\cdot} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{8} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{8} \rightarrow \boxed{\text{ENTER}} \rightarrow \boxed{\mathbf{54}}$

Por tanto, $\theta = 54°$.

GEE
Ejercicios 11-15

NOTA Si se presiona $\boxed{\text{2nd}}$ y $\boxed{\cos}$ en una calculadora graficadora, se obtiene $\boxed{\cos^{-1}}$.

EJEMPLO 7

Para un pentágono regular, la longitud de la apotema es 12 pulg. Encuentre la longitud del radio del pentágono, redondeada a décimas de pulgada.

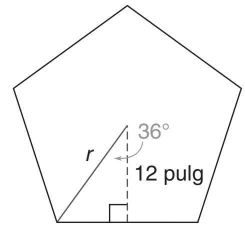


Figura 11.22

Solución El ángulo central del pentágono regular mide $\frac{360}{5}$ o 72°. Una apotema biseca este ángulo, por tanto el ángulo formado por la apotema y el radio mide 36°. En la figura 11.22,

$$\cos 36° = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{12}{r}$$

Utilizando una calculadora, $\cos 36° = 0.8090$. Entonces $\frac{12}{r} = 0.8090$ y $0.8090r = 12$. Dividiendo, $r \approx 14.8$ pulg.

NOTA: La solución en el ejemplo 7 se puede calcular como $r = \frac{12}{\cos 36°}$. ■

Ahora se considera la demostración de un enunciado que se denomina **identidad** ya que es verdadero para todos los ángulos; a este enunciado se le hace referencia como teorema. Como se verá, la demostración de este enunciado se basa por completo en el teorema de Pitágoras.

TEOREMA 11.2.1

En cualquier triángulo rectángulo en el cual α es la medida de un ángulo agudo,

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

NOTA: $\operatorname{sen}^2 \alpha$ significa $(\operatorname{sen} \alpha)^2$ y $\cos^2 \alpha$ significa $(\cos \alpha)^2$.

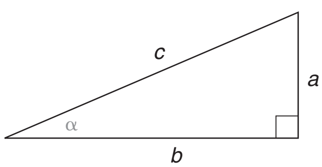


Figura 11.23

DEMOSTRACIÓN

En la figura 11.23, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c}$ y $\cos \alpha = \frac{b}{c}$. Entonces

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

En el triángulo rectángulo en la figura 11.23, $a^2 + b^2 = c^2$ por el teorema de Pitágoras. Sustituyendo c^2 por $a^2 + b^2$, se tiene

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Se deduce que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para cualquier ángulo α. ■

NOTA: Utilice su calculadora para demostrar que $(\operatorname{sen} 67°)^2 + (\cos 67°)^2 = 1$. El teorema 11.2.1 también es verdadero para $\alpha = 0°$ y $\alpha = 90°$.

EJEMPLO 8

En el triángulo rectángulo ABC (no se muestra), $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$. Encuentre $\cos \alpha$.

Solución

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \frac{4}{9} + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \cos^2 \alpha &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Ejercicios 16, 17

Por tanto, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

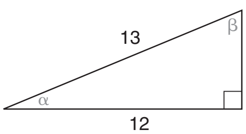
NOTA: Dado que $\cos \alpha > 0$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ en vez de $-\frac{\sqrt{5}}{3}$. ■

El teorema 11.2.1 representa una de muchas identidades trigonométricas. En la sección 11.3 se encontrarán identidades trigonométricas adicionales contenidas en los ejercicios 33-36.

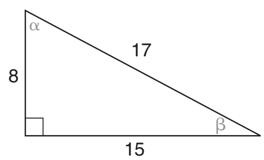
Ejercicios 11.2

En los ejercicios 1 al 6 encuentre $\cos \alpha$ y $\cos \beta$.

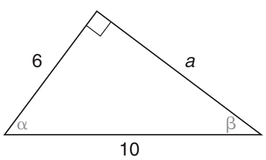
1.



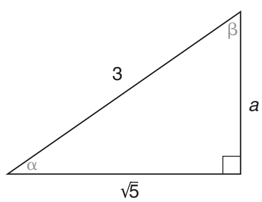
2.



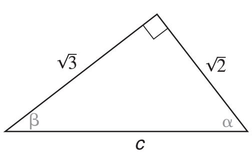
3.



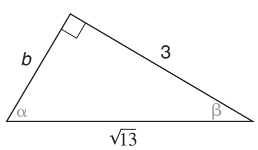
4.



5.



6.



7. En los ejercicios 1 al 6:
a) ¿Por qué $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$?
b) ¿Por qué $\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta$?

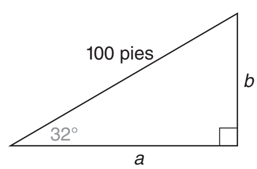
8. Utilizando el triángulo rectángulo del ejercicio 1, demuestre que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

En los ejercicios 9 al 16 utilice una calculadora científica para encontrar la relación proporcional coseno con cuatro cifras decimales.

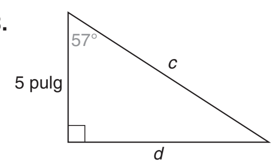
9. $\cos 23°$	**10.** $\cos 0°$	**11.** $\cos 17°$	**12.** $\cos 73°$
13. $\cos 90°$	**14.** $\cos 42°$	**15.** $\cos 82°$	**16.** $\cos 7°$

En los ejercicios 17 al 22 utilice la relación proporcional seno o la relación proporcional coseno para encontrar las longitudes de los lados indicados del triángulo redondeadas a la décima de unidad.

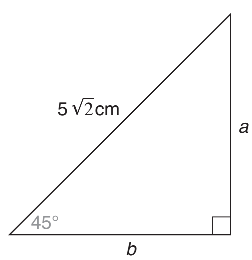
17.



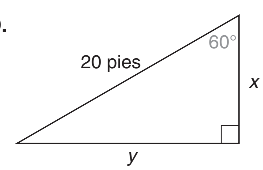
18.

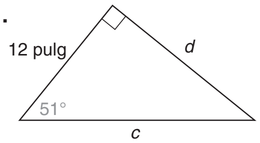


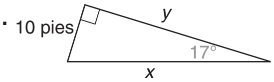
19.



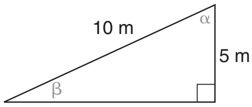
20.

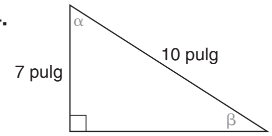


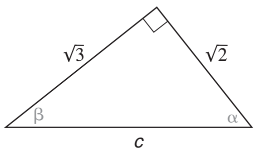
21. 

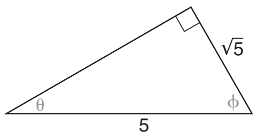
22. 

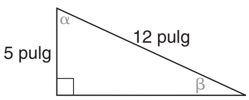
En los ejercicios 23 al 28 utilice la relación proporcional seno o la relación proporcional coseno, según se necesite, para encontrar la medida de cada ángulo indicado aproximada al grado más cercano.

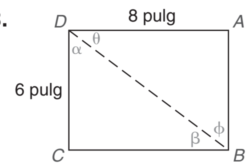
23. 

24. 

25. 

26. 

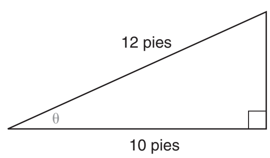
27. 

28. 

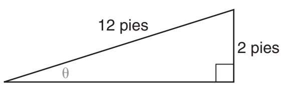
Rectángulo *ABCD*

En los ejercicios 29 al 37 las medidas de los ángulos se deben dar aproximadas al grado más cercano; las distancias se deben dar aproximadas a la décima de unidad.

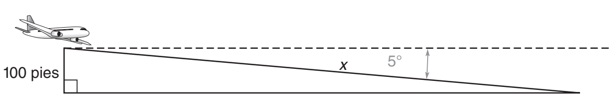
29. Para construir una cochera en su casa Gene quiere utilizar un techo inclinado de 12 pies que cubra una ampliación que mide 10 pies de ancho. Encuentre la medida del ángulo θ.



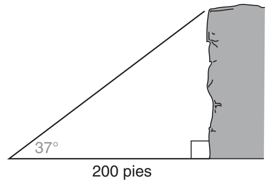
30. Gene rediseñó la cochera del ejercicio 29 de manera que el techo de 12 pies se eleva 2 pies, como se muestra. Encuentre la medida del ángulo θ.



31. Cuando un avión desciende para aterrizar el ángulo de depresión es 5°. Cuando el avión tiene una lectura de 100 pies en el altímetro, ¿cuál es su distancia x al comienzo del aterrizaje?

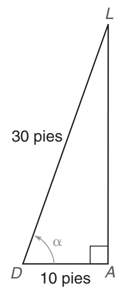


32. Desde un punto a 200 pies de la base de un acantilado, Journey observa la parte superior del acantilado a un ángulo de elevación de 37°. ¿Cuál es la altura del acantilado?



33. Encuentre la longitud de cada apotema en un pentágono regular cuyos radios miden 10 pulg cada uno.

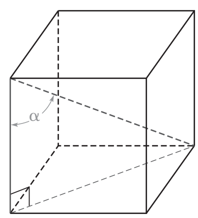
34. Dale mira hacia arriba para observar a su amiga Lisa que saluda desde la ventana de su apartamento a 30 pies de él. Si Dale está parado a 10 pies del edificio, ¿cuál es el ángulo de elevación cuando mira arriba hacia donde está Lisa?



35. Encuentre la longitud del radio en un decágono regular para el cual cada apotema tiene una longitud de 12.5 cm.

36. Al buscar sobrevivientes de un accidente en un bote, un helicóptero se mueve horizontalmente a través del océano a una altura de 200 pies sobre la superficie del agua. Si se observa a una persona aferrada a una balsa salvavidas a un ángulo de depresión de 12°, ¿cuál es la distancia entre el helicóptero y la persona en el agua?

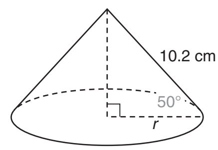
***37.** ¿Cuál es la medida del ángulo α formado por una diagonal de un cubo y uno de sus bordes?



38. En el cono circular recto,

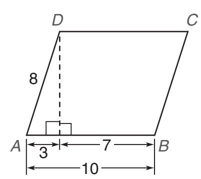
a) encuentre r redondeada a décimas.

b) utilice $L = \pi r\ell$ para encontrar el área lateral del cono.

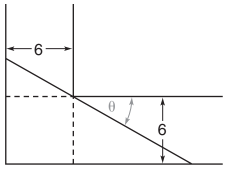


39. En el paralelogramo *ABCD* encuentre, redondear a grados:

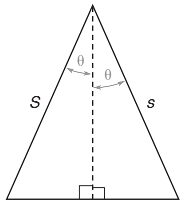
a) m∠A b) m∠B



40. Una escalera se carga horizontalmente para pasarla por una esquina en forma de L en un pasillo. Demuestre que la escalera tiene la longitud $L = \frac{6}{\text{sen } \theta} + \frac{6}{\cos \theta}$.



41. Utilice el dibujo dado para demostrar que el área del triángulo isósceles es $A = s^2 \text{ sen } \theta \cos \theta$.



42. En un pentágono regular *ABCDE*, cada radio tiene longitud *r*. En términos de *r*, encuentre una expresión para el perímetro de *ABCDE*.

43. Considere el pentágono regular *ABCDE* del ejercicio 42. En términos de la longitud del radio *r*, encuentre una expresión para el área de *ABCDE*.

11.3 Relación proporcional tangente y otras razones

CONCEPTOS CLAVE

- Relación proporcional tangente: $\tan \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$
- Cotangente
- Secante
- Cosecante
- Relaciones proporcionales recíprocas

Como en las secciones 11.1 y 11.2, en esta sección se tratará estrictamente con triángulos rectángulos. La relación proporcional trigonométrica siguiente que se considera es la relación proporcional **tangente**, la cual está definida para un ángulo agudo del triángulo rectángulo por

$$\frac{\text{longitud del cateto } \textit{opuesto} \text{ al ángulo agudo}}{\text{longitud del cateto } \textit{adyacente} \text{ al ángulo agudo}}$$

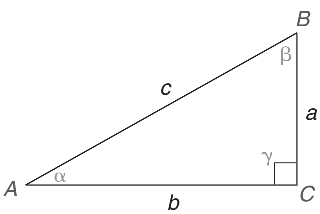


Figura 11.24

Al igual que la relación proporcional seno, la relación proporcional tangente aumenta cuando la medida del ángulo agudo aumenta. A diferencia de las relaciones proporcionales seno y coseno, cuyos valores varían de 0 a 1, el valor de la relación proporcional tangente es de 0 hacia arriba; es decir, no existe un valor máximo para la tangente.

DEFINICIÓN

En un triángulo rectángulo, la **relación proporcional tangente** para un ángulo agudo es la relación proporcional $\frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$.

NOTA: En el $\triangle ABC$ rectángulo en la figura 11.24, $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ y $\tan \beta = \frac{b}{a}$, en las que "tan" es una forma abreviada de la palabra tangente.

Exploración tecnológica

Si tiene una calculadora graficadora trace la gráfica de $y = \tan x$ sujeta a estas condiciones:

i. La calculadora debe estar en el modo grados.
ii. La ventana tiene $0 \leq x \leq 90$ y $0 \leq y \leq 4$

Demuestre que $y = \tan x$ aumenta conforme x aumenta.

EJEMPLO 1

Encuentre los valores de $\tan \alpha$ y $\tan \beta$ para el triángulo en la figura 11.25.

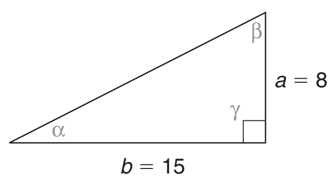


Figura 11.25

Solución Utilizando el hecho de que la relación proporcional tangente es $\frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$, se encuentra que

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{8}{15}$$

y

$$\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{15}{8}$$

■

Ejercicios 1-4

El valor de tan θ cambia de 0 para un ángulo de 0° a un valor inmensamente grande conforme la medida del ángulo agudo tiende a 90°. El hecho de que la relación proporcional tangente $\frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$ se vuelva infinitamente grande cuando $\theta \to 90°$ se deduce del hecho de que el denominador se vuelve menor y tiende a 0 conforme el numerador aumenta.

Estudie la figura 11.26 para ver por qué el valor de la tangente de un ángulo crece inmensurablemente grande cuando la medida del ángulo tiende a 90°. Con frecuencia esta relación se expresa escribiendo: conforme $\theta \to 90°$, $\tan\theta \to \infty$. El símbolo ∞ se lee "infinito" e implica que tan 90° no es medible; por tanto tan 90° es *indefinida*.

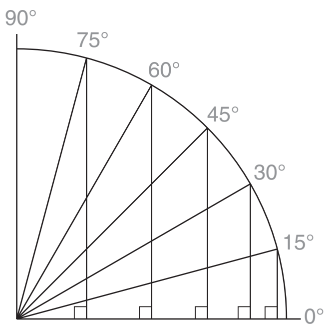


Figura 11.26

DEFINICIÓN

tan 0° = 0 y tan 90° es indefinida.

NOTA: Utilice su calculadora para comprobar que tan 0° = 0. ¿Qué sucede cuando utiliza su calculadora para encontrar tan 90°?

Ciertas relaciones proporcionales tangente se encuentran empleando triángulos rectángulos especiales. Observando los triángulos en la figura 11.27 y utilizando el hecho de que $\tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$, se tiene

$$\tan 30° = \frac{x}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.5774$$

$$\tan 45° = \frac{x}{x} = 1$$

$$\tan 60° = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3} \approx 1.7321$$

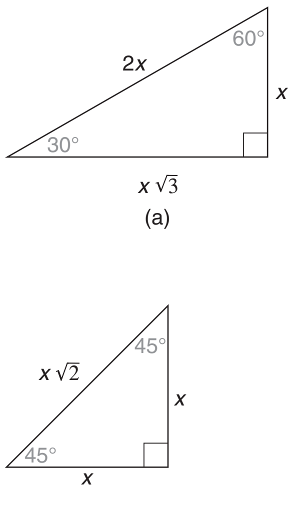


Figura 11.27

En el ejemplo 2 se aplica la relación proporcional tangente.

EJEMPLO 2

Un telesquí mueve cada silla a un ángulo de 25°, como se muestra en la figura 11.28. ¿Qué cambio vertical (elevación) corresponde a un cambio horizontal (recorrido) de 845 pies?

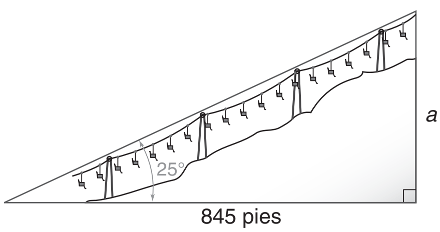


Figura 11.28

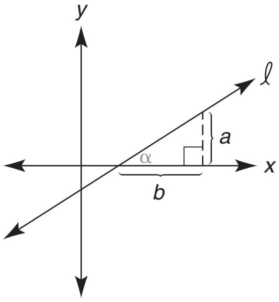
Solución En el triángulo, $\tan 25° = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{845}$. De $\tan 25° = \frac{a}{845}$, se multiplica por 845 para obtener $a = 845 \cdot \tan 25°$. Utilizando una calculadora se encuentra que $a \approx 394$ pies. ■

Ejercicios 5-8

La relación proporcional tangente también se puede emplear para determinar la medida de un ángulo si se conocen las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo. Esto se ilustra en el ejemplo 3.

Geometría en el mundo real

En el sistema coordenado ilustrado se observa que la pendiente de la recta es $m = \tan \alpha$.



EJEMPLO 3

Mary Katherine observa un avión que vuela sobre Mission Rock, la cual está a 1 mi de distancia. Si se sabe que Mission Rock tiene una altura de 135 pies y el avión está a 420 pies sobre ésta, ¿entonces cuál es el ángulo de elevación al cual Mary Katherine observa el avión?

Solución De la figura 11.29 y del hecho de que 1 mi = 5280 pies,

$$\tan \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{555}{5280}$$

Entonces $\tan \theta \approx 0.1051$, por tanto $\theta = 6°$ aproximado al grado más cercano.

Figura 11.29

NOTA: La solución para el ejemplo 3 requirió el uso de una calculadora. Cuando se emplea una calculadora científica en el modo grados, la secuencia de teclas común es

$$\boxed{\cdot} \to \boxed{1} \to \boxed{0} \to \boxed{5} \to \boxed{1} \to \boxed{\text{inv}} \to \boxed{\tan} \to \boxed{6}$$

Cuando se utiliza una calculadora graficadora en el modo grados, la secuencia de teclas común es

$$\boxed{\tan^{-1}} \to \boxed{\cdot} \to \boxed{1} \to \boxed{0} \to \boxed{5} \to \boxed{1} \to \boxed{\text{ENTER}} \to \boxed{6}$$

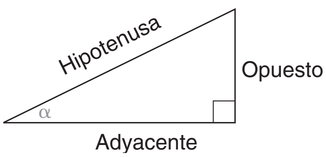


Figura 11.30

Para el triángulo rectángulo en la figura 11.30, ahora se tienen tres relaciones proporcionales que se pueden emplear en la resolución de problemas. Éstas se resumen a continuación:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

GEE
Ejercicios 9-11

La ecuación $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ contiene tres variables: α, a y b. Si se conocen los valores de dos de las variables se puede determinar el valor de la tercera variable.

EJEMPLO 4

En la figura 11.31 mencione la relación proporcional que se debe emplear para encontrar:

a) a, si se conocen α y c
b) α, si se conocen a y b
c) β, si se conocen a y c
d) b, si se conocen a y β

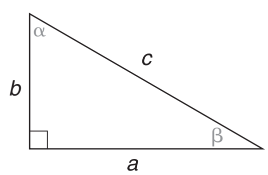


Figura 11.31

Solución

a) seno, ya que sen $\alpha = \frac{a}{c}$
b) tangente, ya que tan $\alpha = \frac{a}{b}$
c) coseno, ya que cos $\beta = \frac{a}{c}$
d) tangente, ya que tan $\beta = \frac{b}{a}$ ■

EJEMPLO 5

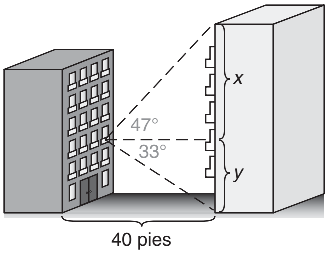


Figura 11.32

Dos edificios de apartamentos están separados 40 pies. Desde una ventana de su apartamento, Izzi puede ver la parte superior del otro edificio de apartamentos a un ángulo de elevación de 47°. Ella también puede ver la base del otro edificio a un ángulo de depresión de 33°. ¿Aproximadamente cuál es la altura del otro edificio?

Solución En la figura 11.32 la altura del edificio es la suma $x + y$. Utilizando los triángulos rectángulos superior e inferior, se tiene

$$\tan 47^\circ = \frac{x}{40} \quad \text{y} \quad \tan 33^\circ = \frac{y}{40}$$

Ahora $\quad x = 40 \cdot \tan 47^\circ \quad$ y $\quad y = 40 \cdot \tan 33^\circ$

Entonces $x \approx 43$ y $y \approx 26$, por tanto, $x + y \approx 43 + 26 = 69$. El edificio tiene una altura aproximada de 69 pies.

NOTA: En el ejemplo 5 se puede determinar la altura del edificio $(x + y)$ introduciendo la expresión $40 \cdot \tan 47^\circ + 40 \cdot \tan 33^\circ$ en su calculadora. ■

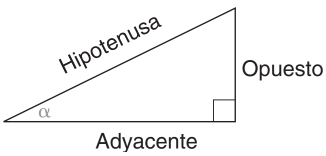


Figura 11.33

Hay un total de seis relaciones proporcionales trigonométricas. Como complemento se definen las relaciones proporcionales restantes; sin embargo, se pueden resolver todos los problemas de aplicación en este capítulo empleando sólo las relaciones proporcionales seno, coseno y tangente. Las relaciones proporcionales restantes son la **cotangente** (que se abrevia "cot"), la **secante** (que se abrevia "sec") y la **cosecante** (que se abrevia "csc"). Éstas se definen en términos del triángulo rectángulo que se muestra en la figura 11.33.

$$\cot \alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$
$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$$
$$\csc \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$$

Exploración tecnológica

Si tiene una calculadora graficadora demuestre que tan 23° es igual a $\frac{\text{sen } 23^\circ}{\cos 23^\circ}$. La identidad tan $\alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ es verdadera siempre que $\cos \alpha \neq 0$.

Para la fracción $\frac{a}{b}$ (donde $b \neq 0$), el recíproco es $\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$. Es fácil ver que cot α es el recíproco de tan α, sec α es el recíproco de cos α y csc α es el recíproco de sen α. En el recuadro siguiente se invierte la relación proporcional trigonométrica a la izquierda para obtener la relación proporcional recíproca que se menciona a la derecha.

RELACIÓN PROPORCIONAL TRIGONOMÉTRICA	RELACIÓN PROPORCIONAL RECÍPROCA
$\text{seno } \alpha = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{cosecante } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$
$\text{coseno } \alpha = \dfrac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{secante } \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$
$\text{tangente } \alpha = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$	$\text{cotangente } \alpha = \dfrac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$

En las calculadoras sólo se presentan las relaciones proporcionales seno, coseno y tangente. Pero con las teclas $\boxed{1/x}$ o $\boxed{x^{-1}}$ se pueden obtener los valores de las relaciones proporcionales restantes. Vea el ejemplo 6 para los detalles.

EJEMPLO 6

Utilice una calculadora para evaluar

a) csc 37° b) cot 51° c) sec 84°

Solución

a) Primero se utiliza la calculadora para encontrar sen 37° ≈ 0.6081. Ahora se utiliza la tecla $\boxed{1/x}$ o $\boxed{x^{-1}}$ para mostrar que csc 37° ≈ 1.6616.
b) Primero se utiliza la calculadora para encontrar tan 51° ≈ 1.2349. Ahora se utiliza la tecla $\boxed{1/x}$ o $\boxed{x^{-1}}$ para mostrar que cot 51° ≈ 0.8098.
c) Primero se utiliza la calculadora para encontrar cos 84° ≈ 0.1045. Ahora se utiliza la tecla $\boxed{1/x}$ o $\boxed{x^{-1}}$ para mostrar que sec 84° ≈ 9.5668.

GEE
Ejercicios 12-16

NOTA: En el inciso (a) el valor de csc 37° se puede determinar utilizando la entrada siguiente en una calculadora graficadora: (sen 37)$^{-1}$. Se pueden emplear entradas similares en los incisos (b) y (c). ■

En el ejemplo 7 no se necesita una calculadora para obtener resultados exactos.

EJEMPLO 7

Para el triángulo en la figura 11.34, encuentre los valores exactos de las seis relaciones proporcionales trigonométricas para el ángulo θ.

Solución Se necesita la longitud c de la hipotenusa, que se determina con el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} c^2 &= 5^2 + 6^2 \\ c^2 &= 25 + 36 \\ c^2 &= 61 \\ c &= \sqrt{61} \end{aligned}$$

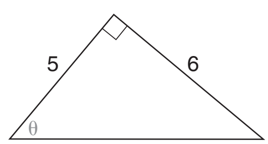


Figura 11.34

Recuerde

El recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

NOTA: $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Por tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{6}{\sqrt{61}} = \frac{6}{\sqrt{61}} \cdot \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{\sqrt{61}} = \frac{5}{\sqrt{61}} \cdot \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{6}{5}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{5}{6}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{\sqrt{61}}{5}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{\sqrt{61}}{6}$$

NOTA: Las flechas en el ejemplo 7 indican cuáles pares de relaciones proporcionales son recíprocas entre sí. ■

EJEMPLO 8

Evalúe la relación proporcional que se menciona utilizando la relación proporcional dada:

a) $\tan\theta$, si $\cot\theta = \frac{2}{3}$
b) $\operatorname{sen}\alpha$, si $\csc\alpha = 1.25$
c) $\sec\beta$, si $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\csc\gamma$, si $\operatorname{sen}\gamma = 1$

Solución

a) Si $\cot\theta = \frac{2}{3}$, entonces $\tan\theta = \frac{3}{2}$ (el recíproco de $\cot\theta$).
b) Si $\csc\alpha = 1.25$ o $\frac{5}{4}$, entonces $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$ (el recíproco de $\csc\alpha$).
c) Si $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces $\sec\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ o $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (el recíproco de $\cos\beta$).
d) Si $\operatorname{sen}\gamma = 1$, entonces $\csc\gamma = 1$ (el recíproco de $\operatorname{sen}\gamma$). ■

EJEMPLO 9

Aproximado al grado más cercano, ¿cuánto mide θ en el triángulo en la figura 11.35 si $\cot\theta = \frac{8}{5}$?

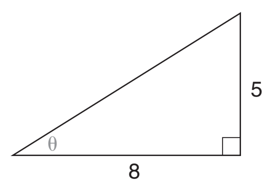


Figura 11.35

Solución Dado que se conoce el valor de $\cot\theta$, se puede utilizar su recíproco para encontrar θ. Es decir,

$$\tan\theta = \frac{5}{8}$$

Con una calculadora científica, se determina θ siguiendo la secuencia de teclas

$$\boxed{5} \rightarrow \boxed{\div} \rightarrow \boxed{8} \rightarrow \boxed{=} \rightarrow \boxed{\text{inv}} \rightarrow \boxed{\tan} \rightarrow \boxed{\mathbf{32}}$$

Cuando se emplea una calculadora graficadora la secuencia de teclas es

$$\boxed{\tan^{-1}} \rightarrow \boxed{(} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{\div} \rightarrow \boxed{8} \rightarrow \boxed{)} \rightarrow \boxed{\text{ENTER}} \rightarrow \boxed{\mathbf{32}}$$

Por tanto, $\theta \approx 32°$. ■

En los ejercicios de aplicación que siguen a esta sección, tendrá que decidir cuál relación proporcional trigonométrica le permite resolver el problema. También se puede utilizar el teorema de Pitágoras.

EJEMPLO 10

A medida que su bote pesquero se mueve en la bahía, el capitán observa que el ángulo de elevación de la parte superior del faro es 11°. Si el faro tiene una altura de 200 pies, ¿qué tan alejado está el bote del faro? Vea la figura 11.36.

Solución De nuevo se utiliza la relación proporcional tangente; en la figura 11.36,

$$\tan 11^\circ = \frac{200}{x}$$
$$x \cdot \tan 11^\circ = 200$$
$$x = \frac{200}{\tan 11^\circ} \approx 1028.91$$

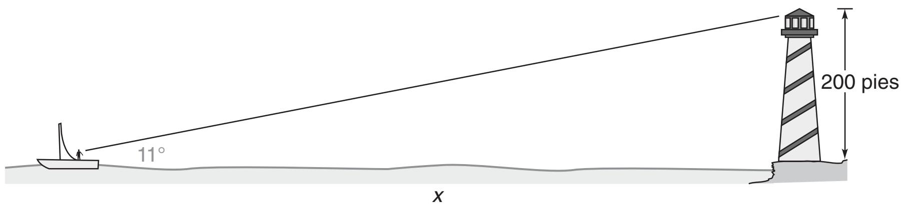


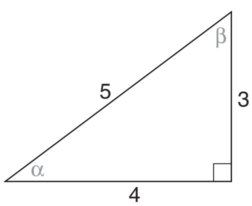
Figura 11.36

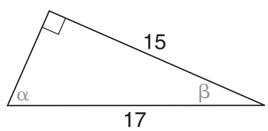
GEE *Ejercicios 17, 18*

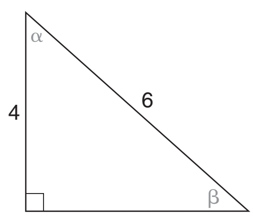
El bote está aproximadamente a 1029 pies del faro. ■

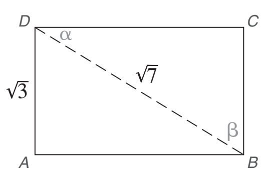
▶▶▶ Ejercicios 11.3

En los ejercicios 1 al 4 encuentre α y β para cada triángulo.

1.


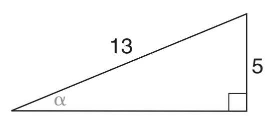
2.


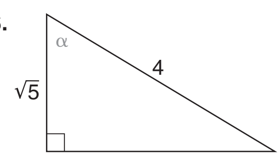
3.


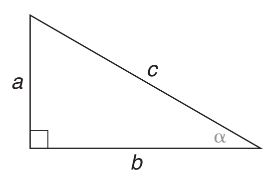
4.


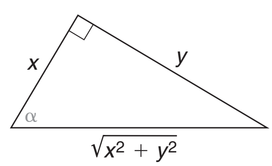
Rectángulo *ABCD*

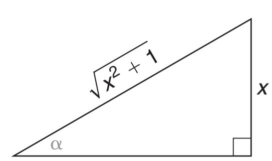
En los ejercicios 5 al 10 encuentre el valor (o la expresión) para cada una de las seis relaciones proporcionales trigonométricas del ángulo α. Utilice el teorema de Pitágoras según se necesite.

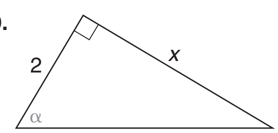
5.


6.


7.


8.


9.


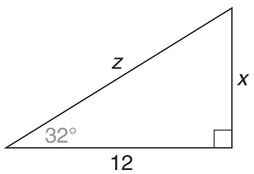
10.


En los ejercicios 11 al 14 utilice una calculadora para encontrar la relación proporcional tangente que se indica con cuatro cifras decimales.

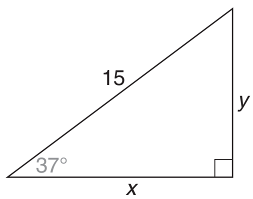
11. tan 15° **12.** tan 45°
13. tan 57° **14.** tan 78°

En los ejercicios 15 al 20 utilice la relación proporcional seno, coseno o tangente para encontrar las longitudes de los lados que se indican aproximadas a la décima de una unidad más cercana.

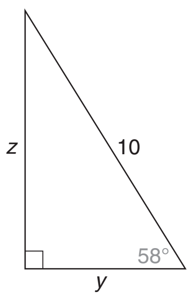
15.



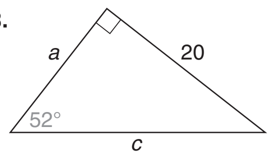
16.



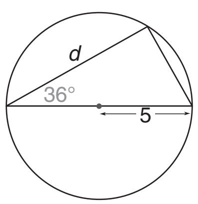
17.



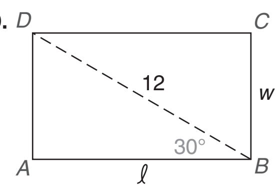
18.



19.



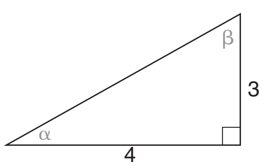
20.



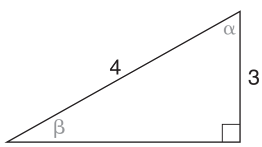
Rectángulo *ABCD*

En los ejercicios 21 al 26 utilice la relación proporcional seno, coseno o tangente para encontrar las medidas de los ángulos que se indican aproximadas al grado más cercano.

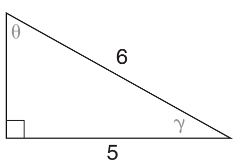
21.



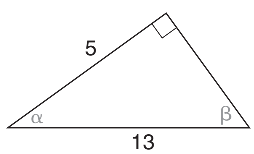
22.



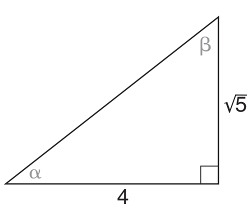
23.



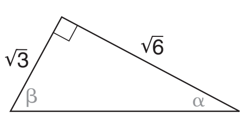
24.



25.



26.



En los ejercicios 27 al 32 utilice una calculadora y relaciones recíprocas para encontrar cada relación proporcional redondeada a cuatro cifras decimales.

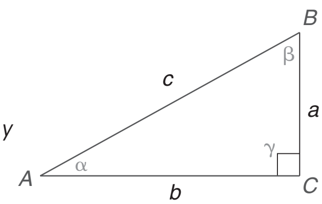
27. cot 34° **28.** sec 15°
29. csc 30° **30.** cot 67°
31. sec 42° **32.** csc 72°

Para resolver los ejercicios 33 al 36 realice una lista de identidades trigonométricas. Como recuerda (vea la página 508), una identidad es un enunciado verdadero para todas las elecciones permisibles de la variable.

33. a) Para $\alpha \neq 90°$, demuestre la identidad

$$\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

(SUGERENCIA: sen $\alpha = \frac{a}{c}$ y $\cos \alpha = \frac{b}{c}$.*)*



Ejercicios 33-36

b) Utilice su calculadora para demostrar que tan 23° y $\frac{\text{sen } 23°}{\cos 23°}$ son equivalentes.

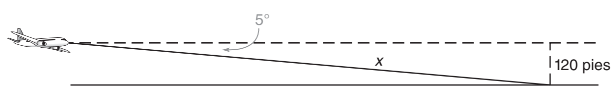
34. a) Para $\alpha \neq 0°$, demuestre la identidad $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$.
b) Utilice su calculadora para determinar cot 57° dividiendo cos 57° entre sen 57°.

35. a) Para $\alpha \neq 90°$, demuestre la identidad $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$.
b) Utilice su calculadora para determinar sec 82°.

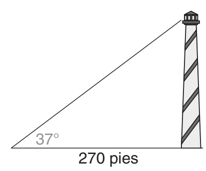
36. a) Para $\alpha \neq 0°$, demuestre la identidad $\csc \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$.
b) Utilice su calculadora para determinar csc 12.3°.

En los ejercicios 37 al 43 las medidas de los ángulos se deben dar aproximadas al grado más cercano; las distancias se deben dar aproximadas a la décima de una unidad más cercana.

37. Cuando un avión desciende para aterrizar, el piloto nota un ángulo de depresión de 5°. Si el altímetro muestra una lectura de la altitud de 120 pies, ¿cuál es la distancia *x* desde el avión hasta tocar la pista?

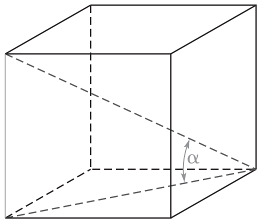


38. Raquel mira la parte superior de una torre de observación desde un punto a 270 pies de su base. Si el ángulo de elevación es 37°, ¿cuál es la altura de la torre?



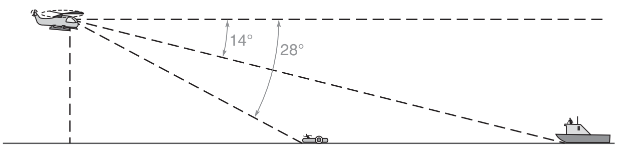
39. Encuentre la longitud de la apotema de cada uno de los lados de 6 pulg de un pentágono regular.

***40.** ¿Cuál es la medida del ángulo entre la diagonal de un cubo y la diagonal de la cara del cubo?

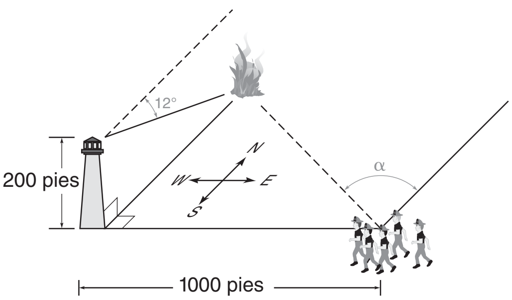


41. Al llegar a casa Liz escucha que Lynette le grita. Liz, quien está a 10 pies de la casa, mira hacia arriba para ver a Lynette en la ventana del tercer piso aproximadamente a 32 pies. ¿Cuál es la medida del ángulo de elevación cuando Liz mira a Lynette?

***42.** Mientras un helicóptero permanece en vuelo estacionario a 1000 pies por encima de la superficie del agua, el piloto del mismo ve a una persona en un bote salvavidas a un ángulo de depresión de 28°. A lo largo de una línea recta también se puede ver un bote de rescate a un ángulo de depresión de 14°, ¿qué tan alejado está el bote de rescate del bote salvavidas?



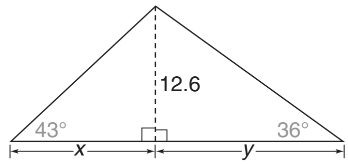
***43.** Desde la parte superior de una torre de observación de 200 pies de alto se divisa un incendio al norte, a un ángulo de depresión de 12°. Los bomberos ubicados a 1000 pies al este de la torre tienen que abrirse camino a través del denso follaje hacia el incendio. De acuerdo con sus brújulas, ¿a qué ángulo (medido del norte hacia el oeste) deben encaminarse los bomberos?



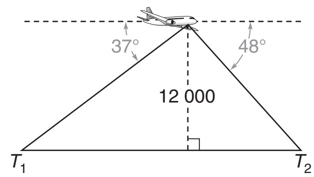
44. En el triángulo ilustrado, encuentre cada medida aproximada a la décima de una unidad más cercana.

a) x b) y

c) A, el área del triángulo



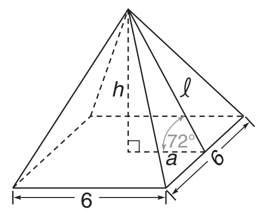
45. A una altura de 12 000 pies, un piloto ve dos pueblos a ángulos de depresión de 37 y 48°, como se muestra. Aproximada a la decena de pies más cercana, ¿cuál es la distancia entre ambos pueblos?



46. Considere la pirámide cuadrada regular ilustrada.

a) Encuentre la longitud ℓ redondeada a décimas.

b) Utilice ℓ del inciso (a) para encontrar el área lateral de la pirámide.



Ejercicios 46, 47

47. Considere la pirámide cuadrada regular ilustrada.

a) Encuentre la altura h aproximada a la décima de una unidad más cercana.

b) Utilice h del inciso (a) para encontrar el volumen de la pirámide.

11.4 Aplicaciones con triángulos agudos

CONCEPTOS CLAVE

Área de un triángulo:

$$A = \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha$$
$$A = \tfrac{1}{2}ac \operatorname{sen} \beta$$
$$A = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma$$

Ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Ley de los cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

o

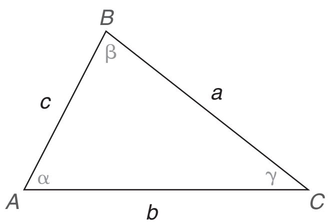
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

En las secciones 11.1 a 11.3 se analizaron estrictamente triángulos rectángulos; por tanto, los lados de cada triángulo que se consideró tenían dos catetos y una hipotenusa. Ahora se analizarán algunas relaciones que se comprobarán para –y se aplicarán con– triángulos *agudos*. La primera relación proporciona una fórmula para el área de un triángulo en donde α, β y γ son ángulos agudos.

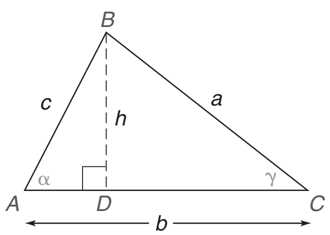
ÁREA DE UN TRIÁNGULO

TEOREMA 11.4.1

El área de un triángulo agudo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados por el seno del ángulo incluido.



(a)



(b)

Figura 11.37

DADO: $\triangle ABC$ agudo, como se muestra en la figura 11.37(a).

DEMUESTRE: $A = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha$

DEMOSTRACIÓN: El área del triángulo está dada por $A = \frac{1}{2}bh$. Con la altura $\overline{BD}$ [vea la figura 11.37(b)], se observa que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{c}$ en el $\triangle ABD$ rectángulo. Entonces $h = c \operatorname{sen} \alpha$. En consecuencia, $A = \frac{1}{2}bh$ se convierte

$$A = \frac{1}{2}b(c \operatorname{sen} \alpha), \quad \text{por tanto} \quad A = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha$$

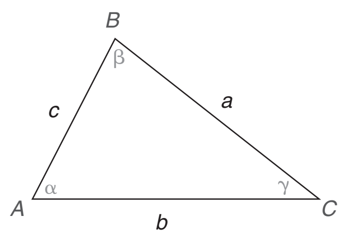
El teorema 11.4.1 tiene tres formas equivalentes, como se muestra en el recuadro siguiente.

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

$$A = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha$$

De manera equivalente se puede demostrar que

$$A = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} \beta$$
$$A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma$$



Exploración tecnológica

Si tiene una calculadora graficadora puede evaluar muchos resultados con bastante facilidad. Para el ejemplo 1, evalúe $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 6 \cdot 10 \cdot \text{sen}\,(33)$. Utilice el modo grados.

En el curso más avanzado denominado trigonometría, esta fórmula del área también se puede demostrar para triángulos obtusos. Si el triángulo es un triángulo rectángulo con $\gamma = 90°$, entonces $A = \frac{1}{2}ab$ sen γ se vuelve $A = \frac{1}{2}ab$ ya que sen $\gamma = 1$. Recuerde el corolario 8.1.4.

EJEMPLO 1

En la figura 11.38 encuentre el área del $\triangle ABC$.

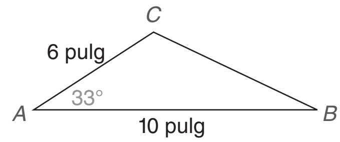


Figura 11.38

Solución Se utiliza $A = \frac{1}{2}bc$ sen α, ya que se conocen α, b y c.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \text{sen } 33° \\ &= 30 \cdot \text{sen } 33° \\ &\approx 16.3 \text{ pulg}^2 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2

En el $\triangle ABC$ (que se muestra en la figura 11.39), $a = 7.6$ y $c = 10.2$. Si el área del $\triangle ABC$ es aproximadamente 38.3 unidades cuadradas, encuentre β aproximado al grado más cercano. Observe que el $\angle B$ es agudo.

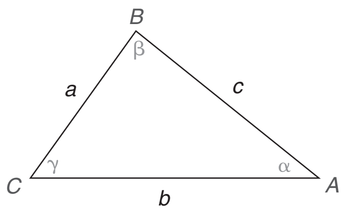


Figura 11.39

Solución Utilizando la forma $A = \frac{1}{2}ac$ sen β, se tiene $38.3 = (0.5)(7.6)(10.2)$ sen β o $38.3 = 38.76$ sen β. Así, sen $\beta = \frac{38.3}{38.76}$ por tanto $\beta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{38.3}{38.76}\right)$. Entonces $\beta \approx 81°$ (redondeado de 81.16). ■

GEE *Ejercicios 1-4*

LEY DE LOS SENOS

Dado que el área de un triángulo es única, se pueden igualar las tres expresiones de área caracterizadas por el teorema 11.4.1 como sigue:

$$\frac{1}{2}bc \text{ sen } \alpha = \frac{1}{2}ac \text{ sen } \beta = \frac{1}{2}ab \text{ sen } \gamma$$

Dividiendo cada parte de esta igualdad entre $\frac{1}{2}abc$, se obtiene

$$\frac{\frac{1}{2}bc \text{ sen } \alpha}{\frac{1}{2}bca} = \frac{\frac{1}{2}ac \text{ sen } \beta}{\frac{1}{2}acb} = \frac{\frac{1}{2}ab \text{ sen } \gamma}{\frac{1}{2}abc}$$

Por tanto $$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

Esta relación entre las longitudes de los lados de un triángulo agudo y los senos de sus ángulos opuestos se conoce como ley de los senos. En trigonometría se demuestra que la ley de los senos es verdadera para triángulos rectángulos y también para triángulos obtusos.

TEOREMA 11.4.2 ▶ (Ley de los senos)

En cualquier triángulo agudo las tres relaciones proporcionales entre los senos de los ángulos y las longitudes de los lados opuestos son iguales. Es decir,

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c} \quad \text{o} \quad \frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

Al resolver un problema se igualan sólo dos de las relaciones proporcionales iguales descritas en el teorema 11.4.2. Por ejemplo, se puede utilizar

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} \quad \text{o} \quad \frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c} \quad \text{o} \quad \frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$$

En cada ecuación las relaciones proporcionales que se emplean tienen la forma

$$\frac{\text{seno del ángulo}}{\text{longitud del lado opuesto al ángulo}}$$

EJEMPLO 3

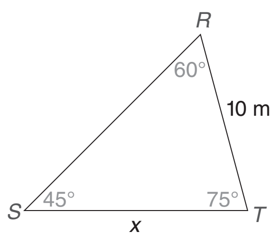


Figura 11.40

Utilice la ley de los senos para encontrar la longitud exacta ST en la figura 11.40.

Solución Puesto que se conocen RT y las medidas de los ángulos S y R, se utiliza $\frac{\text{sen}\,S}{RT} = \frac{\text{sen}\,R}{ST}$. Sustituir los valores conocidos conduce a

$$\frac{\text{sen}\,45°}{10} = \frac{\text{sen}\,60°}{x}$$

Dado que $\text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, se tiene

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{10} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{x}$$

Por la propiedad medios-extremos,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10$$

Multiplicando por $\frac{2}{\sqrt{2}}$, se tiene

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \cdot x = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot 10$$

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\ \sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{6}}{2} = 5\sqrt{6}$$

Entonces $ST = 5\sqrt{6}$ m ■

EJEMPLO 4

En el $\triangle ABC$ (que se muestra en la figura 11.41), $b = 12$, $c = 10$ y $\beta = 83°$.
Encuentre γ aproximado al grado más cercano.

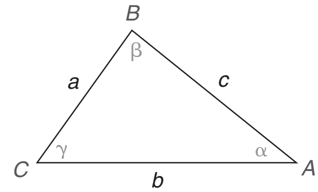


Figura 11.41

Solución Conociendo los valores de b, c y β se utiliza la forma siguiente de la ley de los senos para encontrar γ:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}.$$

$$\frac{\operatorname{sen} 83°}{12} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{10}, \qquad \text{por tanto} \qquad 12 \operatorname{sen}\gamma = 10 \operatorname{sen} 83°$$

Ejercicios 5-7

Entonces $\operatorname{sen}\gamma = \frac{10 \operatorname{sen} 83°}{12} \approx 0.8271$, por tanto $\gamma = \operatorname{sen}^{-1}(0.8271) \approx 56°$. ■

LEY DE LOS COSENOS

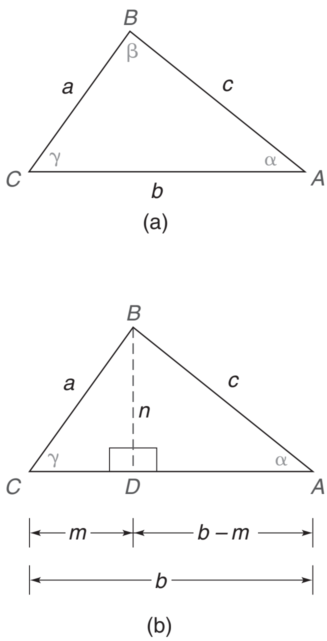


Figura 11.42

La relación final que se considera nuevamente se demuestra sólo para un triángulo agudo. Al igual que la ley de los senos, esta relación (que se conoce como ley de los cosenos) se puede utilizar para encontrar medidas desconocidas en un triángulo. La ley de los cosenos (que también se puede establecer para triángulos obtusos en un curso más avanzado) se puede enunciar en palabras como “El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados restantes menos el doble del producto de esos dos lados y el coseno de su ángulo incluido”. Vea la figura 11.42(a) conforme lea el teorema 11.4.3.

TEOREMA 11.4.3 ▶ (Ley de los cosenos)

En el $\triangle ABC$ agudo,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

La demostración de la primera forma de la ley de los cosenos es la siguiente:

DADO: $\triangle ABC$ agudo en la figura 11.42(a)

DEMUESTRE: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

DEMOSTRACIÓN: En la figura 11.42(a) trace la altura $\overline{BD}$ de B a $\overline{AC}$. Las longitudes de los segmentos de recta se designan como se muestra en la figura 11.42(b). Ahora

$$(b - m)^2 + n^2 = c^2 \qquad \text{y} \qquad m^2 + n^2 = a^2$$

por el teorema de Pitágoras.

La segunda ecuación es equivalente a $m^2 = a^2 - n^2$. Después de desarrollar $(b - m)^2$, la primera ecuación se vuelve

$$b^2 - 2bm + m^2 + n^2 = c^2$$

Luego se reemplaza m^2 con $(a^2 - n^2)$ para obtener

$$b^2 - 2bm + (a^2 - n^2) + n^2 = c^2$$

Simplificando se obtiene

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bm$$

En el $\triangle CDB$,

$$\cos\gamma = \frac{m}{a} \qquad \text{por tanto} \qquad m = a\cos\gamma$$

De aquí

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2bm \text{ se vuelve} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2b(a\cos\gamma) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

■

Se pueden proporcionar argumentos similares a la demostración anterior para las dos formas restantes de la ley de los cosenos. Aunque la ley de los cosenos se mantiene verdadera para triángulos rectos, el enunciado $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ se reduce al teorema de Pitágoras cuando $\gamma = 90°$ debido a que $\cos 90° = 0$.

EJEMPLO 5

Encuentre la longitud de $\overline{AB}$ en el triángulo en la figura 11.43.

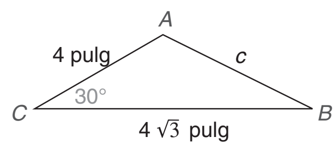


Figura 11.43

Solución Refiriéndose al ángulo de 30° como γ, se utiliza la forma siguiente de la ley de los cosenos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ c^2 &= (4\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4\cdot\cos 30° \\ c^2 &= 48 + 16 - 2\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ c^2 &= 48 + 16 - 48 \\ c^2 &= 16 \\ c &= 4 \end{aligned}$$

Por tanto, $AB = 4$ pulg.

NOTA: El $\triangle ABC$ es isósceles debido a que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. ■

La ley de los cosenos también se puede utilizar para encontrar la medida de un ángulo de un triángulo cuando se conocen las longitudes de sus tres lados. Es conveniente aplicar la forma alterna del teorema 11.4.3 en esas aplicaciones. Vea el ejemplo 6 en la página 525.

TEOREMA 11.4.3 ▶ (Forma alterna de la ley de los cosenos)

En el $\triangle ABC$ agudo,

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Demostración de la tercera forma

Si $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, entonces

$$2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2$$

Dividiendo cada lado de la ecuación entre $2ab$, se tiene

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Los argumentos para las formas alternas restantes son similares.

EJEMPLO 6

En el $\triangle ABC$ agudo de la figura 11.44 encuentre β aproximado al grado más cercano.

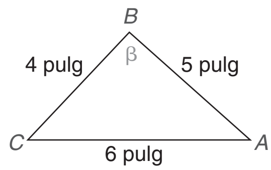


Figura 11.44

Solución La forma de la ley de los cosenos que comprende β es

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Con $a = 4$, $b = 6$ y $c = 5$, se tiene

$$\cos \beta = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5}$$

por tanto $$\cos \beta = \frac{16 + 25 - 36}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 0.1250$$

Con $\beta = \cos^{-1}(0.1250)$, se utiliza una calculadora para mostrar que $\beta \approx 83°$.

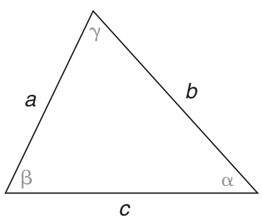


Figura 11.45

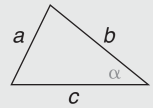
Advertencia

Si *sólo* se conocen las medidas de los tres ángulos del triángulo, entonces no se puede determinar la longitud de ningún lado.

Para encontrar la medida de un lado o de un ángulo de un triángulo agudo, con frecuencia se tiene que decidir cuál forma de la ley de los senos o de la ley de los cosenos se tiene que aplicar. La tabla 11.4 aborda esa pregunta y se basa en el triángulo agudo que se muestra en el dibujo adjunto. Observe que a, b y c representan las longitudes de los lados y que α, β y γ representan las medidas de los ángulos opuestos, respectivamente (vea la figura 11.45).

TABLA 11.4
Cuándo utilizar la ley de los senos/ley de los cosenos

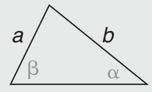
1. *Se conocen tres lados:* Utilice la ley de los cosenos para encontrar *cualquier* ángulo.
   Medidas conocidas: a, b y c
   Medida deseada: α

   $\therefore$ Utilice $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

   o $\cos \alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

2. *Se conocen dos lados y un ángulo no incluido:* Utilice la ley de los senos para encontrar el ángulo no incluido restante.
   Medidas conocidas: a, b y α
   Medida deseada: β

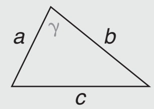
   

   $\therefore$ *Utilice* $\dfrac{\text{sen } \alpha}{a} = \dfrac{\text{sen } \beta}{b}$

continúa

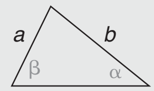
TABLA 11.4
Continuación

3. *Se conocen dos lados y un ángulo incluido:* Utilice la ley de los cosenos para encontrar el lado restante.
Medidas conocidas: a, b y γ
Medida deseada: c



$\therefore$ *Use* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

4. *Se conocen dos ángulos y un lado no incluido:* Utilice la ley de los senos para encontrar el otro lado no incluido.
Medidas conocidas: a, α y β
Medida deseada: b



$\therefore$ *Use* $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} \beta}{b}$

EJEMPLO 7

En el diseño de un columpio cada uno de los dos postes metálicos que soportan la barra superior mide 8 pies. Al nivel del suelo los postes están separados 6 pies (vea la figura 11.46). ¿A qué ángulo se deben asegurar los dos postes metálicos? Dé la respuesta aproximada al grado más cercano.

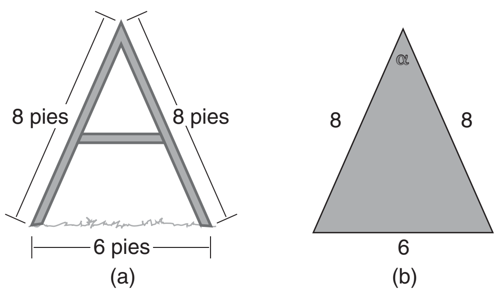


Figura 11.46

Solución Llame α a la medida del ángulo deseado. Como se conocen los tres lados del triángulo, se utiliza la ley de los cosenos de la forma $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Dado que a representa la longitud del lado opuesto al ángulo α, $a = 6$, en tanto que $b = 8$ y $c = 8$. En consecuencia, se tiene

$$\begin{aligned}
6^2 &= 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos \alpha \\
36 &= 64 + 64 - 128 \cos \alpha \\
36 &= 128 - 128 \cos \alpha \\
-92 &= -128 \cos \alpha \\
\cos \alpha &= \frac{-92}{-128} \\
\cos \alpha &\approx 0.7188
\end{aligned}$$

Con una calculadora se obtiene $\alpha \approx 44°$.

GÉE

Ejercicios 8-10

NOTA: La forma alterna $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ se puede aplicar más fácilmente en el ejemplo 7. ■

Ejercicios 11.4

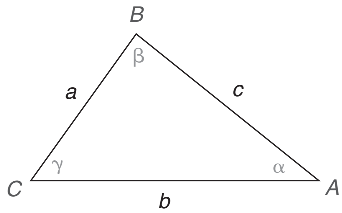
En los ejercicios 1 y 2 utilice la información dada para encontrar una expresión para el área del $\triangle ABC$. Dé la respuesta en una forma como $A = \frac{1}{2}(3)(4)$ *sen 32°. Vea la figura para los ejercicios 1-8.*

1. a) $a = 5$, $b = 6$ y $\gamma = 78°$
   b) $a = 5$, $b = 7$, $\alpha = 36°$ y $\beta = 88°$

2. a) $b = 7.3$, $c = 8.6$ y $\alpha = 38°$
   b) $a = 5.3$, $c = 8.4$, $\alpha = 36°$ y $\gamma = 87°$

En los ejercicios 3 y 4 enuncie la forma de la ley de los senos utilizada para resolver el problema. Dé la respuesta en una forma como $\frac{\text{sen } 72°}{6.3} = \frac{\text{sen } 55°}{a}$.

3. a) Encuentre β si se sabe que $a = 5$, $b = 8$ y $\alpha = 40°$.
   b) Encuentre c si se sabe que $a = 5.3$, $\alpha = 41°$ y $\gamma = 87°$.



Ejercicios 1-8

4. a) Encuentre β si se sabe que $b = 8.1$, $c = 8.4$ y $\gamma = 86°$
   b) Encuentre c si se sabe que $a = 5.3$, $\alpha = 40°$ y $\beta = 80°$.

En los ejercicios 5 y 6 enuncie la forma de la ley de los cosenos utilizada para resolver el problema. Utilizando los valores que se proporcionan dé la respuesta en una forma como $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. *Vea la figura para los ejercicios 1-8.*

5 a) Encuentre c si se sabe que $a = 5.2$, $b = 7.9$ y $\gamma = 83°$.
   b) Encuentre α si se sabe que $a = 6$, $b = 9$ y $c = 10$.

6. a) Encuentre b si se sabe que $a = 5.7$, $c = 8.2$ y $\beta = 79°$.
   b) Encuentre β si se sabe que $a = 6$, $b = 8$ y $c = 9$.

En los ejercicios 7 y 8 enuncie la forma de la ley de los senos o de la ley de los cosenos que utilizaría para resolver el problema. Vea la figura para los ejercicios 1-8.

7. a) Encuentre α si conoce los valores de a, b y β.
   b) Encuentre α si conoce los valores de a, b y c.

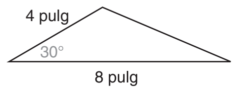
8. a) Encuentre b si conoce los valores de a, c y β.
   b) Encuentre b si conoce los valores de a, α y β.

9. Para el $\triangle ABC$ (no se muestra) suponga que sabe que $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$.
   a) Explique por qué *no* necesita aplicar la ley de los senos o la ley de los cosenos para encontrar la medida de γ.
   b) Encuentre γ.

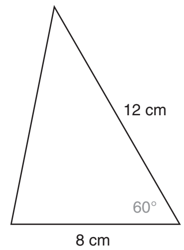
10. Para el $\triangle ABC$ (que no se muestra), suponga que sabe que $a = 3$, $\alpha = 57°$ y $\beta = 84°$.
   a) Explique por qué no necesita aplicar la ley de los senos o la ley de los cosenos para encontrar la medida de γ.
   b) Encuentre γ.

En los ejercicios 11 al 14 encuentre el área de cada triángulo que se ilustra. Proporcione la respuesta aproximada a la décima más cercana de una unidad cuadrada.

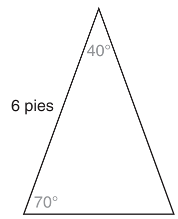
11.



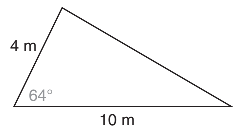
12.



13.

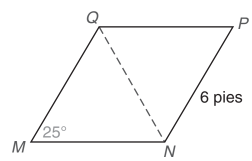


14.



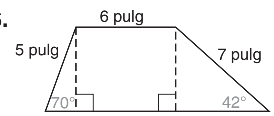
En los ejercicios 15 y 16 encuentre el área de la figura dada. Proporcione la respuesta aproximada a la décima más cercana de una unidad cuadrada.

15.



Rombo *MNPQ*

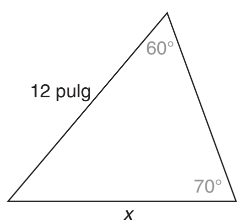
16.



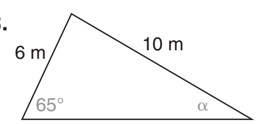
Trapezoide

En los ejercicios 17 al 22 utilice una forma de la ley de los senos para encontrar la medida del lado o ángulo que se indica. Las medidas de los ángulos se deben encontrar redondeadas a grados y las longitudes de los lados redondeadas a décimas de unidad.

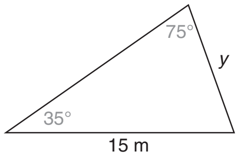
17.



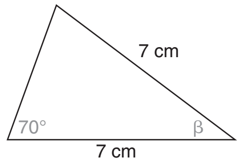
18.



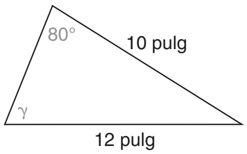
19.



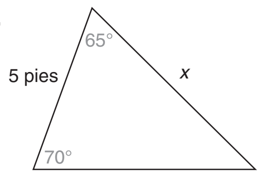
20.



21.

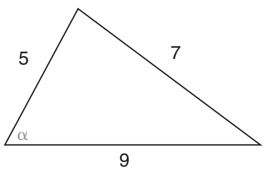


22.

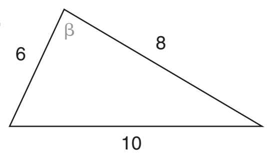


En los ejercicios 23 al 28 utilice una forma de la ley de los cosenos para encontrar la medida del lado o ángulo que se indica. Las medidas de los ángulos se deben encontrar redondeadas a grados y las longitudes de los lados redondeadas a décimas de unidad.

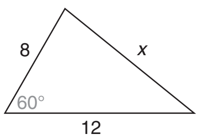
23.



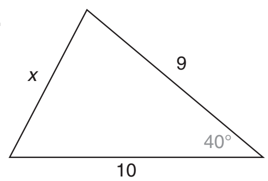
24.



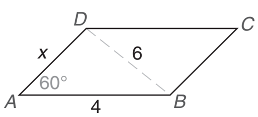
25.



26.

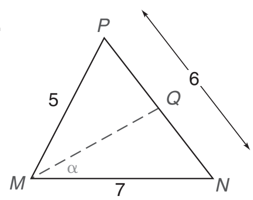


27.



Paralelogramo $ABCD$

28.



$\overrightarrow{MQ}$ biseca $\angle PMN$

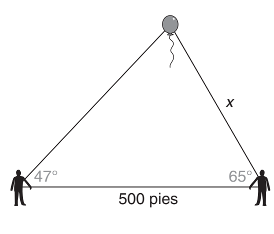
En los ejercicios 29 al 34 utilice la ley de los senos o la ley de los cosenos para resolver cada problema. Las medidas de los ángulos se deben encontrar aproximadas al grado más cercano y las áreas y distancias aproximadas a la décima más cercana de una unidad.

29. Un lote triangular tiene dimensiones de 150 pies y 180 pies y un ángulo incluido de 80° para esos lados.

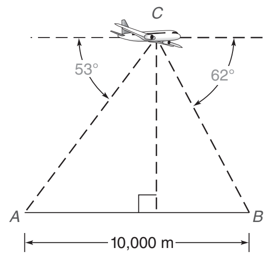
a) Encuentre la longitud del lado restante del lote.

b) Encuentre el área del lote en pies cuadrados.

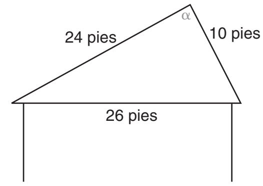
30. Phil y Matt observan un globo. Ellos están separados 500 pies y sus ángulos de observación son 47 y 65°, como se muestra. Encuentre la distancia x de Matt al globo.



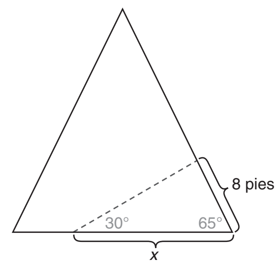
31. Un avión de vigilancia en el punto C divisa un almacén de municiones en A y el cuartel del enemigo en B a los ángulos indicados. Si los puntos A y B están separados 10 000 m, ¿cuál es la distancia desde el avión al cuartel del enemigo?



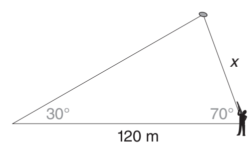
32. En el techo de una habitación de una casa las vigas convergen como se muestra. ¿Cuál es la medida del ángulo α con el que convergen?



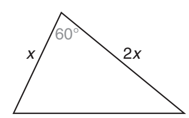
33. En una casa con estructura en A se encontró una bala incrustada en un punto a 8 pies arriba del muro inclinado. Si la bala fue disparada a un ángulo de 30° respecto a la horizontal, ¿qué tan alejada de la base del muro se activó el arma?



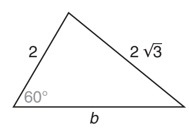
34. Se liberan pichones de arcilla a un ángulo de 30° con la horizontal. Un tirador de precisión le pega a uno de los pichones de arcilla cuando dispara a un ángulo de elevación de 70°. Si el punto de liberación está a 120 m del tirador, ¿qué tan alejado (x) está el tirador del objetivo cuando le pega?



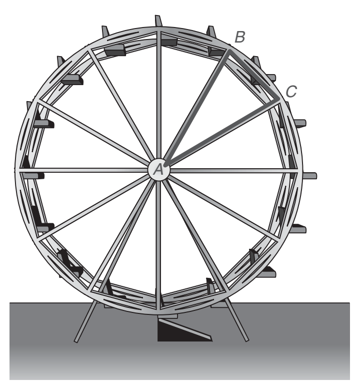
35. Para el triángulo que se ilustra el área es exactamente $18\sqrt{3}$ unidades^2. Determine la longitud x.



36. Para el triángulo que se ilustra utilice la ley de los cosenos para determinar b.



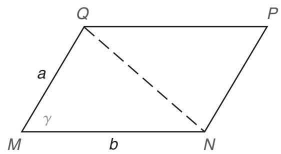
37. En la estructura de soporte para la noria, m$\angle CAB = 30°$. Si $AB = AC =$ 27 pies, encuentre BC.



38. Demuestre que la forma de la ley de los cosenos escrita $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ se reduce al teorema de Pitágoras cuando $\gamma = 90°$.

39. Explique por qué el área del paralelogramo que se ilustra está dada por la fórmula $A = ab$ sen γ.

(SUGERENCIA: Necesitará utilizar $\overline{QN}$.)



Ejercicios 39-42

40. Encuentre el área del $\square MNPQ$ si $a = 8$ cm, $b = 12$ cm y $\gamma = 70°$. Proporcione su respuesta redondeadas a décimas de centímetro cuadrado. (Vea el ejercicio 39.)

41. Encuentre el área del $\square MNPQ$ si $a = 6.3$ cm, $b = 8.9$ cm y $\gamma = 67.5°$. Proporcione su respuesta redondeadas a décimas de centímetro cuadrado. (Vea el ejercicio 39.)

42. Los lados de un rombo tienen longitud a. Dos lados adyacentes convergen para formar un ángulo agudo θ. Utilice la fórmula del ejercicio 39 para demostrar que el área del rombo está dada por $A = a^2$ sen θ.

43. Dos lados de un triángulo tienen medidas a pulgadas y b pulgadas, respectivamente. En términos de a y b, ¿cuál es el área más grande (máxima) posible para el triángulo?

PERSPECTIVA HISTÓRICA

Bosquejo de Platón

Platón (428-348 a.C.) fue un filósofo griego, discípulo de Sócrates en Atenas hasta el momento de la muerte de este último. Debido a que su maestro fue forzado a beber veneno, Platón temió por su vida y abandonó Grecia y se fue a viajar. Su viaje comenzó alrededor de 400 a.C. y duró 12 años, llevándolo a Egipto, Sicilia e Italia, donde se familiarizó con los pitagóricos (vea la página 394).

Con el tiempo, Platón regresó a Atenas donde formó su propia escuela, la Academia. Aunque principalmente era un filósofo, Platón sostenía que el estudio del razonamiento matemático proporcionaba el entrenamiento más perfecto para la mente. Tan insistente era Platón en que sus estudiantes tuvieran conocimiento de geometría que sobre la puerta de la Academia colocó un anuncio que decía "Que ningún hombre que ignore la geometría entre aquí".

Platón fue el primero en insistir en que todas las construcciones se realizaran utilizando sólo dos instrumentos, el compás y la regla. Dado un segmento de recta de longitud 1, Platón construyó segmentos de recta $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, y así sucesivamente. A diferencia de Arquímedes (vea la página 168), Platón no tenía interés en las matemáticas aplicadas. De hecho, la metodología de Platón fue muy estricta y requería definiciones exactas, hipótesis precisas y razonamiento lógico. Sin duda, sus métodos prepararon el camino para la compilación del conocimiento geométrico en la forma de *Los elementos* de Euclides (vea la página 118).

Al comentar sobre la vida de Platón, Próculo dijo que Platón propició que las matemáticas (y la geometría en particular) hicieran grandes avances. En ese tiempo muchos de los descubrimientos en matemáticas fueron hechos por estudiantes de Platón y por quienes estudiaron en la Academia después de la muerte de éste. Es irónico que aunque no fue un gran matemático, Platón fue en su tiempo responsable en gran medida de su desarrollo.

PERSPECTIVA DE APLICACIÓN

Medida de ángulos en radianes

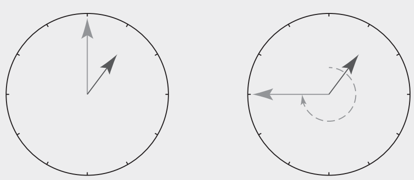
En gran parte de este libro se han considerado medidas de ángulos de 0 a 180°. Cuando estudie matemáticas encontrará que dos cosas son verdaderas:

1. Las medidas de los ángulos utilizadas en aplicaciones no tienen que limitarse a medidas de 0 a 180°.
2. El grado no es la única unidad que se emplea para medir ángulos.

En los ejemplos 1, 2 y 3 se tratará la primera de estas cuestiones.

EJEMPLO 1

Conforme el tiempo transcurre de 1 p.m. a 1:45 p.m., ¿qué ángulo rota el minutero? Vea la figura 11.47.



(a) (b)

Figura 11.47

Solución Como la rotación es $\frac{3}{4}$ de un círculo completo (360°), el resultado es $\frac{3}{4}$, o 270°. ■

EJEMPLO 2

Al piloto de un avión se le pide volar alrededor de la torre de control dos veces durante un patrón sostenido antes de recibir permiso para aterrizar. ¿Qué ángulo describirá el avión? Vea la figura 11.48.

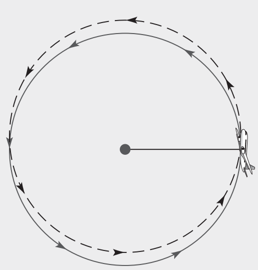
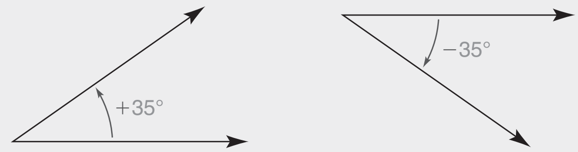


Figura 11.48

Solución Dos rotaciones en círculo dan 2(360°), o 720°. ■

En trigonometría se utilizan medidas negativas de ángulos para distinguir la dirección de la rotación. Una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj se mide como positiva, una rotación en el sentido de las manecillas del reloj se mide como negativa. Los arcos con flechas en la figura 11.49 se emplean para indicar la dirección de rotación.



(a) (b)

Figura 11.49

EJEMPLO 3

Para apretar un tornillo con cabeza hexagonal un mecánico aplica rotaciones de 60° varias veces. ¿Cuál es la medida de cada rotación? Vea la figura 11.50.

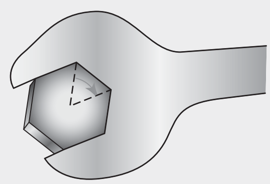


Figura 11.50

Solución El tornillo se aprieta si el ángulo es −60°.

NOTA: Si el ángulo de rotación es 60° (es decir, +60°), el tornillo se afloja. ■

La segunda cuestión es con una unidad alterna para medir ángulos, una unidad que con frecuencia se utiliza en el estudio de la trigonometría y el cálculo.

DEFINICIÓN

En un círculo un **radián** (rad) es la medida de un ángulo central que interseca un arco cuya longitud es igual al radio del círculo.

En la figura 11.51 las longitudes de cada radio y del arco intersecado son iguales a r. Así pues, el ángulo central que se muestra mide 1 rad. Una rotación completa alrededor del círculo corresponde a 360° y a $2\pi r$. Por tanto, la longitud de arco de 1 radio corresponde a la medida del ángulo central de 1 rad y la circunferencia de 2π radios corresponde a la rotación completa de 2π rad.

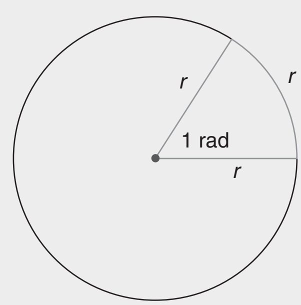


Figura 11.51

La relación angular que se encuentra en el párrafo anterior permite igualar 360° y 2π radianes. Como se sugiere en la figura 11.52 hay aproximadamente 6.28 rad (o exactamente 2π radianes) alrededor del círculo. El resultado exacto conduce a una relación importante.

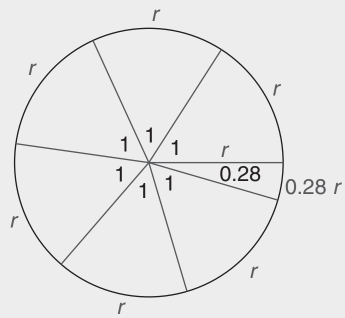


Figura 11.52

$$2\pi \text{ rad} = 360°$$
o
$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

Al dividir entre 2, esta relación con frecuencia se reescribe como sigue:

$$\pi \text{ rad} = 180°$$
o
$$180° = \pi \text{ rad}$$

Con π rad = 180° se divide cada lado de esta ecuación entre π para obtener la relación siguiente:

$$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \approx 57.3°$$

Para comparar medidas de ángulos también se puede dividir cada lado de la ecuación 180° = π rad entre 180 para obtener la siguiente relación:

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

EJEMPLO 4

Utilizando el hecho de que $1° = \frac{\pi}{180}$ rad, encuentre las equivalencias en radianes para:

a) 30° b) 45° c) 60° d) −90°

Solución

a) $30° = 30(1°) = 30\left(\frac{\pi}{180} \text{ rad}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

b) $45° = 45(1°) = 45\left(\frac{\pi}{180} \text{ rad}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

c) $60° = 60(1°) = 60\left(\frac{\pi}{180} \text{ rad}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

d) $-90° = -90(1°) = -90\left(\frac{\pi}{180}\right)\text{rad} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

EJEMPLO 5

Utilizando el hecho de que π rad = 180° encuentre las equivalencias en grados para los siguientes ángulos medidos en radianes:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{2\pi}{5}$ c) $\frac{-3\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2}$

Solución

a) $\frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = 30°$

b) $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5} \cdot \pi = \frac{2}{5} \cdot 180° = 72°$

c) $\frac{-3\pi}{4} = \frac{-3}{4} \cdot \pi = \frac{-3}{4} \cdot 180° = -135°$

d) $\frac{\pi}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$

Aunque en este libro no se empleó este método para medir ángulos es posible que tenga que utilizarlo en un curso más avanzado.

Resumen

UNA VISTA RETROSPECTIVA DEL CAPÍTULO 11

El objetivo de este capítulo fue definir las relaciones proporcionales seno, coseno y tangente en términos de los lados de un triángulo rectángulo. Se dedujo una fórmula para encontrar el área de un triángulo, dados dos lados y el ángulo incluido. También se demostraron la ley de los senos y la ley de los cosenos para triángulos agudos. Se introdujo otra unidad, el radián, para fines de medición de ángulos.

CONCEPTOS CLAVE

11.1

Letras griegas: $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ • Lado (cateto) opuesto • Hipotenusa • Relación proporcional seno: sen $\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ • Ángulo de elevación • Ángulo de depresión

11.2

Lado (cateto) adyacente • Relación proporcional coseno: $\cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ • Identidad: $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$

11.3

Relación proporcional tangente: $\tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$ • Cotangente • Secante • Cosecante • Relaciones proporcionales recíprocas

11.4

Área de un triángulo:

$$A = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\alpha$$
$$A = \frac{1}{2}ac\,\text{sen}\,\beta$$
$$A = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\gamma \;\bullet$$

Ley de los senos: $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \dfrac{\text{sen}\,\beta}{b} = \dfrac{\text{sen}\,\gamma}{c}$ •

Ley de los cosenos:
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

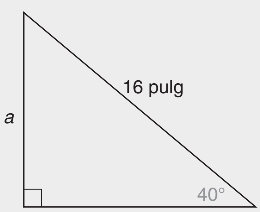
o

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

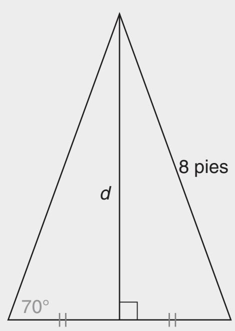
Capítulo 11 EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 al 4 enuncie la relación proporcional necesaria y utilícela para encontrar la medida del segmento de recta indicado redondeada a la décima de unidad.

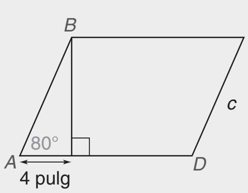
1.



2.

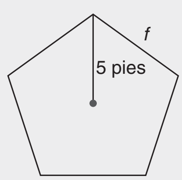


3.



▱ABCD

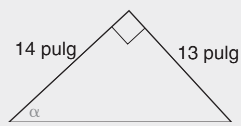
4.



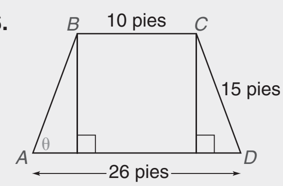
Pentágono regular con radio = 5 pies

En los ejercicios 5 al 8 enuncie la relación proporcional necesaria y utilícela para encontrar la medida del ángulo que se indica redondeada a grados.

5.

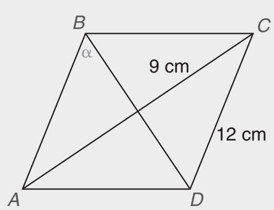


6.



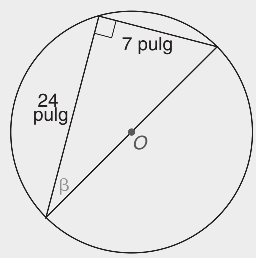
Trapezoide isósceles *ABCD*

7.



Rombo *ABCD*

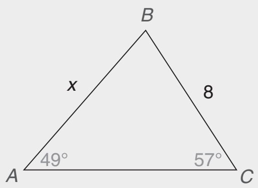
8.



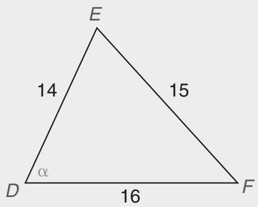
Círculo *O*

En los ejercicios 9 al 12 utilice la ley de los senos o la ley de los cosenos para resolver cada triángulo para la longitud que se indica de la medida del lado o del ángulo. Las medidas de los ángulos se deben indicar aproximadas al grado más cercano; las distancias se deben encontrar redondeadas a décimas de unidad.

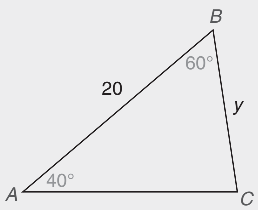
9.



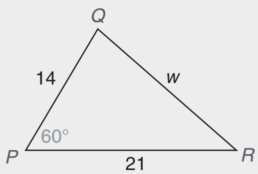
10.



11.

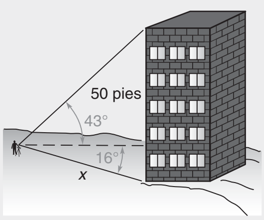


12.



En los ejercicios 13 al 17 utilice la ley de los senos o la ley de los cosenos para resolver cada problema. Las medidas de los ángulos se deben encontrar aproximadas al grado más cercano; las distancias se deben encontrar redondeadas a décimas de unidad.

13. Un edificio de 50 pies de altura está en una colina. Un topógrafo en un punto en la colina observa que el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio mide 43° y el ángulo de depresión hasta la base del edificio mide 16°. ¿Qué tan alejado está el topógrafo de la base del edificio?



14. Dos lados de un paralelogramo miden 50 y 70 cm. Encuentre la longitud de la diagonal más corta si el ángulo más grande del paralelogramo mide 105°.

15. Los lados de un rombo miden 6 pulg cada uno y la diagonal más grande mide 11 pulg. Encuentre la medida de cada uno de los ángulos agudos del rombo.

16. El área del $\triangle ABC$ es 9.7 pulg^2. Si $a = 6$ pulg y $c = 4$ pulg, encuentre la medida del ángulo B.

17. Encuentre el área del rombo en el ejercicio 15.

En los ejercicios 18 al 20 demuestre cada enunciado sin consultar una tabla ni emplear una calculadora. Trace un triángulo rectángulo apropiado.

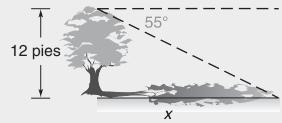
18. Si $m\angle R = 45°$, entonces $\tan R = 1$.

19. Si $m\angle S = 30°$, entonces $\operatorname{sen} S = \frac{1}{2}$.

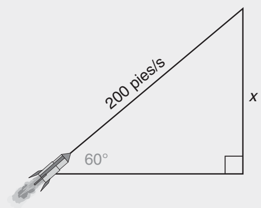
20. Si $m\angle T = 60°$, entonces $\operatorname{sen} T = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

En los ejercicios 21 al 30 utilice los dibujos, si se proporcionan, para resolver cada problema. Las medidas de los ángulos se deben encontrar aproximadas a la décima más cercana de un grado; las longitudes se deben encontrar redondeadas a décimas de unidad.

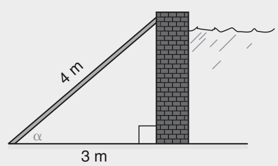
21. Un árbol que mide 12 pies proyecta al atardecer una sombra larga. Si el ángulo de depresión desde la parte superior del árbol hasta la punta de la sombra es 55°, ¿cuál es la longitud de la sombra?



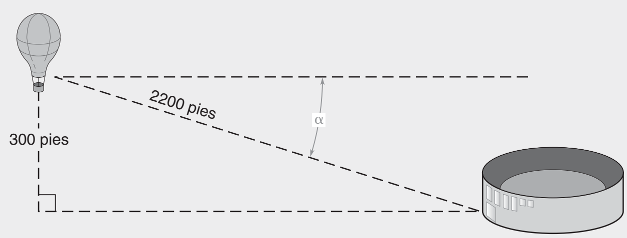
22. Se lanza un cohete al aire a un ángulo de 60°. Si está viajando a 200 pies por segundo, ¿qué tan alto en el aire está después de 5 segundos? (Ignorando la gravedad suponga que la trayectoria del cohete es una línea recta.)



23. Se utiliza una viga de 4 m como refuerzo de un muro. Si la parte inferior de la viga está a 3 m de la base del muro, ¿cuál es el ángulo de elevación hasta la parte superior del muro?



24. La góndola de un globo aerostático está a 300 pies de altura. El piloto del globo observa un estadio a 2200 pies. ¿Cuál es la medida del ángulo de depresión?



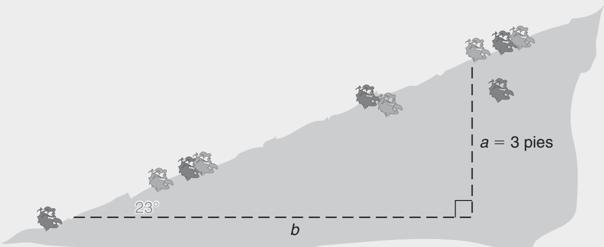
25. La apotema de un pentágono regular es de aproximadamente 3.44 cm. ¿Cuál es la longitud aproximada de cada lado del pentágono?

26. ¿Cuál es la longitud aproximada del radio del pentágono en el ejercicio 25?

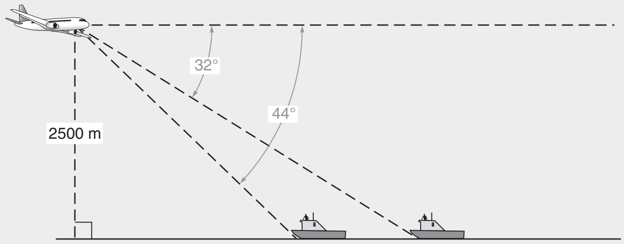
27. Cada uno de los catetos de un triángulo isósceles mide 40 cm. La base tiene una longitud de 30 cm. Encuentre la media de un ángulo base.

28. Las diagonales de un rombo miden 12 y 16 pulg. Encuentre la medida del ángulo obtuso del rombo.

29. La unidad para medir la pendiente de una colina es el **grado**. Un grado de a a b significa que la colina se eleva a unidades verticales por cada b unidades horizontales. Si en algún punto la colina está 3 pies arriba de la horizontal y el ángulo de elevación hasta ese punto es 23°, ¿cuál es el grado de esta colina?



30. Un observador en un avión a 2500 m de altura divisa dos barcos abajo. El ángulo de depresión hasta un barco es 32° y el ángulo de depresión hasta el otro barco es 44°. ¿Qué tan lejos están los barcos?



31. Si sen $\theta = \frac{7}{25}$, encuentre cos θ y sec θ.

32. Si tan $\theta = \frac{11}{60}$, encuentre sec θ y cot θ.

33. Si cot $\theta = \frac{21}{20}$, encuentre csc θ y sen θ.

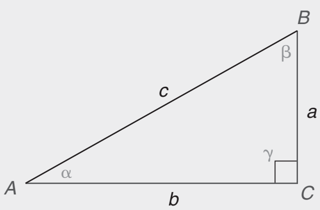
34. En un cono circular recto el radio de la base tiene una longitud de 3.2 pies y el ángulo formado por el radio y la altura inclinada mide $\theta = 65°$. Redondeada a décimas de pie, encuentre la longitud de la altura del cono. Luego utilice esta longitud de la altura para encontrar el volumen del cono redondeado a la décima de un pie cúbico.

Capítulo 11 EXAMEN

1. Para el triángulo rectángulo que se muestra exprese cada uno de los siguientes en términos de a, b y c:

a) sen α __________

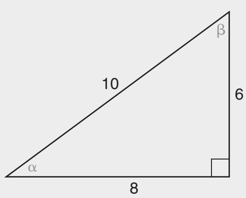
b) tan β __________



2. Para el triángulo rectángulo que se muestra exprese cada relación proporcional como una fracción con el menor número de términos:

a) cos β __________

b) sen α __________



3. Sin utilizar la calculadora encuentre el valor exacto de:

a) tan 45° __________ b) sen 60° __________

4. Use su calculadora para encontrar cada número redondeado a cuatro cifras decimales.

a) sen 23° __________ b) cos 79° __________

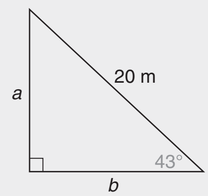
5. Utilizando su calculadora encuentre θ aproximado al grado más cercano si sen $\theta = 0.6691$. __________

6. Sin utilizar la calculadora determine cuál número es mayor:

a) tan 25° o tan 26° __________

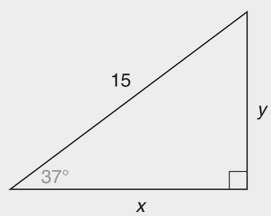
b) cos 47° o cos 48° __________

7. En el dibujo dado encuentre el valor de a aproximado al número entero más cercano. __________

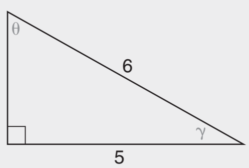


8. En el dibujo dado encuentre el valor de y aproximado al número entero más cercano.

____



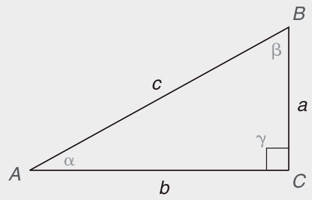
9. En el dibujo dado encuentre la medida de θ aproximada al grado más cercano.



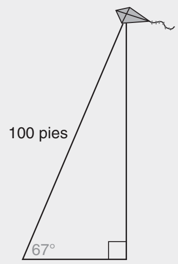
10. Utilizando el dibujo siguiente clasifique cada enunciado como verdadero o falso:

a) $\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha$ __________

b) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ __________

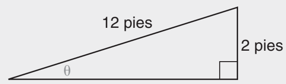


11. Una cometa vuela a un ángulo de elevación de 67° respecto al suelo. Si 100 pies de cuerda se han soltado hacia la cometa, ¿qué tan lejos está la cometa del suelo? Proporcione su respuesta redondeada a pies. __________



12. Un techo inclinado mide 12 pies y tiene una elevación de 2 pies. Redondeada a grados encuentre la medida de θ.

____



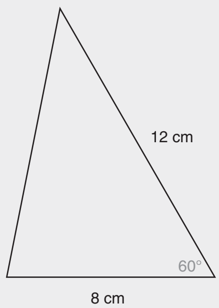
13. Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$, encuentre:

a) $\csc \alpha$ __________ b) α __________

14. En un triángulo rectángulo con ángulos agudos de medidas α y β, $\cos \beta = \frac{a}{c}$. Encuentre los valores siguientes en términos de las longitudes de los lados a, b y c:

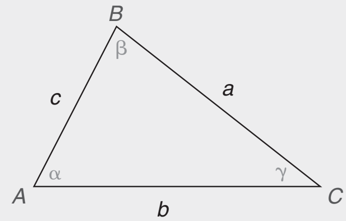
a) $\operatorname{sen} \alpha$ __________ b) $\sec \beta$ __________

15. Utilice una de las tres formas para el área (como la forma $A = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha$) para encontrar el área del triángulo que se ilustra. Responda redondeando a enteros. __________



16. Con base en el dibujo dado complete la ley de los senos.

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

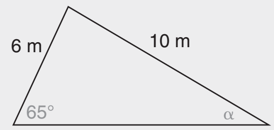


Ejercicios 16, 17

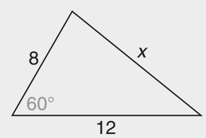
17. Con base en el dibujo dado complete esta forma de la ley de los cosenos.

$a^2 =$ __________

18. Utilice la ley de los senos o la ley de los cosenos para encontrar α redondeado a grados. __________



19. Utilice la ley de los senos o la ley de los cosenos para encontrar la longitud x redondeada a enteros. __________



20. Cada apotema de un pentágono regular $ABCDE$ tiene longitud a. En términos de a, encuentre una expresión para el área A del pentágono $ABCDE$. __________

Apéndice A

Repaso de álgebra

A.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En álgebra no se definen términos como *adición, multiplicación, número, positivo* e *igualdad*. Por conveniencia, un *número real* es el que tiene una posición en una recta numérica, como se muestra en la figura A.1.

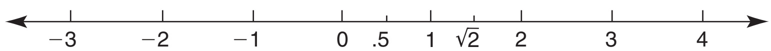


Figura A.1

Cualquier número real posicionado a la derecha de otro número real es mayor que ese otro número. Por ejemplo, 4 es mayor que −2; de manera equivalente, −2 es menor que 4 (los números menores están a la izquierda). Los números como 3 y −3 son **opuestos** o **inversos aditivos**. Dos expresiones numéricas son **iguales** si y sólo si tienen el mismo valor; por ejemplo, $2 + 3 = 5$. Los axiomas de igualdad se enlistan en el recuadro siguiente; también se incluyen en la sección 1.6.

AXIOMAS DE IGUALDAD

Reflexiva ($a = a$): Cualquier número es igual a sí mismo.

Simétrica (si $a = b$, entonces $b = a$): Dos números iguales son iguales en cualquier orden.

Transitiva (si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$): Si un primer número es igual a un segundo número y si el segundo número es igual a un tercer número, entonces el primer número es igual al tercer número.

Sustitución: Si una expresión numérica es igual a una segunda, entonces puede reemplazar la segunda.

EJEMPLO 1

Mencione el axioma de igualdad que se ilustra en cada caso.

a) Si AB es la longitud numérica del segmento de recta $\overline{AB}$, entonces $AB = AB$.
b) Si $17 = 2x - 3$, entonces $2x - 3 = 17$.
c) Dado que $2x + 3x = 5x$, el enunciado $2x + 3x = 30$ se puede reemplazar con $5x = 30$.

Solución a) Reflexiva b) Simétrica c) Sustitución

Para sumar dos números reales considere los números como ganancias si son positivos y como pérdidas si son negativos. Por ejemplo, $13 + (-5)$ representa el resultado de combinar una ganancia de \$13 con una pérdida (o deuda) de \$5. Por tanto,

$$13 + (-5) = 8$$

La respuesta en la adición es la **suma**. Otros tres ejemplos de adición son

$$13 + 5 = 18 \qquad (-13) + 5 = -8 \quad \text{y} \quad (-13) + (-5) = -18$$

Si se multiplican dos números reales, el **producto** (respuesta) será positivo, si los dos números tienen el mismo signo; negativo, si los dos números tienen signos diferentes; y 0 si cualquier número es 0 o si ambos números son 0.

EJEMPLO 2

Simplifique cada expresión:

a) $5 + (-4)$ b) $5(-4)$ c) $(-7)(-6)$ d) $[5 + (-4)] + 8$

Solución

a) $5 + (-4) = 1$
b) $5(-4) = -20$
c) $(-7)(-6) = 42$
d) $[5 + (-4)] + 8 = 1 + 8 = 9$

Al igual que $(-3) + 9 = 6$ y $9 + (-3) = 6$, dos sumas son iguales cuando se invierte el orden de los números sumados. Esto con frecuencia se expresa escribiendo $a + b = b + a$, que es la propiedad de los números reales conocida como axioma conmutativo de la adición. También hay un axioma conmutativo de la multiplicación, que se ilustra por el hecho de que $(6)(-4) = (-4)(6)$; los dos productos son -24.

En una expresión numérica al agrupar símbolos se indica qué operación se debe realizar primero. Sin embargo, $[5 + (-4)] + 8$ es igual a $5 + [(-4) + 8]$ ya que $1 + 8$ es igual a $5 + 4$. En general, el hecho de que $(a + b) + c$ es igual a $a + (b + c)$ se conoce como axioma asociativo de la adición. También hay un axioma asociativo de la multiplicación, que es el siguiente:

$$\begin{aligned}(3 \cdot 5)(-2) &= 3[5(-2)]\\ (15)(-2) &= 3(-10)\\ -30 &= -30\end{aligned}$$

AXIOMAS SELECTOS DE NÚMEROS REALES

Axioma conmutativo de la adición: $a + b = b + a$

Axioma conmutativo de la multiplicación: $a \cdot b = b \cdot a$

Axioma asociativo de la adición: $a + (b + c) = (a + b) + c$

Axioma asociativo de la multiplicación: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Para sustraer b de a (para encontrar $a - b$) se cambia el problema de sustracción a un problema de adición. La respuesta en la sustracción es la **diferencia** entre a y b.

DEFINICIÓN DE SUSTRACCIÓN

$$a - b = a + (-b)$$

donde $-b$ es el inverso aditivo (u opuesto) de b.

Para $b = 5$, se tiene $-b = -5$ y para $b = -2$, se tiene $-b = 2$. Para la sustracción $a - (b + c)$ se utiliza el inverso aditivo de $b + c$, que es $(-b) + (-c)$. Es decir,

$$a - (b + c) = a + [(-b) + (-c)]$$

EJEMPLO 3

Simplifique cada expresión:

a) $5 - (-2)$ b) $(-7) - (-3)$ c) $12 - [3 + (-2)]$

Solución

a) $5 - (-2) = 5 + 2 = 7$
b) $(-7) - (-3) = (-7) + 3 = -4$
c) $12 - [3 + (-2)] = 12 + [(-3) + 2] = 12 + (-1) = 11$ ■

La división se puede reemplazar con la multiplicación, así como la sustracción se puede reemplazar con la adición. ¡No se puede dividir entre 0! Dos números cuyo producto es 1 se denominan **inversos multiplicativos** (o **recíprocos**); $-\frac{3}{4}$ y $-\frac{4}{3}$ son inversos multiplicativos ya que $-\frac{3}{4} \cdot -\frac{4}{3} = 1$. La respuesta en la división es el **cociente**.

DEFINICIÓN DE DIVISIÓN

Para $b \neq 0$,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

donde $\frac{1}{b}$ es el inverso multiplicativo de b.

NOTA: $a \div b$ también se indica por a/b o $\frac{a}{b}$.

Para $b = 5$ $\left(\text{es decir, } b = \frac{5}{1}\right)$ se tiene $\frac{1}{b} = \frac{1}{5}$; y para $b = -\frac{2}{3}$ se tiene $\frac{1}{b} = -\frac{3}{2}$.

EJEMPLO 4

Simplifique cada expresión:

a) $12 \div 2$ b) $(-5) \div \left(-\frac{2}{3}\right)$

Solución

a) $12 \div 2 = 12 \div \frac{2}{1}$

$= \frac{12}{1} \cdot \frac{1}{2}$ (El producto de dos números positivos es un número positivo)

$= 6$

b) $(-5) \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{5}{1}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right)$

$= \left(-\frac{5}{1}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$

$= \frac{15}{2}$ (El producto de dos números negativos es un número positivo) ■

EJEMPLO 5

Morgan trabaja en una tienda de abarrotes durante 3 horas los viernes, después de asistir a la escuela, y durante 8 horas los sábados. Si le pagan $9 por hora, ¿cuánto ganará en total?

Solución

Método I: Encuentre el número total de horas trabajadas y multiplíquelo por 9.

$$9(3 + 8) = 9 \cdot 11 = \$99$$

Método II: Encuentre los salarios diarios y súmelos.

$$\underbrace{(9 \cdot 3)}_{\text{Salario del viernes}} + \underbrace{(9 \cdot 8)}_{\text{Salario del sábado}} = 27 + 72 = \$99$$

NOTA: Se ve que $9(3 + 8) = 9 \cdot 3 + 9 \cdot 8$, donde las multiplicaciones a la derecha se efectúan antes de completar la adición. ■

En el ejemplo anterior se ilustró el axioma distributivo. Debido a que las multiplicaciones se realizan antes que las adiciones, se escribe

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$2(3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$
$$2(7) = 6 + 8$$

La forma "simétrica" del axioma distributivo es

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$$

Esta forma se puede emplear para combinar *términos semejantes* (expresiones que contienen los mismos factores variables). Una **variable** es una letra que representa un número.

$4x + 5x = x \cdot 4 + x \cdot 5$ (Axioma conmutativo para la multiplicación)

$= x(4 + 5)$ (Forma simétrica del axioma distributivo)

$= x(9)$ (Sustitución)

$= 9x$ (Axioma conmutativo para la multiplicación)

$\therefore\ 4x + 5x = 9x$

El axioma distributivo también distribuye la multiplicación sobre la sustracción.

FORMAS DEL AXIOMA DISTRIBUTIVO

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$$
$$a(b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$
$$a \cdot b - a \cdot c = a(b - c)$$

EJEMPLO 6

Combine los términos semejantes:

a) $7x + 3x$ b) $7x - 3x$ c) $3x^2y + 4x^2y + 6x^2y$
d) $3x^2y + 4xy^2 + 6xy^2$ e) $7x + 5y$

Solución

a) $7x + 3x = 10x$
b) $7x - 3x = 4x$
c) $3x^2y + 4x^2y + 6x^2y = (3x^2y + 4x^2y) + 6x^2y = 7x^2y + 6x^2y = 13x^2y$
d) $3x^2y + 4xy^2 + 6xy^2 = 3x^2y + (4xy^2 + 6xy^2) = 3x^2y + 10xy^2$
e) $7x + 5y$; no se pueden combinar términos no semejantes

NOTA: En el inciso (d), $3x^2y$ y $10xy^2$ no son términos semejantes ya que $x^2y \neq xy^2$. ■

El enunciado $4x + 5x = 9x$ indica que "La suma de 4 veces un número y 5 veces el mismo número es igual a 9 veces el mismo número. Debido a que x puede ser cualquier número real, también se puede escribir

$$4\pi + 5\pi = 9\pi$$

en donde π es el número real que es aproximadamente igual a 3.14. De manera similar,

$$4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

en donde $\sqrt{3}$ (se lee "La raíz cuadrada positiva de 3") es aproximadamente igual a 1.73.

Recuerde el "orden de operaciones" de una clase anterior; este orden se utiliza cuando se simplifican expresiones más complicadas.

ORDEN DE LAS OPERACIONES

1. Simplifique expresiones dentro de símbolos como paréntesis ( ) o corchetes [ ], comenzando con los símbolos internos de inclusión.

NOTA: La presencia de una barra de fracción, ——, requiere que se simplifique un numerador o un denominador antes dividir.

2. Realice todos los cálculos con exponentes.
3. Efectúe todas las multiplicaciones o divisiones, en orden, de izquierda a derecha.
4. Por último realice todas las adiciones o sustracciones, en orden, de izquierda a derecha.

EJEMPLO 7

Simplifique cada expresión numérica:

a) $3^2 + 4^2$ b) $4 \cdot 7 \div 2$ c) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$

d) $\dfrac{8 - 6 \div (-3)}{4 + 3(2 + 5)}$ e) $2 + [3 + 4(5 - 1)]$

Solución

a) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

b) $4 \cdot 7 \div 2 = 28 \div 2 = 14$

c) $$\begin{aligned} 2 \cdot 3 \cdot 5^2 &= 2 \cdot 3 \cdot 25 \\ &= (2 \cdot 3) \cdot 25 = 6 \cdot 25 = 150 \end{aligned}$$

d) $\dfrac{8 - [6 \div (-3)]}{4 + 3(2 + 5)} = \dfrac{8 - (-2)}{4 + 3(7)} = \dfrac{10}{4 + 21} = \dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5}$

e) $2 + [3 + 4(5 - 1)] = 2 + [3 + 4(4)] = 2 + (3 + 16) = 2 + 19 = 21$ ■

Una expresión como $(2 + 5)(6 + 4)$ se puede simplificar mediante dos métodos diferentes. Siguiendo las reglas de orden, se tiene (7)(10), o 70. Un método alterno se describe como el método FOIL: (*first, outside, inside* y *last,* por sus siglas en inglés; primero, afuera, adentro y último) los términos primero, afuera, adentro y último se multiplican y luego se suman. Así es como se hace:

$$\begin{aligned} (2 + 5)(6 + 4) &= 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 4 \\ &= 12 + 8 + 30 + 20 \\ &= 70 \end{aligned}$$

FOIL es el axioma distributivo disfrazado. Por lo general no se utilizaría el método FOIL para encontrar el producto de $(2 + 5)$ y $(6 + 4)$, pero se debe emplear para determinar los productos en el ejemplo 8. También vea el ejemplo 2 en la sección A.2.

EJEMPLO 8

Utilice el método FOIL para encontrar los productos.

a) $(3x + 4)(2x - 3)$ b) $(5x + 2y)(6x - 5y)$

Solución

a) $$\begin{aligned} (3x + 4)(2x - 3) &= 3x \cdot 2x + 3x(-3) + 4(2x) + 4(-3) \\ &= 6x^2 + (-9x) + 8x + (-12) \\ &= 6x^2 - 1x - 12 \\ &= 6x^2 - x - 12 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} (5x + 2y)(6x - 5y) &= 5x \cdot 6x + 5x(-5y) + 2y(6x) + 2y(-5y) \\ &= 30x^2 + (-25xy) + 12xy + (-10y^2) \\ &= 30x^2 - 13xy - 10y^2 \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 9

Utilice el método FOIL para expresar $ab + ac + db + dc$ en forma factorizada como un producto.

Solución

$$\begin{aligned} ab + ac + db + dc &= a(b + c) + d(b + c) \\ &= (b + c)(a + d) \end{aligned}$$ ■

Ejercicios A.1

1. Mencione las cuatro partes de un sistema matemático.

(SUGERENCIA: Vea la sección 1.3.)

2. Mencione dos ejemplos de sistemas matemáticos.

3. ¿Qué axioma de igualdad se ilustra en cada una de las siguientes expresiones?
a) $5 = 5$
b) Si $\frac{1}{2} = 0.5$ y $0.5\% = 50\%$, entonces $\frac{1}{2} = 50\%$.
c) Como $2 + 3 = 5$, se puede reemplazar $x + (2 + 3)$ con $x + 5$.
d) Si $7 = 2x - 3$, entonces $2x - 3 = 7$.

4. Dé un ejemplo para ilustrar cada axioma de igualdad:
a) Reflexiva c) Transitiva
b) Simétrica d) Sustitución

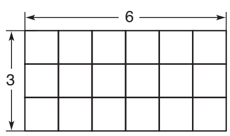
5. Encuentre cada suma:
a) $5 + 7$ c) $(-5) + 7$
b) $5 + (-7)$ d) $(-5) + (-7)$

6. Encuentre cada suma:
a) $(-7) + 15$ c) $(-7) + (-15)$
b) $7 + (-15)$ d) $(-7) + [(-7) + 15]$

7. Encuentre cada producto:
a) $5 \cdot 7$ c) $(-5)7$
b) $5(-7)$ d) $(-5)(-7)$

8. Encuentre cada producto:
a) $(-7)(12)$ c) $(-7)[(3)(4)]$
b) $(-7)(-12)$ d) $(-7)[(3)(-4)]$

9. En el dibujo siguiente el área (el número de cuadrados) del rectángulo se puede determinar multiplicando las medidas de las dos dimensiones. ¿Cambiará la respuesta el orden de la multiplicación? ¿Qué axioma se ilustra?



10. Identifique el axioma de los números reales que se ilustra. Proporcione una respuesta completa, tal como el axioma conmutativo para la multiplicación.
a) $7(5) = 5(7)$
b) $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$
c) $(-2) + 3 = 3 + (-2)$
d) $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$

11. Efectúe cada sustracción:
a) $7 - (-2)$ c) $10 - 2$
b) $(-7) - (+2)$ d) $(-10) - (-2)$

12. La temperatura cambia de -3°F a las 2 A.M. a 7°F a las 7 A.M. ¿Cuál expresión representa la diferencia en temperatura de las 2 A.M. a las 7 A.M., $7 - (-3)$ o $(-3) - 7$?

13. Complete cada división:
a) $12 \div (-3)$ c) $(-12) \div \left(-\frac{2}{3}\right)$
b) $12 \div \left(-\frac{1}{3}\right)$ d) $\left(-\frac{1}{12}\right) \div \left(\frac{1}{3}\right)$

14. Nueve clavijas están espaciadas uniformemente de tal modo que la distancia desde cada extremo a una clavija es igual a la distancia entre cualesquiera dos clavijas. Si el tablero mide 5 pies de longitud, ¿cuál es la separación entre clavijas?

15. Los cuatro propietarios de una tienda tienen una pérdida de \$240 en febrero. Si la pérdida se comparte equitativamente, ¿qué número representa la ganancia para cada propietario en ese mes?

16. Bill trabaja en una convención de fin de semana vendiendo libros. Él recibe una comisión de \$2 por cada libro vendido. Si vende 25 libros el sábado y 30 el domingo, ¿cuál es la ganancia total de Bill?

17. Utilice el axioma distributivo para simplificar cada expresión:
a) $5(6 + 7)$ c) $\frac{1}{2}(7 + 11)$
b) $4(7 - 3)$ d) $5x + 3x$

18. Utilice el axioma distributivo para simplificar cada expresión:
a) $6(9 - 4)$ c) $7y - 2y$
b) $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 6(4 + 8)$ d) $16x + 8x$

19. Simplifique cada expresión:
a) $6\pi + 4\pi$ c) $16x^2y - 9x^2y$
b) $8\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ d) $9\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

20. Simplifique cada expresión:
a) $\pi r^2 + 2\pi r^2$ c) $7x^2y + 3xy^2$
b) $7xy + 3xy$ d) $x + x + y$

21. Simplifique cada expresión:
a) $2 + 3 \cdot 4$ c) $2 + 3 \cdot 2^2$
b) $(2 + 3) \cdot 4$ d) $2 + (3 \cdot 2)^2$

22. Simplifique cada expresión:
a) $3^2 + 4^2$ c) $3^2 + (8 - 2) \div 3$
b) $(3 + 4)^2$ d) $[3^2 + (8 - 2)] \div 3$

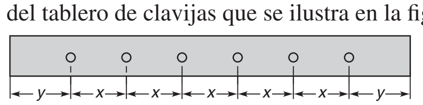
23. Simplifique cada expresión:
a) $\dfrac{8 - 2}{2 - 8}$ c) $\dfrac{5 \cdot 2 - 6 \cdot 3}{7 - (-2)}$
b) $\dfrac{8 - 2 \cdot 3}{(8 - 2) \cdot 3}$ d) $\dfrac{5 - 2 \cdot 6 + (-3)}{(-2)^2 + 4^2}$

24. Utilice el método FOIL para completar cada multiplicación:
a) $(2 + 3)(4 + 5)$ b) $(7 - 2)(6 + 1)$

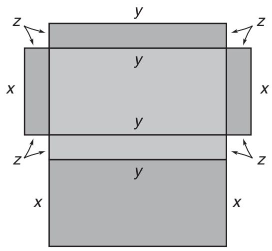
25. Utilice el método FOIL para completar cada multiplicación:
a) $(3 - 1)(5 - 2)$ b) $(3x + 2)(4x - 5)$

26. Utilice el método FOIL para completar cada multiplicación:
a) $(5x + 3)(2x - 7)$ b) $(2x + y)(3x - 5y)$

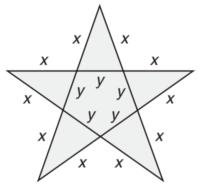
27. Utilizando x y y encuentre una expresión para la longitud del tablero de clavijas que se ilustra en la figura siguiente:



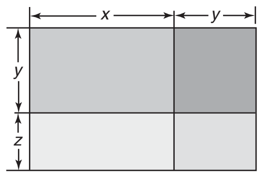
28. El cartón que se utiliza en la construcción de la caja que se ilustra en la figura adjunta tiene un área de $xy + yz + xz + xz + yz + xy$. Simplifique esta expresión para el área total del cartón.



29. Se construirá una estrella grande con las longitudes que se muestran en la figura adjunta. Proporcione una expresión para la longitud total de las tiras de madera que se utilizan en la construcción.

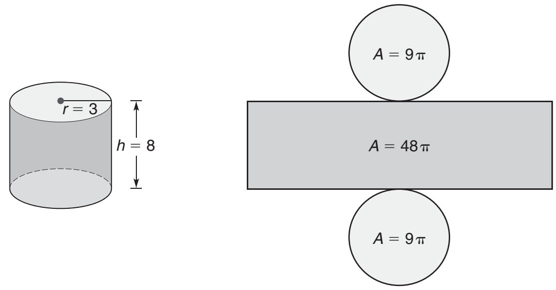


30. El área de un terreno cercado que un granjero ha subdividido se puede determinar multiplicando $(x + y)$ por $(y + z)$. Utilice el método FOIL para completar la multiplicación. ¿Cómo se compara este producto con el total de las áreas de los cuatro lotes menores?



31. Las medidas en grados de los ángulos de un triángulo son $3x$, $5x$ y $2x$. Encuentre una expresión para la suma de las medidas de estos ángulos en términos de x.

32. El cilindro circular recto que se ilustra en la figura siguiente tiene bases circulares cuyas áreas son de 9π unidades cuadradas. El lado tiene un área de 48π unidades cuadradas. Encuentre una expresión para el área superficial total.



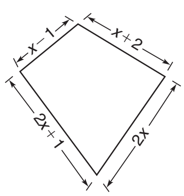


Figura A.2

A.2 FÓRMULAS Y ECUACIONES

Una **variable** es una letra que se utiliza para representar un número desconocido. Sin embargo, la letra griega π se conoce como **constante** ya que siempre es igual al mismo número (aproximadamente 3.14). Aunque con frecuencia se utilizan x, y y z como variables, es conveniente elegir r para el radio, h para la altura, b para la base y así sucesivamente.

EJEMPLO 1

Para la figura A.2 combine términos semejantes para encontrar el perímetro P (la suma de las longitudes de todos los lados) de la figura.

Solución

$$\begin{aligned} P &= (x - 1) + (x + 2) + 2x + (2x + 1) \\ &= x + (-1) + x + 2 + 2x + 2x + 1 \\ &= 1x + 1x + 2x + 2x + (-1) + 2 + 1 \\ &= 6x + 2 \end{aligned}$$

Cuando se utiliza el método FOIL con expresiones variables se combinan los términos semejantes en la simplificación.

EJEMPLO 2

Encuentre la expresión simplificada para el producto $(x + 5)(x + 2)$.

Solución

F O

$$(x + 5)(x + 2)$$

I L

$$\begin{aligned} &= x \cdot x + 2 \cdot x + 5 \cdot x + 10 \\ &= x^2 + 7x + 10 \end{aligned}$$

■

En el ejemplo 2 se multiplicó utilizando el método FOIL antes de sumar los términos semejantes de acuerdo con las reglas de orden. Al evaluar una expresión variable, también se debe seguir ese orden. Por ejemplo, el valor de $a^2 + b^2$ cuando $a = 3$ y $b = 4$ está dado por

$$3^2 + 4^2 \qquad \text{o} \qquad 9 + 16 \qquad \text{o} \qquad 25$$

ya que las expresiones exponenciales se deben simplificar antes de que se haga la adición.

EJEMPLO 3

Encuentre el valor de las expresiones siguientes.

a) $\pi r^2 h$, si $r = 3$ y $h = 4$ (deje π en la respuesta)
b) $\frac{1}{2}h(b + B)$, si $h = 10$, $b = 7$ y $B = 13$

Solución

a) $\pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4$
$\qquad = \pi \cdot 9 \cdot 4 = \pi(36) = 36\pi$

b) $\frac{1}{2}h(b + B) = \frac{1}{2} \cdot 10(7 + 13)$
$\qquad = \frac{1}{2} \cdot 10(20)$
$\qquad = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20$
$\qquad = 5 \cdot 20 = 100$

■

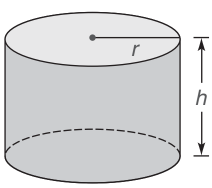


Figura A.3

Muchas expresiones variables se determinan en fórmulas. Una **fórmula** es una ecuación que expresa una regla. Por ejemplo, $V = \pi r^2 h$ es una fórmula para el volumen V de un cilindro circular recto cuya altura tiene longitud h y para el que la base circular tiene un radio de longitud r. (Vea la figura A.3.)

EJEMPLO 4

Dada la fórmula $P = 2\ell + 2w$, encuentre el valor de P cuando $\ell = 7$ y $w = 3$.

Solución Por sustitución, $P = 2\ell + 2w$ se obtiene

$$\begin{aligned} P &= (2 \cdot 7) + (2 \cdot 3) \\ &= 14 + 6 \\ &= 20 \end{aligned}$$

■

Una **ecuación** es un enunciado que tiene dos expresiones que son iguales. Aunque las fórmulas son tipos especiales de ecuaciones, la mayoría de las ecuaciones no son fórmulas. Considere los cuatro ejemplos de ecuaciones siguientes:

$$x + (x + 1) = 7$$
$$2(x + 1) = 8 - 2x$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$P = 2\ell + 2w \qquad \textbf{(una fórmula)}$$

La frase *solución de una ecuación* significa encontrar los valores de la variable que hacen verdadera la ecuación cuando la variable se reemplaza con dichos valores. Estos valores se conocen como **soluciones** para la ecuación. Por ejemplo, 3 es una solución (de hecho, la única solución) para la ecuación $x + (x + 1) = 7$ ya que $3 + (3 + 1) = 7$ es verdadero.

Cuando cada lado de una ecuación se transforma (cambia) sin que su solución cambie, se dice que se produjo una **ecuación equivalente**. En el recuadro siguiente se enlistan algunas de las propiedades que se utilizan para la resolución de ecuaciones.

Advertencia

No se puede multiplicar por 0 al resolver una ecuación debido a que la ecuación (digamos $2x - 1 = 7$) se reduce a $0 = 0$. La división entre 0 es excluyente en sí misma.

PROPIEDADES PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN

Propiedad de adición de la igualdad (si $a = b$, entonces $a + c = b + c$): Resulta una ecuación equivalente cuando se suma el mismo número a cada lado de una ecuación.

Propiedad de sustracción de la igualdad (si $a = b$, entonces $a - c = b - c$): Resulta una ecuación equivalente cuando se sustrae el mismo número de cada lado de una ecuación.

Propiedad de multiplicación de la igualdad (si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ para $c \neq 0$: Resulta una ecuación equivalente cuando se multiplica cada lado de una ecuación por el mismo número distinto de cero.

Propiedad de división de la igualdad $\left(\text{si } a = b, \text{ entonces } \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \text{ para } c \neq 0\right)$: Resulta una ecuación equivalente cuando se divide cada lado de una ecuación entre el mismo número distinto de cero.

La adición y la sustracción son **operaciones inversas**, como lo son la multiplicación y la división. En problemas que comprenden resolución de ecuaciones se utilizan operaciones inversas.

Sumar	para eliminar	una sustracción.
Sustraer	para eliminar	una adición.
Multiplicar	para eliminar	una división.
Dividir	para eliminar	una multiplicación.

EJEMPLO 5

Resuelva la ecuación $2x - 3 = 7$.

Solución Primero se suman 3 (para eliminar la sustracción de 3 de $2x$):

$$2x - 3 + 3 = 7 + 3$$
$$2x = 10 \qquad \textbf{(simplificando)}$$

Ahora se divide entre 2 (para eliminar la multiplicación de 2 con x):

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$
$$x = 5 \qquad \textbf{(simplificando)}$$

■

En el ejemplo 5 el número 5 es la solución para la ecuación original. Como se muestra, reemplazando x con 5 se confirma esto:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 7 \\ 2(5) - 3 &= 7 \\ 10 - 3 &= 7 \end{aligned}$$

Una ecuación que se puede escribir en la forma $ax + b = c$ para las constantes a, b y c es una **ecuación lineal**. El plan para resolver esta ecuación implica obtener los términos variables en un lado de la ecuación y los términos numéricos en el otro lado.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL

1. Simplifique cada lado de la ecuación; es decir, combine términos semejantes.
2. Elimine las adiciones o las sustracciones.
3. Elimine las multiplicaciones o las divisiones.

EJEMPLO 6

Resuelva la ecuación $2(x - 3) + 5 = 13$.

Solución

$$\begin{aligned} 2(x - 3) + 5 &= 13 \\ 2x - 6 + 5 &= 13 && \text{(Axioma distributivo)} \\ 2x - 1 &= 13 && \text{(sustitución)} \\ 2x &= 14 && \text{(adición)} \\ x &= 7 && \text{(división)} \end{aligned}$$

Algunas ecuaciones implican fracciones. Para evitar algunas de las dificultades que implican las fracciones, con frecuencia se multiplica cada lado de dichas ecuaciones por el **mínimo común denominador** (**MCD**) de las fracciones implicadas.

EJEMPLO 7

Resuelva la ecuación $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} = 14$.

Solución Para los denominadores 3 y 4, el MCD es 12. Por tanto, se debe multiplicar cada lado de la ecuación por 12 y utilizar el axioma distributivo en el lado izquierdo.

$$\begin{aligned} 12\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{4}\right) &= 12 \cdot 14 \\ \frac{12}{1} \cdot \frac{x}{3} + \frac{12}{1} \cdot \frac{x}{4} &= 168 \\ 4x + 3x &= 168 \\ 7x &= 168 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Para comprobar este resultado se tiene

$$\frac{24}{3} + \frac{24}{4} = 14$$
$$8 + 6 = 14$$

Puede suceder que la variable aparezca en el denominador de la única fracción en una ecuación. En tales casos ¡el método no cambia! Vea el ejemplo 8.

EJEMPLO 8

Encuentre n en la ecuación siguiente:

$$\frac{360}{n} + 120 = 180$$

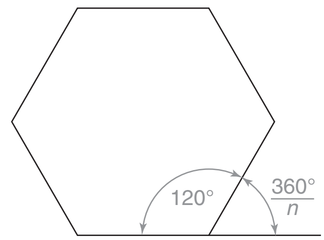


Figura A.4

Solución Multiplicando por n (el MCD), se tiene

$$n\left(\frac{360}{n} + 120\right) = 180 \cdot n$$
$$\frac{n}{1} \cdot \frac{360}{n} + 120 \cdot n = 180n$$
$$360 + 120n = 180n$$
$$360 = 60n$$
$$6 = n$$

NOTA: n representa el número de lados que tiene el polígono en la figura A.4; $\frac{360}{n}$ y 120 representan las medidas de los ángulos en la figura. ■

El ejemplo final combina muchas de las ideas introducidas en esta sección y en la anterior. El ejemplo 9 se basa en la fórmula para el área de un trapezoide.

EJEMPLO 9

Vea la figura A.5. Para la fórmula $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (b + B)$, suponga que $A = 77$, $b = 4$ y $B = 7$. Encuentre el valor de h.

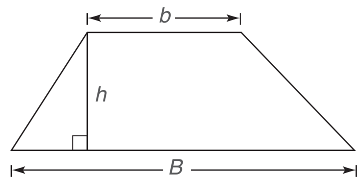


Figura A.5

Solución Sustituyendo los datos se llega a la ecuación

$$77 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (4 + 7)$$
$$77 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 11$$
$$2(77) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot 11 \qquad \textbf{(multiplicando por 2)}$$
$$154 = 11h \qquad \textbf{(simplificando)}$$
$$14 = h \qquad \textbf{(dividiendo entre 11)}$$ ■

▶▶▶ Ejercicios A.2

En los ejercicios 1 al 6 simplifique combinado términos semejantes.

1. $(2x + 3) + (3x + 5)$
2. $(2x + 3) - (3x - 5)$
3. $x + (3x + 2) - (2x + 4)$
4. $(3x + 2) + (2x - 3) - (x + 1)$
5. $2(x + 1) + 3(x + 2)$

   (SUGERENCIA: Multiplique antes de sumar.)

6. $3(2x + 5) - 2(3x - 1)$

En los ejercicios 7 al 12 simplifique utilizando el método FOIL de la multiplicación.

7. $(x + 3)(x + 4)$
8. $(x - 5)(x - 7)$
9. $(2x + 5)(3x - 2)$
10. $(3x + 7)(2x + 3)$
11. $(a + b)^2 + (a - b)^2$
12. $(x + 2)^2 - (x - 2)^2$

En los ejercicios 13 al 16 evalúe cada expresión.

13. $\ell \cdot w \cdot h$, si $\ell = 4$, $w = 3$ y $h = 5$
14. $a^2 + b^2$, si $a = 5$ y $b = 7$
15. $2 \cdot \ell + 2 \cdot w$, si $\ell = 13$ y $w = 7$
16. $a \cdot b \div c$, si $a = 6$, $b = 16$ y $c = 4$

En los ejercicios 17 al 20 encuentre el valor de la variable que se indica en cada fórmula. Deje π en las respuestas de los ejercicios 19 y 20.

17. S, si $S = 2\ell w + 2wh + 2\ell h$, $\ell = 6$, $w = 4$ y $h = 5$
18. A, si $A = \frac{1}{2}a(b + c + d)$, $a = 2$, $b = 6$, $c = 8$ y $d = 10$
19. V, si $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$, $r = 3$ y $h = 4$
20. S, si $S = 4\pi r^2$ y $r = 2$

En los ejercicios 21 al 32 resuelva cada ecuación.

21. $2x + 3 = 17$
22. $3x - 3 = -6$
23. $-\frac{y}{3} + 2 = 6$
24. $3y = -21 - 4y$
25. $a + (a + 2) = 26$
26. $b = 27 - \frac{b}{2}$
27. $2(x + 1) = 30 - 6(x - 2)$
28. $2(x + 1) + 3(x + 2) = 22 + 4(10 - x)$
29. $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = -5$
30. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 26$
31. $\frac{360}{n} + 135 = 180$
32. $\frac{(n - 2) \cdot 180}{n} = 150$

En los ejercicios 33 al 36 encuentre el valor de la variable que se indica para cada fórmula dada.

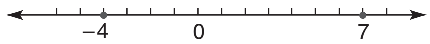
33. w, si $S = 2\ell w + 2wh + 2\ell h$, $S = 148$, $\ell = 5$ y $h = 6$
34. b, si $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (b + B)$, $A = 156$, $h = 12$ y $B = 11$
35. y, si $m = \frac{1}{2}(x - y)$, $m = 23$ y $x = 78$
36. Y, si $m = \frac{Y - y}{X - x}$, $m = \frac{-3}{2}$, $y = 1$, $X = 2$ y $x = -2$

A.3 DESIGUALDADES

En geometría en ocasiones se necesita trabajar con desigualdades. Las **desigualdades** son enunciados que comprenden una de las relaciones siguientes:

$<$ significa "es menor que"
$>$ significa "es mayor que"
$\leq$ significa "es menor que o igual a"
$\geq$ significa "es mayor que o igual a"
$\neq$ significa "no es igual a"

El enunciado $-4 < 7$ es verdadero ya que 4 negativo es menor que 7 positivo. En una recta numérica horizontal el número menor siempre se encuentra a la izquierda del número mayor. Una afirmación equivalente es $7 > -4$, que significa que 7 positivo es mayor que 4 negativo. Vea la recta numérica en la parte superior de la página 550.



Los dos enunciados $6 \leq 6$ y $4 \leq 6$ son verdaderos. El enunciado $6 \leq 6$ también se podría expresar mediante el enunciado "$6 < 6$ o $6 = 6$", lo que es verdadero ya que $6 = 6$ es verdadero. Puesto que $4 < 6$ es verdadero, el enunciado $4 \leq 6$ también es verdadero. Un enunciado de la forma P *o* Q se denomina *disyunción*; vea la sección 1.1 para más información.

EJEMPLO 1

Proporcione dos enunciados verdaderos que impliquen el símbolo $\geq$.

Solución

$$5 \geq 5 \quad \text{ya que} \quad 5 = 5 \text{ es verdadero}$$
$$12 \geq 5 \quad \text{ya que} \quad 12 > 5 \text{ es verdadero}$$

El símbolo $\neq$ se utiliza para unir dos expresiones numéricas que no tienen el mismo valor; por ejemplo, $2 + 3 \neq 7$. La definición siguiente también se encuentra en la sección 3.5.

DEFINICIÓN

a es menor que *b* (es decir, $a < b$) si y sólo si existe un número positivo p para el cual $a + p = b$; a es mayor que b (es decir, $a > b$) si y sólo si $b < a$.

EJEMPLO 2

Encuentre, si es posible, lo siguiente:

a) Cualquier número a para el cual "$a < a$" sea verdadero.
b) Cualesquiera números a y b para los cuales "$a < b$ y $b < a$" sea verdadero.

Solución

a) No existe ese número. Si $a < a$, entonces $a + p = a$ para algún número p positivo. Sustrayendo a de cada lado de la ecuación se obtiene $p = 0$. Este enunciado ($p = 0$) contradice el hecho de que p es positivo.
b) No existen esos números. Si $a < b$, entonces a está a la izquierda de b en la recta numérica. Por tanto, $b < a$ es falso, ya que este enunciado afirma que b está a la izquierda de a.

EJEMPLO 3

¿Qué concluye respecto a los números y y z, si $x < y$ y $x > z$?

Solución $x < y$ significa que x está a la izquierda de y, como en la figura A.6. De manera similar $x > z$ (equivalentemente, $z < x$) significa que z está a la izquierda de x. Con z a la izquierda de x, que a su vez está a la izquierda de y, es claro que se tiene z a la izquierda de y; por tanto $z < y$.

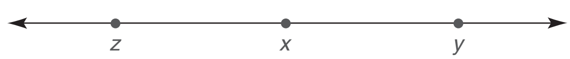


Figura A.6

En el ejemplo 3 se sugiere una relación transitiva para la desigualdad “es menor que” y esto se enuncia en la propiedad siguiente. La propiedad transitiva de la desigualdad también se puede enunciar utilizando $>$, $\leq$ o $\geq$.

PROPIEDAD TRANSITIVA DE LA DESIGUALDAD

Para los números a, b y c si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Esta propiedad se puede demostrar como sigue:

1. $a < b$ significa que $a + p_1 = b$ para algún número positivo p_1.
2. $b < c$ significa que $b + p_2 = c$ para algún número positivo p_2.
3. Sustituyendo $a + p_1$ por b (del enunciado 1) en el enunciado $b + p_2 = c$, se tiene $(a + p_1) + p_2 = c$.
4. Ahora $a + (p_1 + p_2) = c$.
5. Pero la suma de dos números positivos también es positiva; es decir, $p_1 + p_2 = p$, por tanto el enunciado 4 se vuelve $a + p = c$.
6. Si $a + p = c$, entonces $a < c$, por la definición de “es menor que”.

Por tanto, $a < b$ y $b < c$ implica que $a < c$.

La propiedad transitiva de la desigualdad se puede extender a una serie de expresiones desiguales. Cuando un primer valor es menor que un segundo valor, el segundo es menor que un tercer valor y así sucesivamente, entonces el primero es menor que el último.

EJEMPLO 4

Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es exactamente 90°. Si la medida del primero de dos ángulos complementarios es mayor que 27°, ¿qué debe concluir acerca de la medida del tercer ángulo?

Solución El segundo ángulo debe medir menos de 63°. ■

EJEMPLO 5

Para el enunciado $-6 < 9$, determine la desigualdad que resulta cuando cada lado se cambia como sigue:

a) Se le suma 4 a éste
b) Se le resta 2 a éste
c) Se multiplica por 3
d) Se divide entre -3

Solución

a) $-6 + 4 \mathbin{?} 9 + 4$.
$-2 \mathbin{?} 13 \rightarrow -2 < 13$

b) $-6 - 2 \mathbin{?} 9 - 2$
$-8 \mathbin{?} 7 \rightarrow -8 < 7$

c) $(-6)(3) \mathbin{?} 9(3)$
$-18 \mathbin{?} 27 \rightarrow -18 < 27$

d) $(-6) \div (-3) \mathbin{?} 9 \div (-3)$
$2 \mathbin{?} -3 \rightarrow 2 > -3$ ■

Como se sugiere en el ejemplo 5, en la adición y en la sustracción se conserva el símbolo de desigualdad. La multiplicación y la división por o entre un número *positivo* conservan el símbolo de desigualdad, pero la multiplicación y la división por o entre un *número negativo* invierten el símbolo de desigualdad.

PROPIEDADES DE DESIGUALDADES

Enunciadas para $<$, estas propiedades tienen contrapartes que comprenden $>$, $\leq$ y $\geq$.

Adición:	Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
Sustracción:	Si $a < b$, entonces, $a - c < b - c$.
Multiplicación:	i) Si $a < b$ y $c > 0$ (c es positivo), entonces $a \cdot c < b \cdot c$.
	ii) Si $a < b$ y $c < 0$ (c es negativo), entonces $a \cdot c > b \cdot c$.
División:	i) Si $a < b$ y $c > 0$ (c es positivo), entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
	ii) Si $a < b$ y $c < 0$ (c es negativo), entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Ahora se presenta el método de solución de desigualdades como

$$x + (x + 1) < 7 \qquad \text{y} \qquad 2(x - 3) + 5 \geq 3$$

El método en este caso es casi el mismo que el empleado para resolver ecuaciones, pero hay algunas diferencias muy importantes. Vea las directrices siguientes.

Advertencia

Asegúrese de invertir el símbolo de desigualdad después de multiplicar o dividir por o entre un número *negativo*.

SOLUCIÓN DE UNA DESIGUALDAD

1. Simplifique cada lado de la desigualdad; es decir, combine términos semejantes.
2. Elimine adiciones y sustracciones.
3. Elimine multiplicaciones y divisiones.

NOTA: Para el paso 3, vea la "Advertencia" de la izquierda

EJEMPLO 6

Resuelva $2x - 3 \leq 7$.

Solución

$$\begin{aligned} 2x - 3 + 3 &\leq 7 + 3 && \textbf{(sumando 3 se conserva} \leq\textbf{)} \\ 2x &\leq 10 && \textbf{(simplifique)} \\ \frac{2x}{2} &\leq \frac{10}{2} && \textbf{(dividiendo entre 2 se conserva} \leq\textbf{)} \\ x &\leq 5 && \textbf{(simplifique)} \end{aligned}$$

Los valores posibles de x se muestran en la recta numérica de la figura A.7; esta imagen es la **gráfica** de las soluciones. Observe que el punto arriba del 5 se muestra relleno para indicar que el 5 está incluido como una solución.

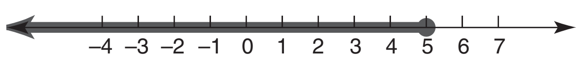


Figura A.7 ■

EJEMPLO 7

Resuelva $x(x - 2) - (x + 1)(x + 3) < 9$.

Solución Utilizando el axioma distributivo y el método FOIL se simplifica el lado izquierdo para obtener

$$(x^2 - 2x) - (x^2 + 4x + 3) < 9$$

La sustracción se efectúa sumando el inverso aditivo de cada término en $(x^2 + 4x + 3)$.

$$\begin{aligned}
\therefore\ (x^2 - 2x) + (-x^2 - 4x - 3) &< 9 \\
-6x - 3 &< 9 && \text{(simplifique)} \\
-6x &< 12 && \text{(sume 3)} \\
\frac{-6x}{-6} &> \frac{12}{-6} && \text{(divida entre } -6 \text{ e invierta el símbolo de desigualdad)} \\
x &> -2 && \text{(simplifique)}
\end{aligned}$$

La gráfica de la solución se muestra en la figura A.8. Observe que el círculo arriba de -2 se muestra abierto para indicar que -2 no está incluido como una solución.

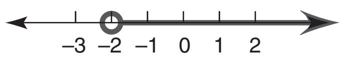
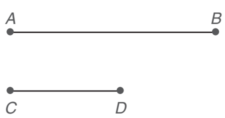


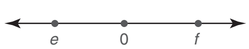
Figura A.8

Ejercicios A.3

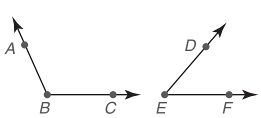
1. Si el segmento de recta AB y el segmento de recta CD en el dibujo siguiente se trazan a escala, ¿qué le dice la intuición acerca de las longitudes de dichos segmentos?



2. Utilizando la recta numérica que se muestra, escriba dos desigualdades que relacionen los valores de e y f.



3. Si los ángulos ABC y DEF en el dibujo siguiente se midieran con un transportador, ¿qué le dice la intuición acerca de las medidas en grados de dichos ángulos?



4. Considere el enunciado $x \leq 6$. ¿Cuáles de las opciones siguientes de x harán verdadero el enunciado?
   $x = -3$ $x = 0$ $x = 6$ $x = 9$ $x = 12$
5. De acuerdo con la definición de $a < b$, existe un número positivo p para el que $a + p = b$. Encuentre el valor de p para el enunciado dado.
   a) $3 < 7$ b) $-3 < 7$
6. ¿Se mantiene verdadera la propiedad transitiva de la igualdad para cuatro números reales a, b, c y d? Es decir, ¿es verdadero el enunciado siguiente?
   Si $a < b$, $b < c$ y $c < d$ entonces $a < d$.
7. Proporcione varios segmentos de recta, $AB > CD$ (la longitud del segmento AB es mayor que la del segmento CD), $CD > EF$, $EF > GH$ y $GH > IJ$. ¿Qué conclusión permite la propiedad transitiva de la desigualdad respecto a IJ y AB?
8. Proporcione varios ángulos, las medidas en grados están relacionadas de esta manera: $m\angle KJL > m\angle GHI$ (la medida del ángulo JKL es mayor que la del ángulo GHI), $m\angle GHI > m\angle DEF$ y $m\angle DEF > m\angle ABC$. ¿Qué conclusión permite la propiedad transitiva de la desigualdad respecto a $m\angle ABC$ y $m\angle JKL$?

9. Clasifique como verdadero o falso.
a) $5 \leq 4$ c) $5 \leq 5$
b) $4 \leq 5$ d) $5 < 5$

10. Clasifique como verdadero o falso.
a) $-5 \leq 4$ c) $-5 \leq -5$
b) $5 \leq -4$ d) $5 \leq -5$

11. Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180°. Si la medida del primero de dos ángulos suplementarios es menor que 32°, ¿qué debe concluir acerca de la medida del segundo ángulo?

12. Se necesita usar dos tramos de tabla de madera de ornamentación para cubrir una longitud de 12 pies a lo largo de un muro. Si Jim recuerda que una tabla mide más de 7 pies de longitud, ¿qué longitud debe tener la segunda tabla para cubrir el tramo de 12 pies?

13. Considere la desigualdad $-3 \leq 5$. Escriba el enunciado que resulta cuando
a) cada lado se multiplica por 4.
b) -7 se suma a cada lado.
c) cada lado se multiplica por -6.
d) cada lado se divide entre -1.

14. Considere la desigualdad $-6 > -9$. Escriba el enunciado que resulta cuando
a) 8 se suma a cada lado.
b) cada lado se multiplica por -2.
c) cada lado se multiplica por 2.
d) cada lado se divide entre -3.

15. Suponga que está resolviendo una desigualdad. Complete la gráfica en la columna siguiente indicando si se debe invertir o si se debe mantener el símbolo de desigualdad escribiendo "cambia" o "no cambia".

	Positivo	***Negativo***
Sume		
Reste		
Multiplique		
Divida		

En los ejercicios 16 al 26 primero resuelva cada desigualdad. Luego trace una gráfica de la recta numérica con las soluciones.

16. $5x - 1 \leq 29$
17. $2x + 3 \leq 17$
18. $5 + 4x > 25$
19. $5 - 4x > 25$
20. $5(2 - x) \leq 30$
21. $2x + 3x < 200 - 5x$
22. $5(x + 2) < 6(9 - x)$
23. $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} \leq 4$
24. $\frac{2x - 3}{-5} > 7$
25. $x^2 + 4x \leq x(x - 5) - 18$
26. $x(x + 2) < x(2 - x) + 2x^2$

En los ejercicios 27 al 30 las afirmaciones hechas no siempre son verdaderas. Cite un contraejemplo para demostrar por qué cada afirmación falla.

27. Si $a < b$, entonces, $a \cdot c < b \cdot c$.
28. Si $a < b$, entonces $a \cdot c \neq b \cdot c$.
29. Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$.
30. Si $a \neq b$ y $b \neq c$, entonces $a \neq c$.

A.4 ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una ecuación que se puede escribir en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ es una **ecuación cuadrática**. Por ejemplo, $x^2 - 7x + 12 = 0$ y $6x^2 = 7x + 3$ son cuadráticas. Muchas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver mediante un método de factorización que depende de la propiedad del producto cero.

PROPIEDAD DEL PRODUCTO CERO

Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Cuando esta propiedad se enuncia en palabras se lee "Si el producto de dos expresiones es igual a 0, entonces al menos uno de los factores debe ser igual a 0".

EJEMPLO 1

Resuelva $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Solución Primero se factoriza el polinomio invirtiendo el método FOIL de la multiplicación.

$$
\begin{array}{rcrl}
 & (x-3)(x-4) = 0 & & \text{(factorización)} \\
x - 3 = 0 & \text{o} & x - 4 = 0 & \text{(Propiedad del producto cero)} \\
x = 3 & \text{o} & x = 4 & \text{(Propiedad de adición)}
\end{array}
$$

Para comprobar $x = 3$, se sustituye en la ecuación dada:

$$3^2 - (7 \cdot 3) + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$$

Para comprobar $x = 4$, se sustituye de nuevo:

$$4^2 - (7 \cdot 4) + 12 = 16 - 28 + 12 = 0$$

Las soluciones suelen expresarse como el conjunto $\{3, 4\}$. ■

Si se le pidiera utilizar factorización para resolver la ecuación cuadrática

$$6x^2 = 7x + 3,$$

sería necesario cambiar la ecuación de manera que un lado fuera igual a 0. La forma $ax^2 + bx + c = 0$ es la **forma estándar** de una ecuación cuadrática.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA MEDIANTE EL MÉTODO DE FACTORIZACIÓN

1. Asegúrese de que la ecuación esté en forma estándar (un lado = 0).
2. Factorice el lado polinomial de la ecuación.
3. Iguale a 0 cada factor que contenga la variable.
4. Resuelva cada ecuación que se encuentra en el paso 3.
5. Compruebe las soluciones sustituyendo en la ecuación original.

El paso 5, que se mostró en el ejemplo 1, se omite en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2

Resuelva $6x^2 = 7x + 3$.

Solución Primero al cambiar a la forma estándar, se tiene

$$
\begin{array}{rcrl}
 & 6x^2 - 7x - 3 = 0 & & \text{(forma estándar)} \\
 & (2x-3)(3x+1) = 0 & & \text{(factorización)} \\
2x - 3 = 0 & \text{o} & 3x + 1 = 0 & \text{(Propiedad del producto cero)} \\
2x = 3 & \text{o} & 3x = -1 & \text{(Propiedad adición-sustracción)} \\
x = \dfrac{3}{2} & \text{o} & x = \dfrac{-1}{3} & \text{(división)}
\end{array}
$$

Por tanto, $\left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$ es el conjunto solución. ■

En algunos casos se puede extraer un factor común de cada término en el paso de factorización. En la ecuación $2x^2 + 10x - 48 = 0$, el lado izquierdo de la ecuación tiene el factor común 2. La factorización conduce a $2(x^2 + 5x - 24) = 0$ y luego a $2(x + 8)(x - 3) = 0$. Por supuesto, sólo los factores que contienen variables pueden ser iguales a 0, por lo que las soluciones para esta ecuación son -8 y 3.

Las ecuaciones como $4x^2 = 9$ y $4x^2 - 12x = 0$ son **ecuaciones cuadráticas incompletas** ya que les falta un término de la forma estándar. Cualquier ecuación se puede resolver factorizando; en particular, la factorización está dada por

$$4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$$

y

$$4x^2 - 12x = 4x(x - 3)$$

Cuando las soluciones para $ax^2 + bx + c = 0$ no se pueden encontrar factorizándose deben determinarse mediante la fórmula siguiente, en la que a es el número multiplicado por x^2, b es el número multiplicado por x y c es el término constante. El símbolo $\pm$ indica que por lo general hay dos soluciones, una que se encuentra sumando y la otra restando. El símbolo $\sqrt{a}$ se lee "la raíz cuadrada de a".

FÓRMULA CUADRÁTICA

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ son soluciones para $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a \neq 0$.

Aunque la fórmula puede proporcionar dos soluciones para la ecuación, un problema de aplicación en geometría puede tener una sola solución positiva que represente la medida de un segmento (o de un ángulo). Recuerde que para $a > 0$, $\sqrt{a}$ representa la raíz cuadrada principal de a.

DEFINICIÓN

Si $a > 0$, el número $\sqrt{a}$ es el número positivo para el cual $(\sqrt{a})^2 = a$.

EJEMPLO 3

a) Explique por qué $\sqrt{25}$ es igual a 5.
b) Sin una calculadora encuentre el valor de $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$.
c) Utilice una calculadora para demostrar que $\sqrt{5} \approx 2.236$.

Solución

a) Se observa que $\sqrt{25}$ debe ser igual a 5 ya que $5^2 = 25$.
b) Por definición, $\sqrt{3}$ es el número para el cual $(\sqrt{3})^2 = 3$.
c) Utilizando una calculadora se observa que $2.236^2 \approx 5$. ■

EJEMPLO 4

Simplifique cada expresión, si es posible.

a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{0}$ c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{400}$ e) $\sqrt{-4}$

Solución

a) $\sqrt{16} = 4$ ya que $4^2 = 16$.
b) $\sqrt{0} = 0$ ya que $0^2 = 0$.

c) $\sqrt{7}$ no se puede simplificar; sin embargo, $\sqrt{7} \approx 2.646$.
d) $\sqrt{400} = 20$ ya que $20^2 = 400$; se puede emplear una calculadora.
e) $\sqrt{-4}$ no es un número real; una calculadora da un mensaje de “ERROR”. ■

Mientras que $\sqrt{25}$ representa la raíz cuadrada principal de 25 (es decir 5), la expresión $-\sqrt{25}$ se puede interpretar como “el número negativo cuyo cuadrado es 25”; por tanto, $-\sqrt{25} = -5$ debido a que $(-5)^2 = 25$. En expresiones como $\sqrt{9 + 16}$ y $\sqrt{4 + 9}$, primero se simplifica el **radicando** (la expresión bajo la barra de la raíz cuadrada); al realizarlo $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ y $\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3.606$.

Así como las fracciones se simplifican $\left(\frac{6}{8}\right.$ se reemplaza por $\left.\frac{3}{4}\right)$, también se acostumbra simplificar el tamaño del radicando cuando sea posible. Para hacerlo se utiliza la propiedad del producto de las raíces cuadradas.

PROPIEDAD DEL PRODUCTO DE RAÍCES CUADRADAS

Para $a \geq 0$ y $b \geq 0$, $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Al simplificar, se reemplaza el radicando por un producto en el que se selecciona como uno de los factores el número más grande posible de la lista de cuadrados perfectos siguiente:

$$4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, \ldots$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \sqrt{45} &= \sqrt{9 \cdot 5} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Ahora el radicando se ha reducido de 45 a 5. Utilizando una calculadora se observa que $\sqrt{45} \approx 6.708$ Además, $3\sqrt{5}$ significa 3 veces $\sqrt{5}$ y con la calculadora se observa que $3\sqrt{5} \approx 6.708$.

Deje el entero más pequeño posible bajo el símbolo de raíz cuadrada.

EJEMPLO 5

Simplifique los radicales siguientes:

a) $\sqrt{27}$ b) $\sqrt{50}$

Solución

a) 9 es el factor cuadrado perfecto más grande de 27. Por tanto,

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

b) 25 es el factor cuadrado perfecto más grande de 50. Por tanto,

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$ ■

Advertencia

En el ejemplo 5(b), la solución correcta es $5\sqrt{2}$, no $2\sqrt{5}$.

La propiedad del producto de raíces cuadradas tiene una forma simétrica que se lee $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; por ejemplo $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ y $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$.

La expresión $ax^2 + bx + c$ puede ser **prima** (que significa "no factorizable"). Dado que $x^2 - 5x + 3$ es prima, la ecuación $x^2 - 5x + 3 = 0$ se resuelve utilizando la fórmula cuadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; vea el ejemplo 6.

NOTA: Cuando en una respuesta se dejan raíces cuadradas, la respuesta es exacta. Una vez que se emplea la calculadora, las soluciones son sólo aproximadas.

EJEMPLO 6

Encuentre las soluciones exactas para $x^2 - 5x + 3 = 0$. Luego utilice la calculadora para aproximar estas soluciones correctas con dos cifras decimales.

Solución Con la ecuación en forma estándar, se observa que $a = 1$, $b = -5$ y $c = 3$. Por tanto

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Las soluciones exactas son $\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ y $\frac{5 - \sqrt{13}}{2}$. Utilizando una calculadora, se encuentra que las soluciones aproximadas son 4.30 y 0.70, respectivamente. ■

Utilizando la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$ se obtiene $x = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2}$. En el ejemplo 7 se trata la simplificación de esta expresión.

EJEMPLO 7

Simplifique $\frac{6 \pm \sqrt{8}}{2}$.

Solución Puesto que $\sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$ o $2\sqrt{2}$, se simplifica la expresión como sigue:

$$\frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{2}(3 \pm \sqrt{2})}{\cancel{2}} = 3 \pm \sqrt{2}$$

NOTA 1: El número 2 fue el factor común para el numerador y el denominador. Luego se redujo la fracción a los términos más bajos.

NOTA 2: Los valores aproximados de $3 \pm \sqrt{2}$ son 4.41 y 1.59, respectivamente. Utilice su calculadora para demostrar que estos valores son soluciones aproximadas de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$. ■

El método final para resolver ecuaciones cuadráticas se utiliza si la ecuación tiene la forma $ax^2 + c = 0$.

PROPIEDAD DE LAS RAÍCES CUADRADAS

Si $x^2 = p$ donde $p \geq 0$, entonces $x = \pm\sqrt{p}$.

De acuerdo con la propiedad de las raíces cuadradas, la ecuación $x^2 = 6$ tiene la solución $\pm\sqrt{6}$.

EJEMPLO 8

Utilice la propiedad de las raíces cuadradas para resolver la ecuación $2x^2 - 56 = 0$.

Solución

$$2x^2 - 56 = 0 \rightarrow 2x^2 = 56 \rightarrow x^2 = 28$$

Entonces

$$x = \pm\sqrt{28} = \pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{7} = \pm 2\sqrt{7}$$

Las soluciones exactas son $2\sqrt{7}$ y $-2\sqrt{7}$; las soluciones aproximadas son 5.29 y −5.29, respectivamente. ■

En el ejemplo 10, las soluciones para la ecuación cuadrática implicarán fracciones. Por esta razón se consideran la propiedad del cociente de las raíces cuadradas en el ejemplo 9. La propiedad del cociente permite reemplazar la raíz cuadrada de una fracción por la raíz cuadrada de su numerador dividida entre la raíz cuadrada de su denominador.

PROPIEDAD DEL COCIENTE DE RAÍCES CUADRADAS

Para $a \geq 0$ y $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

EJEMPLO 9

Simplifique las siguientes expresiones de raíz cuadrada:

a) $\sqrt{\dfrac{16}{9}}$ b) $\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

Solución

a) $\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}$ b) $\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ■

EJEMPLO 10

Resuelva la ecuación $4x^2 - 9 = 0$.

Solución

$$4x^2 - 9 = 0 \rightarrow 4x^2 = 9 \rightarrow x^2 = \tfrac{9}{4}$$

Entonces

$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \pm\tfrac{3}{2}$$ ■

En resumen las ecuaciones cuadráticas tienen la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se resuelven mediante uno de los métodos siguientes:

1. Factorizando, cuando $ax^2 + bx + c$ se factoriza fácilmente
2. La fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

cuando $ax^2 + bx + c$ no se factoriza fácilmente o no se puede factorizar

3. La propiedad de las raíces cuadradas, cuando la ecuación tiene la forma $ax^2 + c = 0$.

Ejercicios A.4

1. Utilice su calculadora para encontrar el valor aproximado de cada número, redondeado a dos cifras decimales:

a) $\sqrt{13}$ b) $\sqrt{8}$ c) $-\sqrt{29}$ d) $\sqrt{\frac{3}{5}}$

2. Utilice su calculadora para encontrar el valor aproximado de cada número, redondeado a dos cifras decimales:

a) $\sqrt{17}$ b) $\sqrt{400}$ c) $-\sqrt{7}$ d) $\sqrt{1.6}$

3. ¿Cuáles ecuaciones son cuadráticas?

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ d) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$
b) $x^2 = x^2 + 4$ e) $\sqrt{2x - 1} = 3$
c) $x^2 = 4$ f) $(x + 1)(x - 1) = 15$

4. ¿Cuáles ecuaciones son ecuaciones cuadráticas incompletas?

a) $x^2 - 4 = 0$ d) $2x^2 - 4 = 2x^2 + 8x$
b) $x^2 - 4x = 0$ e) $x^2 = \frac{9}{4}$
c) $3x^2 = 2x$ f) $x^2 - 2x - 3 = 0$

5. Simplifique cada expresión utilizando la propiedad del producto de las raíces cuadradas:

a) $\sqrt{8}$ c) $\sqrt{900}$
b) $\sqrt{45}$ d) $(\sqrt{3})^2$

6. Simplifique cada expresión utilizando la propiedad del producto de las raíces cuadradas:

a) $\sqrt{28}$ c) $\sqrt{54}$
b) $\sqrt{32}$ d) $\sqrt{200}$

7. Simplifique cada expresión utilizando la propiedad del cociente de las raíces cuadradas:

a) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ c) $\sqrt{\frac{7}{16}}$
b) $\sqrt{\frac{25}{49}}$ d) $\sqrt{\frac{6}{9}}$

8. Simplifique cada expresión utilizando la propiedad del cociente de las raíces cuadradas:

a) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt{\frac{5}{36}}$
b) $\sqrt{\frac{16}{9}}$ d) $\sqrt{\frac{3}{16}}$

9. Utilice su calculadora para comprobar que las expresiones siguientes son equivalentes:

a) $\sqrt{54}$ y $3\sqrt{6}$
b) $\sqrt{\frac{5}{16}}$ y $\frac{\sqrt{5}}{4}$

10. Utilice su calculadora para comprobar que las expresiones siguientes son equivalentes:

a) $\sqrt{48}$ y $4\sqrt{3}$ b) $\sqrt{\frac{7}{9}}$ y $\frac{\sqrt{7}}{3}$

En los ejercicios 11 al 18 resuelva cada ecuación cuadrática por factorización.

11. $x^2 - 6x + 8 = 0$
12. $x^2 + 4x = 21$
13. $3x^2 - 51x + 180 = 0$

(SUGERENCIA: Hay un factor común.)

14. $2x^2 + x - 6 = 0$
15. $3x^2 = 10x + 8$
16. $8x^2 + 40x - 112 = 0$
17. $6x^2 = 5x - 1$
18. $12x^2 + 10x = 12$

En los ejercicios 19 al 26 resuelva cada ecuación empleando la fórmula cuadrática. Proporcione soluciones exactas en forma simplificada. Si las respuestas contienen raíces cuadradas aproxime las soluciones redondeadas a dos cifras decimales.

19. $x^2 - 7x + 10 = 0$
20. $x^2 + 7x + 12 = 0$
21. $x^2 + 9 = 7x$
22. $2x^2 + 3x = 6$
23. $x^2 - 4x - 8 = 0$
24. $x^2 - 6x - 2 = 0$
25. $5x^2 = 3x + 7$
26. $2x^2 = 8x - 1$

En los ejercicios 27 al 32 resuelva cada ecuación cuadrática incompleta. Utilice la propiedad de las raíces cuadradas según se necesite.

27. $2x^2 = 14$

28. $2x^2 = 14x$

29. $4x^2 - 25 = 0$

30. $4x^2 - 25x = 0$

31. $ax^2 - bx = 0$

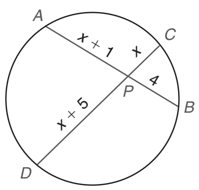
32. $ax^2 - b = 0$

33. La longitud de un rectángulo es su ancho más 3. Si el área del rectángulo es 40, las dimensiones x y $x + 3$ se pueden determinar resolviendo la ecuación $x(x + 3) = 40$. Encuentre estas dimensiones.

34. Para encontrar la longitud de $\overline{CP}$ (que es x) se debe resolver la ecuación

$$x \cdot (x + 5) = (x + 1) \cdot 4$$

Encuentre la longitud de $\overline{CP}$.



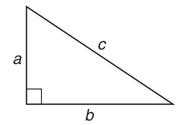
En los ejercicios 35 y 36 utilice el teorema 2.5.1 para resolver el problema. De acuerdo con este teorema el número de diagonales en un polígono de n lados está dado por $D = \frac{n(n - 3)}{2}$.

35. Encuentre el número de lados en un polígono que tiene 9 diagonales.

36. Encuentre el número de lados en un polígono que tiene el mismo número de diagonales que de lados.

37. En el triángulo rectángulo, encuentre c si $a = 3$ y $b = 4$.
(SUGERENCIA: $c^2 = a^2 + b^2$)

38. En el triángulo rectángulo, encuentre b si $a = 6$ y $c = 10$.
(SUGERENCIA: $c^2 = a^2 + b^2$)



Ejercicios 37, 38

Apéndice B

Resumen de construcciones, postulados y teoremas y corolarios

CONSTRUCCIONES

Sección 1.2

1. Para construir un segmento congruente con un segmento dado.
2. Para construir el punto medio M de un segmento de recta dado AB.

Sección 1.4

3. Para construir un ángulo congruente con un ángulo dado.
4. Para construir el bisector de ángulo de un ángulo dado.

Sección 1.6

5. Para construir la recta perpendicular a una recta dada en un punto específico en la recta dada.

Sección 2.1

6. Para construir la recta que es perpendicular a una recta dada de un punto fuera de la recta dada.

Sección 2.3

7. Para construir la recta paralela a una recta dada desde un punto fuera de esa recta.

Sección 6.4

8. Para construir una tangente a un círculo en un punto en el círculo.
9. Para construir una tangente a un círculo desde un punto extendido.

POSTULADOS

Sección 1.3

1. A través de dos puntos distintos hay exactamente una recta.
2. (Postulado de la regla) La medida de cualquier segmento de recta es un número positivo único.
3. (Postulado segmento-adición) Si X es un punto en $\overline{AB}$ y A-X-B, entonces $AX + XB = AB$.
4. Si dos rectas se intersecan lo hacen en un punto.
5. A través de tres puntos no colineales hay exactamente un plano.
6. Si dos planos distintos se intersecan, entonces su intersección es una recta.
7. Dados dos puntos distintos en un plano, la recta que contiene dichos puntos también se encuentra en el plano.

Sección 1.4

8. (Postulado del transportador) La medida de un ángulo es un número positivo único.
9. (Postulado ángulo-adición) Si un punto D se encuentra en el interior del ángulo ABC, entonces $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$.

Sección 2.1

10. (Postulado paralelo) A través de un punto fuera de una recta, exactamente una recta es paralela a la recta dada.
11. Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

Sección 3.1

12. Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (LLL).
13. Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con dos lados y el ángulo incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (LAL).
14. Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (ALA).

Sección 5.2

15. Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres ángulos de un segundo triángulo, entonces los triángulos son semejantes (AAA).

Sección 6.1

16. (Postulado del ángulo central) En un círculo la medida en grados de un ángulo central es igual a la medida en grados de su arco intersecado.
17. (Postulado arco-adición) Si $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$ se intersecan sólo en el punto B, entonces $m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{ABC}$.

Sección 8.1

18. (Postulado del área) Correspondiente a toda región acotada hay un número positivo único A, conocido como el área de esa región.
19. Si dos figuras planas cerradas son congruentes, entonces sus áreas son iguales.
20. (Postulado área-adición) Sean R y S dos regiones cerradas que no se traslapan. Entonces $A_{R \cup S} = A_R + A_S$.
21. El área A de un rectángulo cuya base tiene longitud b y cuya altura tiene longitud h está dada por $A = bh$

Sección 8.4

22. La relación proporcional de la circunferencia de un círculo a la longitud de su diámetro es una constante positiva única.

Sección 8.5

23. La relación proporcional de la medida en grados m del arco (o ángulo central) de un sector a 360° es igual que la relación proporcional del área del sector al área del círculo; es decir, $\frac{\text{área del sector}}{\text{área del círculo}} = \frac{m}{360°}$

Sección 9.1

24. (Postulado del volumen) Correspondiente a cada sólido hay un número positivo único V conocido como el volumen de ese sólido.

25. El volumen de un prisma rectangular recto está dado por

$$V = \ell wh$$

donde ℓ mide la longitud, w el ancho y h la altura del prisma.

26. El volumen de un prisma recto está dado por

$$V = Bh$$

donde B es el área de una base y h es la longitud de la altura del prisma.

TEOREMAS Y COROLARIOS

1.3.1 El punto medio de un segmento de recta es único.

1.4.1 Hay uno y sólo un bisector de ángulo para un ángulo dado.

1.6.1 Si dos rectas son perpendiculares, entonces concurren para formar ángulos rectos.

1.6.2 Si dos rectas se intersecan, entonces los ángulos verticales formados son congruentes.

1.6.3 En un plano hay exactamente una recta perpendicular a una recta dada en cualquier punto en la recta.

1.6.4 El bisector perpendicular de un segmento de recta es único.

1.7.1 Si dos rectas concurren para formar un ángulo recto, entonces esas rectas son perpendiculares.

1.7.2 Si dos ángulos son complementarios del mismo ángulo (o de ángulos congruentes), entonces esos ángulos son congruentes.

1.7.3 Si dos ángulos son suplementarios del mismo ángulo (o de ángulos congruentes), entonces esos ángulos son congruentes.

1.7.4 Cualesquiera dos ángulos rectos son congruentes.

1.7.5 Si los lados externos de dos ángulos adyacentes agudos forman rayos perpendiculares, entonces esos dos ángulos son complementarios.

1.7.6 Si los lados externos de dos ángulos adyacentes forman una línea recta, entonces esos ángulos son suplementarios.

1.7.7 Si dos segmentos de recta son congruentes, entonces sus puntos medios separan esos segmentos en cuatro segmentos congruentes.

1.7.8 Si dos ángulos son congruentes, entonces sus bisectores separan esos ángulos en cuatro ángulos congruentes.

2.1.1 Desde un punto fuera de una recta dada, hay exactamente una recta perpendicular a la recta dada.

2.1.2 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

2.1.3 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos externos son congruentes.

2.1.4 Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos internos en el mismo lado de la transversal son suplementarios.

2.1.5 Si dos rectas paralelas se cortan por un transversal, entonces los ángulos externos en el mismo lado de la transversal son suplementarios.

2.3.1 Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos correspondientes sean congruentes, entonces esas rectas son paralelas.

2.3.2 Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos alternos internos sean congruentes, entonces esas rectas son paralelas.

2.3.3 Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos alternos externos sean congruentes, entonces esas rectas son paralelas.

2.3.4 Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos internos en el mismo lado de la transversal sean suplementarios, entonces esas rectas son paralelas.

2.3.5 Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ángulos externos en el mismo lado de la transversal sean suplementarios, entonces esas rectas son paralelas.

2.3.6 Si dos rectas son paralelas a una tercera recta, entonces esas rectas son paralelas entre sí.

2.3.7 Si dos rectas coplanares son perpendiculares a una tercera recta, entonces esas rectas son paralelas entre sí.

2.4.1 En un triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos internos es 180°.

2.4.2 Cada ángulo de un triángulo equiángulo mide 60°.

2.4.3 Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

2.4.4 Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los ángulos terceros también son congruentes.

2.4.5 La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.

2.5.1 El número total de diagonales D en un polígono de n lados está dado por la fórmula $D = \frac{n(n - 3)}{2}$.

2.5.2 La suma S de las medidas de los ángulos internos de un polígono con n lados está dada por $S = (n - 2) \cdot 180°$. Observe que $n > 2$ para cualquier polígono.

2.5.3 La medida I de cada ángulo interno de un polígono regular o equiángulo de n lados es $I = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$.

2.5.4 La suma de las medidas de los cuatro ángulos internos de un cuadrilátero es 360°.

2.5.5 La suma de las medidas de los ángulos externos, uno en cada vértice, de un polígono es 360°.

2.5.6 La medida E de cada ángulo externo de un polígono regular o equiángulo de n lados es $E = \frac{360°}{n}$.

3.1.1 Si dos ángulos y un lado no incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y un lado no incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (AAL).

3.2.1 Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un cateto de un segundo triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes (HC).
3.3.1 Las alturas correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.
3.3.2 El bisector de un ángulo del vértice de un triángulo isósceles separa el triángulo en dos triángulos congruentes.
3.3.3 Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a esos lados también son congruentes.
3.3.4 Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos de esos dos ángulos también son congruentes.
3.3.5 Un triángulo equilátero también es equiángulo.
3.3.6 Un triángulo equiángulo también es equilátero.
3.5.1 La medida de un segmento de recta es mayor que la medida de cualquiera de sus partes.
3.5.2 La medida de un ángulo es mayor que la medida de cualquiera de sus partes.
3.5.3 La medida de un ángulo externo de un triángulo es mayor que la medida de cualquier ángulo interno no adyacente.
3.5.4 Si un triángulo contiene un ángulo recto o uno obtuso, entonces la medida de este ángulo es mayor que la medida de cualquiera de los ángulos restantes.
3.5.5 (Propiedad de adición de la desigualdad): Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$.
3.5.6 Si un lado de un triángulo es más largo que un segundo lado, entonces la medida del ángulo opuesto al primer lado es mayor que la medida del ángulo opuesto al segundo lado.
3.5.7 Si la medida de un ángulo de un triángulo es mayor que la medida de un segundo ángulo, entonces el lado opuesto al ángulo más grande es más grande que el lado opuesto al ángulo más pequeño.
3.5.8 El segmento de recta perpendicular de un punto a una recta es el segmento de recta más corto que se puede trazar desde el punto a la recta.
3.5.9 El segmento de recta perpendicular de un punto a un plano es el segmento de recta más corto que se puede trazar desde el punto al plano.
3.5.10 (Desigualdad del triángulo) La suma de las longitudes de cualesquiera dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.
3.5.10 *(Alternativa)* La longitud de un lado de un triángulo debe estar entre la suma de la diferencia de las longitudes de los otros dos lados.
4.1.1 Una diagonal de un paralelogramo lo separa en dos triángulos congruentes.
4.1.2 Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.
4.1.3 Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
4.1.4 Las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.
4.1.5 Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.
4.1.6 Dos rectas paralelas son equidistantes en todas partes.
4.1.7 Si dos lados de un triángulo son congruentes con dos lados de un segundo triángulo y el ángulo incluido del primer triángulo es mayor que el ángulo incluido del segundo, entonces la longitud del lado opuesto al ángulo incluido del primer triángulo es mayor que la longitud del lado opuesto al ángulo incluido del segundo.
4.1.8 En un paralelogramo con pares de ángulos consecutivos desiguales, la diagonal más larga se encuentra opuesta al ángulo obtuso.
4.2.1 Si dos lados de un cuadrilátero son congruentes y paralelos, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
4.2.2 Si los dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
4.2.3 Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan entre sí, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
4.2.4 En una cometa un par de ángulos opuestos son congruentes.
4.2.5 El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del tercer lado.
4.3.1 Todos los ángulos de un rectángulo son ángulos rectos.
4.3.2 Las diagonales de un rectángulo son congruentes.
4.3.3 Todos los lados de un cuadrado son congruentes.
4.3.4 Todos los lados de un rombo son congruentes.
4.3.5 Las diagonales de un rombo son perpendiculares.
4.4.1 Los ángulos base de un trapezoide isósceles son congruentes.
4.4.2 Las diagonales de un trapezoide isósceles son congruentes.
4.4.3 La longitud de la mediana de un trapezoide es igual a la mitad de la suma de las longitudes de las dos bases.
4.4.4 La mediana de un trapezoide es paralela a cada base.
4.4.5 Si dos ángulos base de un trapezoide son congruentes, el trapezoide es un trapezoide isósceles.
4.4.6 Si las diagonales de un trapezoide son congruentes, el trapezoide es un trapezoide isósceles.
4.4.7 Si tres (o más) rectas paralelas intersecan segmentos congruentes en una transversal, entonces intersecan segmentos congruentes en cualquier transversal.
5.3.1 Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes (AA).
5.3.2 Las longitudes de las alturas correspondientes de triángulos semejantes tienen las mismas relaciones proporcionales que las longitudes de cualquier par de lados correspondientes.
5.3.3 Si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo de un segundo triángulo y los pares de lados que incluyen esos ángulos son proporcionales (en longitud), entonces los triángulos son semejantes (LAL~).
5.3.4 Si los tres lados de un triángulo son proporcionales (en longitud) a los tres lados correspondientes de un segundo triángulo, entonces los triángulos son semejantes (LLL~).

5.3.5 Si un segmento de recta divide dos lados de un triángulo proporcionalmente, entonces es paralelo al tercer lado.

5.4.1 La altura trazada hasta la hipotenusa de un triángulo rectángulo separa el triángulo rectángulo en dos triángulos rectángulos que son semejantes entre sí y al triángulo rectángulo original.

5.4.2 La longitud de la altura hasta la hipotenusa de un triángulo rectángulo es el medio geométrico de las longitudes de los segmentos de la hipotenusa.

5.4.3 La longitud de cada cateto de un triángulo rectángulo es el medio geométrico de la longitud de la hipotenusa y la longitud del segmento de la hipotenusa adyacente a ese cateto.

5.4.4 (Teorema de Pitágoras) El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

5.4.5 (Recíproco del teorema de Pitágoras) Si a, b y c son las longitudes de los tres lados de un triángulo, con c la longitud del lado más largo y si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo con el ángulo recto opuesto al lado de longitud c.

5.4.6 Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con la hipotenusa y un cateto de un segundo triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes (HC).

5.4.7 Sean a, b y c las longitudes de los tres lados de un triángulo, con c la longitud del lado más largo.

1. Si $c^2 > a^2 + b^2$, entonces el triángulo es obtuso y el ángulo obtuso se encuentra opuesto al lado de longitud c.
2. Si $c^2 < a^2 + b^2$, entonces el triángulo es agudo.

5.5.1 (Teorema 45-45-90) En un triángulo cuyos ángulos miden 45°, 45° y 90° la hipotenusa tiene una longitud igual al producto de $\sqrt{2}$ y la longitud de cualquier cateto.

5.5.2 (Teorema 30-60-90) En un triángulo cuyos ángulos miden 30°, 60° y 90° la hipotenusa tiene una longitud igual al doble de la longitud del cateto más corto y la longitud del cateto más largo es el producto de $\sqrt{3}$ y la longitud del cateto más corto.

5.5.3 Si la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al producto de $\sqrt{2}$ y la longitud de cualquier cateto, entonces los ángulos del triángulo miden 45°, 45° y 90°.

5.5.4 Si la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es el doble de la longitud de un cateto del triángulo, entonces el ángulo del triángulo opuesto a ese cateto mide 30°.

5.6.1 Si una recta es paralela a un lado de un triángulo e interseca los otros dos lados, entonces divide esos lados proporcionalmente.

5.6.2 Cuando tres (o más) rectas paralelas se cortan por un par de transversales, las transversales se dividen proporcionalmente por las rectas paralelas.

5.6.3 (Teorema ángulo-bisector) Si un rayo biseca un ángulo de un triángulo, entonces divide el lado opuesto en segmentos cuyas longitudes son proporcionales a los dos lados que forman el ángulo bisecado.

5.6.4 (Teorema de Ceva) Sea D cualquier punto en el interior del $\triangle ABC$ y sean $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ y $\overline{CG}$ determinados por D y los vértices del $\triangle ABC$. Entonces el producto de las relaciones proporcionales de las longitudes de los segmentos de los lados (tomados en orden) es igual a 1; es decir, $\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

6.1.1 Un radio que es perpendicular a una cuerda biseca la cuerda.

6.1.2 La medida de un ángulo inscrito de un círculo es la mitad de la medida de su arco intersecado.

6.1.3 En un círculo (o en círculos congruentes), los arcos congruentes menores tienen ángulos centrales congruentes.

6.1.4 En un círculo (o en círculos congruentes), los ángulos centrales congruentes tienen arcos congruentes.

6.1.5 En un círculo (o en círculos congruentes), las cuerdas congruentes tienen arcos menores (mayores) congruentes.

6.1.6 En un círculo (o en círculos congruentes), los arcos congruentes tienen cuerdas congruentes.

6.1.7 Las cuerdas que están a la misma distancia del centro de un círculo son congruentes.

6.1.8 Las cuerdas congruentes están localizadas a la misma distancia desde el centro de un círculo.

6.1.9 Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

6.1.10 Si dos ángulos inscritos intersecan el mismo arco, entonces esos ángulos son congruentes.

6.2.1 Si un cuadrilátero está inscrito en un círculo, los ángulos opuestos son suplementarios.
(Alternativa) Los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico son suplementarios.

6.2.2 La medida de un ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan dentro de un círculo es la mitad de la suma de las medidas de los arcos intersecados por el ángulo y su ángulo vertical.

6.2.3 El radio (o cualquier otra recta que pase por el centro de un círculo) trazado hasta una tangente en el punto de tangencia es perpendicular a la tangente en ese punto.

6.2.4 La medida de un ángulo formado por una tangente y una cuerda trazada hasta el punto de tangencia es la mitad de la medida del arco intersecado.

6.2.5 La medida de un ángulo formado cuando dos secantes se intersecan en un punto fuera del círculo es la mitad de la diferencia de las medidas de los dos arcos intersecados.

6.2.6 Si un ángulo se forma por una secante y una tangente que se intersecan en el exterior de un círculo, entonces la medida del ángulo es la mitad de la diferencia de las medidas de sus arcos intersecados.

6.2.7 Si un ángulo se forma por dos tangentes que se intersecan, entonces la medida del ángulo es la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos intersecados.

6.2.8 Si dos rectas paralelas intersecan un círculo, los arcos intersecados entre esas rectas son congruentes.

6.3.1 Si se traza una recta que pasa por el centro de un círculo perpendicular a una cuerda, entonces biseca la cuerda y su arco.

6.3.2 Si una recta pasa a través del centro de un círculo biseca una cuerda distinta de un diámetro, entonces es perpendicular a la cuerda.

6.3.3 El bisector perpendicular de una cuerda contiene el centro del círculo.

6.3.4 Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto externo son congruentes.

6.3.5 Si dos cuerdas se intersecan dentro de un círculo, entonces el producto de las longitudes de los segmentos (partes) de una cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos de la otra cuerda.

6.3.6 Si se trazan dos segmentos secantes a un círculo desde un punto externo, entonces los productos de las longitudes de cada secante y su segmento externo son iguales.

6.3.7 Si se traza un segmento tangente y un segmento secante a un círculo desde un punto externo, entonces el cuadrado de la longitud de la tangente es igual al producto de la longitud de la secante y la longitud de su segmento externo.

6.4.1 La recta que es perpendicular al radio de un círculo en su punto extremo en el círculo es tangente al círculo.

6.4.2 En un círculo (o en círculos congruentes) que contiene dos ángulos centrales desiguales el ángulo más grande corresponde al arco intersecado más grande.

6.4.3 En un círculo (o en círculos congruentes) que contiene dos arcos desiguales el arco más grande corresponde al ángulo central más grande.

6.4.4 En un círculo (o en círculos congruentes) que contiene dos cuerdas desiguales la cuerda más corta está a la mayor distancia desde el centro del círculo.

6.4.5 En un círculo (o en círculos congruentes) que contiene dos cuerdas desiguales la cuerda más cercana al centro del círculo tiene la longitud mayor.

6.4.6 En un círculo (o en círculos congruentes) que contiene dos cuerdas desiguales la cuerda más larga corresponde al arco menor más grande.

6.4.7 En un círculo (o en círculos congruentes) que contiene dos arcos menores desiguales el arco menor más grande corresponde a la más grande de las cuerdas relacionadas con esos arcos.

7.1.1 El lugar geométrico de los puntos en un plano y equidistante de los lados de un ángulo es el bisector de ángulo.

7.1.2 El lugar geométrico de los puntos en un plano equidistante de los puntos extremos de un segmento de recta es el bisector perpendicular de ese segmento de recta.

7.2.1 Los tres bisectores de ángulo de los ángulos de un triángulo son concurrentes.

7.2.2 Los tres bisectores perpendiculares de los lados de un triángulo son concurrentes.

7.2.3 Las tres alturas de un triángulo son concurrentes.

7.2.4 Las tres medianas de un triángulo son concurrentes en un punto que está a dos tercios de la distancia desde cualquier vértice hasta el punto medio del lado opuesto.

7.3.1 Un círculo se puede circunscribir respecto a cualquier polígono regular (o inscribirse en él).

7.3.2 La medida del ángulo central de un polígono regular de n lados está dada por $c = \frac{360}{n}$.

7.3.3 Cualquier radio de un polígono regular biseca el ángulo en el vértice hasta el cual se traza.

7.3.4 Cualquier apotema de un polígono regular biseca el lado del polígono hasta el cual se traza.

8.1.1 El área A de un cuadrado cuyos lados son cada uno de longitud s está dada por $A = s^2$.

8.1.2 El área A de un paralelogramo con base de longitud b y con altura correspondiente de longitud h está dada por

$$A = bh$$

8.1.3 El área A de un triángulo cuya base tiene longitud b y cuya altura correspondiente tiene longitud h está dada por

$$A = \frac{1}{2}bh$$

8.1.4 El área A de un triángulo rectángulo con catetos de longitudes a y b está dada por $A = \frac{1}{2}ab$.

8.2.1 (Fórmula de Herón) Si los tres lados de un triángulo tienen longitudes a, b y c, entonces el área A del triángulo está dada por

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)})$$

donde el semiperímetro del triángulo es

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

8.2.2 (Fórmula de Brahmagupta) Para un cuadrilátero cíclico con lados de longitudes a, b, c y d el área A está dada por

$$A = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

donde el semiperímetro del cuadrilátero es

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$$

8.2.3 El área A de un trapezoide cuyas bases tienen longitudes b_1 y b_2 y cuya altura tiene longitud h está dada por

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

8.2.4 El área A de cualquier cuadrilátero con diagonales perpendiculares de longitudes d_1 y d_2 está dada por

$$A = \frac{1}{2}d_1d_2$$

8.2.5 El área A de un rombo cuyas diagonales tienen longitudes d_1 y d_2 está dada por

$$A = \frac{1}{2}d_1d_2$$

8.2.6 El área A de una cometa cuyas diagonales tienen longitudes d_1 y d_2 está dada por

$$A = \frac{1}{2}d_1d_2$$

8.2.7 La relación proporcional de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la relación proporcional de las longitudes de cualesquiera dos lados correspondientes, es decir,

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$$

8.3.1 El área A de un polígono regular cuya apotema tiene longitud a y cuyo perímetro es P está dada por

$$A = \frac{1}{2}aP$$

8.4.1 La circunferencia C de un círculo está dada por la fórmula

$$C = \pi d \qquad \text{o} \qquad C = 2\pi r$$

8.4.2 En un círculo cuya circunferencia es C la longitud ℓ de un arco cuya medida en grados es m está dada por

$$\ell = \frac{m}{360} \cdot C$$

8.4.3 El área A de un círculo cuyo radio tiene longitud r está dada por $A = \pi r^2$.

8.5.1 En un círculo de radio r, el área A de un sector cuyo arco tiene una medida m en grados está dada por

$$A = \frac{m}{360}\pi r^2$$

8.5.2 El área de una región semicircular de radio de longitud r es $A = \frac{1}{2}\pi r^2$.

8.5.3 Si P representa el perímetro de un triángulo y r representa la longitud del radio de su círculo inscrito, el área A del triángulo está dada por

$$A = \frac{1}{2}rP$$

9.1.1 El área lateral L de cualquier prisma cuya altura mide h y cuya base tiene perímetro P está dada por $L = hP$.

9.1.2 El área total T de cualquier prisma con área lateral L y área de la base B está dada por $T = L + 2B$.

9.2.1 En una pirámide regular la longitud a de la apotema de la base, la altura h y la altura inclinada ℓ satisfacen el teorema de Pitágoras; es decir, $\ell^2 = a^2 + h^2$ en cualquier pirámide regular.

9.2.2 El área lateral L de una pirámide regular con altura inclinada de longitud ℓ y perímetro P de la base está dada por

$$L = \frac{1}{2}\ell P$$

9.2.3 El área total (área superficial) T de una pirámide con área lateral L y área base B está dada por $T = L + B$.

9.2.4 El volumen V de una pirámide que tiene área de la base B y una altura de longitud h está dada por

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

9.2.5 En una pirámide regular las longitudes de la altura h, del radio r de la base y de la arista lateral e satisfacen el teorema de Pitágoras; es decir, $e^2 = h^2 + r^2$.

9.3.1 El área lateral L de un cilindro circular recto con altura de longitud h y circunferencia C de la base está dada por $L = hC$.
(Alternativa) Donde r es la longitud del radio de la base, $L = 2\pi rh$.

9.3.2 El área total T de un cilindro circular recto con área de la base B y área lateral L está dada por $T = L + 2B$.
(Alternativa) Donde r es la longitud del radio de la base y h es la longitud de la altura,
$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

9.3.3 El volumen V de un cilindro circular recto con área de la base B y altura de longitud h está dada por $V = Bh$.
(Alternativa) Donde r es la longitud del radio de la base, $V = \pi r^2 h$.

9.3.4 El área lateral L de un cono circular recto con altura inclinada de longitud ℓ y circunferencia C de la base está dada por $L = \frac{1}{2}\ell C$.
(Alternativa) Donde r es la longitud del radio de la base, $L = \pi r\ell$.

9.3.5 El área total T de un cono circular recto con área de la base B y área lateral L está dada por $T = B + L$.
(Alternativa) Donde r es la longitud del radio de la base y ℓ es la longitud de la altura inclinada, el área total es $T = \pi r^2 + \pi r\ell$

9.3.6 En un cono circular recto las longitudes del radio r (de la base), de la altura h y de la altura inclinada ℓ satisfacen el teorema de Pitágoras; es decir, $\ell^2 = r^2 + h^2$ en cualquier cono circular recto.

9.3.7 El volumen V de un cono circular recto con área de la base B y altura de longitud h está dado por $V = \frac{1}{3}Bh$.
(Alternativa) Donde r es la longitud del radio de la base, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

9.4.1 (Ecuación de Euler) El número de vértices V, el número de aristas E y el número de caras F de un poliedro están relacionados mediante la ecuación $V + F = E + 2$.

9.4.2 El área superficial S de una esfera cuyo radio tiene longitud r está dada por $S = 4\pi r^2$.

9.4.3 El volumen V de una esfera con radio de longitud r está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

10.1.1 (Fórmula de la distancia) La distancia d entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

10.1.2 (Fórmula del punto medio) El punto medio M del segmento de recta (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene coordenadas x_M y y_M, donde

$$(x_M, y_M) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Es decir, $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

10.2.1 Si dos rectas no verticales son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.
(Alternativa) Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, entonces $m_1 = m_2$

10.2.2 Si dos rectas (ni horizontal ni vertical) son perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es -1.
(Alternativa) Si $\ell_1 \perp \ell_2$, entonces $m_1 \cdot m_2 = -1$

10.4.1 El segmento de recta determinado por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado.

10.4.2 Las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

10.4.3 Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

10.4.4 Si las diagonales de un paralelogramo son iguales en longitud, entonces el paralelogramo es un rectángulo.

10.5.1 (Forma pendiente-intersección de una recta) La recta cuya pendiente es m y cuya intersección es b tiene la ecuación $y = mx + b$.

10.5.2 (Forma punto-pendiente de una recta) La recta que tiene pendiente m y el punto (x_1, y_1) tiene la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

10.5.3 Las tres medianas de un triángulo son concurrentes en un punto que está a dos tercios de la distancia desde cualquier vértice hasta el punto medio del lado opuesto.

11.2.1 En cualquier triángulo rectángulo en el cual α es la medida de un ángulo agudo,

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

11.4.1 El área de cualquier ángulo agudo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados y el seno del ángulo incluido. Es decir,

$$A = \tfrac{1}{2}ab\ \text{sen}\ \gamma$$
$$A = \tfrac{1}{2}ac\ \text{sen}\ \beta$$
$$A = \tfrac{1}{2}bc\ \text{sen}\ \alpha$$

11.4.2 (Ley de los senos) En cualquier triángulo agudo, las tres relaciones proporcionales entre los senos de los ángulos y las longitudes de los lados opuestos son iguales. Es decir,

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$$

11.4.3 (Ley de los cosenos) En el triángulo agudo ABC,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

o

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Respuestas

Ejercicios seleccionados y demostraciones

CAPÍTULO 1

1.1 Ejercicios

1. (a) No es un enunciado (b) Enunciado; verdadero (c) Enunciado; verdadero (d) Enunciado; falso **3.** (a) Cristóbal Colón no cruzó el Océano Atlántico. (b) Algunas bromas no son divertidas. **5.** Condicional **7.** Simple **9.** Simple **11.** H: Va a jugar. C: Pasará un buen rato. **13.** H: Las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares. C: El paralelogramo es un rombo. **15.** H: Dos rectas paralelas se cortan por una transversal. C: Los ángulos correspondientes son congruentes. **17.** Primero escriba el enunciado en forma "Si, entonces": Si una figura es un cuadrado, entonces es un rectángulo. H: Una figura es un cuadrado. C: Es un rectángulo.
19. Verdadero **21.** Verdadero **23.** Falso **25.** Inducción
27. Deducción **29.** Intuición **31.** Ninguno
33. El ángulo 1 parece igual en medida al ángulo 2.
35. Los tres ángulos en un triángulo son iguales en medida a los tres ángulos correspondientes en el otro triángulo.
37. *Un prisionero de la sociedad* podría ser nominado para un Premio de la Academia. **39.** El instructor es un maestro de matemáticas.
41. Los ángulos 1 y 2 son complementarios. **43.** Alex tiene un extraño sentido del humor. **45.** Ninguno **47.** June Jesse estará en la mira del público. **49.** Marylin es una persona feliz. **51.** Válido **53.** No válido **55.** (a) Verdadero (b) Verdadero (c) Falso

1.2 Ejercicios

1. $AB < CD$ **3.** Dos; uno **5.** Una; ninguna **7.** $\angle ABC$, $\angle ABD$, $\angle DBC$ **9.** Sí; no; sí **11.** $\angle ABC$, $\angle CBA$ **13.** Sí; no **15.** a, d **17.** (a) 3 (b) $2\frac{1}{2}$ **19.** (a) 40° (b) 50°
21. Congruente; congruente **23.** Igual **25.** No
27. Sí **29.** Congruentes **31.** $\overline{MN}$ y $\overline{QP}$ **33.** $\overline{AB}$
35. 22 **37.** $x = 9$ **39.** 124° **41.** 71° **43.** $x = 23$
45. 10.9 **47.** $x = 102$; $y = 78$ **49.** NE 22°

1.3 Ejercicios

1. AC **3.** 75 pulg **5.** 1.64 pies **7.** 3 mi **9.** (a) A-C-D (b) A, B, C o B, C, D o A, B, D **11.** $\overleftrightarrow{CD}$ significa recta CD; $\overline{CD}$ significa segmento CD; CD significa la medida o longitud de $\overline{CD}$; $\overrightarrow{CD}$ significa el rayo CD con punto extremo C. **13.** (a) m y t (b) m y $\overleftrightarrow{AD}$ o $\overleftrightarrow{AD}$ y t **15.** $x = 3$; $AM = 7$ **17.** $x = 7$; $\cong$ $AB = 38$ **19.** (a) $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OD}$ (b) $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ (Hay otras respuestas posibles.) **23.** Los planos M y N se intersecan en $\overleftrightarrow{AB}$. **25.** A
27. (a) C (b) C (c) H **33.** (a) No (b) Sí (c) No (d) Sí **35.** Seis
37. Nada **39.** $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$ o $\frac{2a + 3b}{6}$

1.4 Ejercicios

1. (a) Agudo (b) Recto (c) Obtuso **3.** (a) Complementario (b) Suplementario **5.** Ángulos adyacentes **7.** Ángulos complementarios (también adyacentes) **9.** Sí; no
11. (a) Obtuso (b) Llano (c) Agudo (d) Obtuso
13. $m\angle FAC + m\angle CAD = 180$; $\angle FAC$ y $\angle CAD$ son suplementarios. **15.** (a) $x + y = 90$ (b) $x = y$ **17.** 42°
19. $x = 20$; $m\angle RSV = 56°$ **21.** $x = 60$; $m\angle RST = 30°$
23. $x = 24$; $y = 8$ **25.** $\angle CAB \cong \angle DAB$ **27.** Los ángulos miden 128° y 52°. **29.** (a) $(180 - x)°$ (b) $(192 - 3x)°$ (c) $(180 - 2x - 5y)°$ **31.** $x = 143$ **37.** Parece que los bisectores de ángulo coinciden en un punto. **39.** Parece que los dos lados opuestos a los $\angle$s A y B son congruentes. **41.** (a) 90° (b) 90° (c) Iguales **43.** $x = 15$; $z = 3$ **45.** 135°

1.5 Ejercicios

1. Propiedad de división (o multiplicación) de la igualdad
3. Propiedad de sustracción de la igualdad **5.** Propiedad de multiplicación de la igualdad **7.** Si 2 $\angle$s son suplementarios, la suma de sus medidas es 180°. **9.** Postulado ángulo-adición **11.** $AM + MB = AB$ **13.** $\overrightarrow{EG}$ biseca el $\angle DEF$. **15.** $m\angle 1 + \angle 2 = 90°$ **17.** $2x = 10$ **19.** $7x + 2 = 30$ **21.** $6x - 3 = 27$ **23.** 1. Dado 2. Propiedad distributiva 3. Propiedad de adición de la igualdad 4. Propiedad de división de la igualdad **25.** 1. $2(x + 3) - 7 = 11$, 2. $2x + 6 - 7 = 11$, 3. $2x - 1 = 11$, 4. $2x = 12$, 5. $x = 6$ **27.** 1. Dado 2. Postulado segmento-adición 3. Propiedad de sustracción de la igualdad **29.** 1. Dado 2. Definición de bisector de ángulo 3. Postulado ángulo-adición 4. Sustitución 5. Sustitución (Distribución) 6. Propiedad de multiplicación de la igualdad **31.** E1. M-N-P-Q en $\overline{MQ}$ R1. Dado 2. Postulado segmento-adición 3. Postulado segmento-adición 4. $MN + NP + PQ = MQ$ **33.** $5(x + y)$ **35.** $(-7)(-2) > 5(-2)$ o $14 > -10$ **37.** R1 Dado R2 Propiedad de adición de la igualdad R3 Dado R4 sustitución

1.6 Ejercicios

1. 1. Dado 2. Si dos $\angle$s son $\cong$, entonces son iguales en medida. 3. Postulado ángulo-adición 4. Propiedad de adición de la igualdad 5. Sustitución 6. Si dos $\angle$s son iguales en medida, entonces son $\cong$. **3.** 1. $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 2 \cong \angle 3$ 2. $\angle 1 \cong \angle 3$
11. 1. Dado 3. Sustitución 4. $m\angle 1 = m\angle 2$ 5. $\angle 1 \cong \angle 2$
13. No; sí; no **15.** No; sí; no **17.** No; sí; sí
19. (a) Perpendicular (b) Ángulos (c) Suplementarios (d) Recto (e) Medida del ángulo 1

21. (a) Adyacente (b) Complementario (c) Rayo AB (d) Es congruente a (e) Vertical

23.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. M-N-P-Q en $\overline{MQ}$	1. Dado
2. $MN + NQ = MQ$	2. Postulado segmento-adición
3. $NP + PQ = NQ$	3. Postulado segmento-adición
4. $MN + NP + PQ = MQ$	4. Sustitución

25.

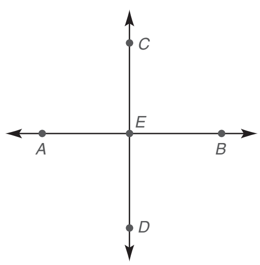
DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle TSW$ con $\overrightarrow{SU}$ y $\overrightarrow{SV}$	1. Dado
2. $m\angle TSW = m\angle TSU + m\angle USW$	2. Postulado ángulo-adición
3. $m\angle USW = m\angle USV + m\angle VSW$	3. Postulado ángulo-adición
4. $m\angle TSW = m\angle TSU + m\angle USV + m\angle VSW$	4. Sustitución

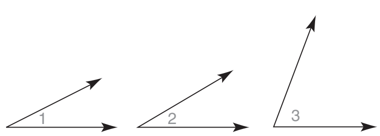
27. En el espacio existe un número infinito de rectas que bisecan perpendicularmente un segmento de recta dado en su punto medio.

1.7 Ejercicios

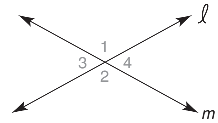
1. H: Un segmento de recta es bisecado. C: Cada uno de los segmentos iguales tiene la mitad de la longitud del segmento original. **3.** Primero escriba el enunciado en forma "Si, entonces". Si una figura es un cuadrado, entonces es un cuadrilátero. H: Una figura es un cuadrado. C: Es un cuadrilátero. **5.** H: Cada ángulo es un ángulo recto. C: Dos ángulos son congruentes. **7.** Enunciado, Dibujo, Dado, Demuestre, Demostración
9. (a) Dado (b) Demuestre
11. *Dado:* $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$
Demuestre: $\angle AEC$ es un ángulo recto



13. *Dado:* $\angle 1$ es complementario al $\angle 3$; $\angle 2$ es complementario al $\angle 3$
Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 2$



15. *Dado:* rectas ℓ y m se intersecan como se muestra
Demuestre: $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 3 \cong \angle 4$



17. $m\angle 2 = 55°$; $m\angle 3 = 125°$; $m\angle 4 = 55°$ **19.** $x = 40$; $m\angle 1 = 130°$
21. $x = 60°$; $m\angle 1 = 120°$ **23.** $x = 180$; $m\angle 2 = 80°$
25. 1. Dado 2. Si dos $\angle$s son complementarios, la suma de sus medidas es 90. 3. Sustitución 4. Propiedad de sustracción de la igualdad 5. Si dos $\angle$s son iguales en medida, entonces son $\cong$.
29. 1. Dado 2. $\angle ABC$ es un $\angle$ recto 3. La medida de un $\angle$ recto es $= 90$ 4. Postulado ángulo-adición 6. $\angle 1$ es complementario al $\angle 2$.

1.7 Demostraciones seleccionadas

31.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle ABC \cong \angle EFG$	1. Dado
2. $m\angle ABC = m\angle EFG$	2. Si dos $\angle$s son $\cong$, sus medidas son $=$
3. $m\angle ABC = m\angle 1 + m\angle 2$ $m\angle EFG = m\angle 3 + m\angle 4$	3. Postulado ángulo-adición
4. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	4. Sustitución
5. $\overrightarrow{BD}$ biseca $\angle ABC$ $\overrightarrow{FH}$ biseca $\angle EFG$	5. Dado
6. $m\angle 1 = m\angle 2$ y $m\angle 3 = m\angle 4$	6. Si un rayo biseca un $\angle$, entonces se forman dos $\angle$s de igual medida
7. $m\angle 1 + m\angle 1 = m\angle 3 + m\angle 3$ o $2 \cdot m\angle 1 = 2 \cdot m\angle 3$	7. Sustitución
8. $m\angle 1 = m\angle 3$	8. Propiedad de división de la igualdad
9. $m\angle 1 = m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 4$	9. Sustitución (o transitiva)
10. $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$	10. Si los $\angle$s son $=$ en medida, entonces son $\cong$

CAPÍTULO 1 EJERCICIOS DE REPASO

1. Términos indefinidos, términos definidos, axiomas o postulados, teoremas **2.** Inducción, deducción, intuición **3.** 1. Mencione el término que se define 2. Coloque el término en un conjunto o categoría 3. Distinga el término de otros términos en la misma categoría 4. Reversible **4.** Intuición **5.** Inducción **6.** Deducción **7.** H: Las diagonales de un trapezoide son iguales en longitud. C: El trapezoide es isósceles. **8.** H: El paralelogramo es un rectángulo. C: Las diagonales de un paralelogramo son congruentes.

9. No hay conclusión **10.** Jody Smithers tiene un grado académico. **11.** El ángulo A es un ángulo recto. **12.** C **13.** $\angle RST$; $\angle S$; mayor que 90° **14.** Perpendicular **18.** (a) Obtuso (b) Recto **19.** (a) Agudo (b) Reflejo **20.** 98° **21.** 47° **22.** 22 **23.** 17 **24.** 34 **25.** 152° **26.** 39° **27.** (a) Punto M (b) $\angle JMH$ (c) $\overrightarrow{MJ}$ (d) $\overleftrightarrow{KH}$ **28.** $67\frac{1}{2}°$ **29.** 28° y 152° **30.** (a) $6x + 8$ (b) $x = 4$ (c) 11; 10; 11 **31.** La medida del ángulo 3 es menor que 50°. **32.** 10 perchas **33.** S **34.** S **35.** A **36.** S **37.** N **38.** 2. $\angle 4 \cong \angle P$ 3. $\angle 1 \cong \angle 4$ 4. Si dos $\angle$s son $\cong$, entonces sus medidas son =. 5. Dado 6. $m\angle 2 = m\angle 3$ 7. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 3$ 8. Postulado ángulo-adición 9. Sustitución 10. $\angle TVP \cong \angle MVP$ **52.** 270°

CAPÍTULO 1 EJERCICIOS DE REPASO DEMOSTRACIONES SELECCIONADAS

39.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{KF} \perp \overline{FH}$	1. Dado
2. $\angle KFH$ es un $\angle$ recto	2. Si dos segmentos son $\perp$ entonces forman un $\angle$ recto
3. $\angle JHF$ es un $\angle$ recto	3. Dado
4. $\angle KFH \cong \angle JHF$	4. Cualesquiera dos $\angle$s rectos son $\cong$

40.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{KH} \cong \overline{FJ}$ G es el punto medio de $\overline{KH}$ y $\overline{FJ}$	1. Dado
2. $\overline{KG} \cong \overline{GJ}$	2. Si dos segmentos son $\cong$ entonces sus puntos medios separan esos segmentos en cuatro segmentos $\cong$

41.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{KF} \perp \overline{FH}$	1. Dado
2. $\angle KFJ$ es complementario a $\angle JFH$	2. Si los lados externos de dos $\angle$s adyacentes forman rayos $\perp$ entonces esos $\angle$s son complementarios

42.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle 1$ es complementario a $\angle M$	1. Dado
2. $\angle 2$ es complementario a $\angle M$	2. Dado
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Si dos $\angle$s son complementarios al mismo $\angle$ entonces esos ángulos son $\cong$

43.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle MOP \cong \angle MPO$	1. Dado
2. $\overrightarrow{OR}$ biseca $\angle MOP$; $\overrightarrow{PR}$ biseca $\angle MPO$	2. Dado
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Si dos $\angle$s son $\cong$, entonces sus bisectores separan esos $\angle$s en cuatro $\angle$s $\cong$

44.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle 4 \cong \angle 6$	1. Dado
2. $\angle 4 \cong \angle 5$	2. Si dos ángulos son $\angle$s verticales, entonces son $\cong$
3. $\angle 5 \cong \angle 6$	3. Propiedad transitiva

45.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. Figura que se muestra	1. Dado
2. $\angle 4$ es suplementario a $\angle 2$	2. Si los lados externos de dos $\angle$s adyacentes forman una recta, entonces los $\angle$s son suplementarios

46.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle 3$ es suplementario a $\angle 5$ $\angle 4$ es suplementario a $\angle 6$	1. Dado
2. $\angle 4 \cong \angle 5$	2. Si dos rectas se intersecan, los ángulos verticales formados son $\cong$
3. $\angle 3 \cong \angle 6$	3. Si dos $\angle$s son suplementarios a ángulos congruentes, entonces esos ángulos son $\cong$

Capítulo 1 Examen

1. Inducción [1.1] **2.** $\angle CBA$ o $\angle B$ [1.4] **3.** $AP + PB = AB$ [1.3] **4.** (a) Punto (b) Recta [1.3] **5.** (a) Recto (b) Obtuso [1.4] **6.** (a) Suplementario (b) Congruente [1.4] **7.** $m\angle MNP = m\angle PNQ$ [1.4] **8.** (a) Recto (b) Suplementario [1.7] **9.** Kianna desarrollará habilidades de razonamiento [1.1] **10.** 10.4 pulg [1.2] **11.** (a) 11 (b) 16 [1.3] **12.** 35° [1.4] **13.** (a) 24° (b) 45° [1.4] **14.** (a) 137° (b) 43° [1.4] **15.** (a) 25° (b) 47° [1.7] **16.** (a) 23° (b) 137° [1.7] **17.** $x + y = 90$ [1.4] **20.** 1. Dado 2. Postulado segmento-adición 3. Postulado segmento-adición 4. Sustitución [1.5] **21.** 1. $2x - 3 = 17$, 2. $2x = 20$, 3. $x = 10$ [1.5] **22.** 1. Dado 2. 90° 3. Postulado ángulo-adición 4. 90° 5. Dado 6. Definición de bisector de ángulo 7. Sustitución 8. $m\angle 1 = 45°$ [1.7] **23.** 108° [1.4]

CAPÍTULO 2

2.1 Ejercicios

1. (a) 108° (b) 72° **3.** (a) 68.3° (b) 68.3° **5.** (a) No (b) Sí (c) Sí **7.** El ángulo 9 parece ser un ángulo recto. **9.** (a) $m\angle 3 = 87°$ (b) $m\angle 6 = 87°$ (c) $m\angle 1 = 93°$ (d) $m\angle 7 = 87°$ **11.** (a) $\angle 5$ (b) $\angle 5$ (c) $\angle 8$ (d) $\angle 5$ **13.** (a) $m\angle 2 = 68°$ (b) $m\angle 4 = 112°$ (c) $m\angle 5 = 112°$ (d) $m\angle MOQ = 34°$ **15.** $x = 10$; $m\angle 4 = 110°$ **17.** $x = 12$; $y = 4$; $m\angle 7 = 76°$ **19.** 1. Dado 2. Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son $\cong$ 3. Si dos rectas se intersecan, entonces los ángulos verticales son $\cong$ 4. $\angle 3 \cong \angle 4$ 5. $\angle 1 \cong \angle 4$ **25.** 93° **27.** (a) $\angle 4 \cong \angle 2$ y $\angle 5 \cong \angle 3$ (b) 180° (c) 180° **31.** No

2.1 Demostración seleccionada

21.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{DF}$; transversal $\overleftrightarrow{AB}$	1. Dado
2. $\angle ACE \cong \angle ADF$	2. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, entonces los $\angle$s correspondientes son $\cong$
3. $\overrightarrow{CX}$ biseca $\angle ACE$ $\overrightarrow{DE}$ biseca $\angle CDF$	3. Dado
4. $\angle 1 \cong \angle 3$	4. Si dos $\angle$s son $\cong$, entonces sus bisectores separan esos $\angle$s en cuatro $\angle$s $\cong$

2.2 Ejercicios

1. *Recíproco:* Si Juan es rico, entonces ganó la lotería estatal. FALSO.
Inverso: Si Juan no gana la lotería estatal, entonces no será rico. FALSO.
Contrapositivo: Si Juan no es rico, entonces no ganó la lotería. VERDADERO.
3. *Recíproco:* Si dos ángulos son complementarios, entonces la suma de sus medidas es 90°. VERDADERO.
Inverso: Si la suma de las medidas de dos ángulos no es 90°, entonces los dos ángulos tampoco son complementarios. VERDADERO.
Contrapositivo: Si dos ángulos no son complementarios, entonces la suma de sus medidas tampoco es 90°. VERDADERO.
5. No hay conclusión **7.** $x = 5$ **9.** (a), (b) y (e) **11.** Si $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos verticales, entonces $\angle A$ y $\angle B$ son congruentes. **13.** Si un triángulo es equilátero, entonces todos los lados del triángulo son congruentes. **15.** Las áreas del $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son iguales. **17.** Son paralelas

2.2 Demostraciones seleccionadas

19. Suponga que $r \parallel s$. Entonces $\angle 1 \cong \angle 5$ ya que son ángulos correspondientes. Pero se da que $\angle 1 \ncong \angle 5$, lo que conduce a una contradicción. Por tanto, la suposición de que $r \parallel s$ es falsa y se deduce que $r \nparallel s$. **21.** Suponga que $\overrightarrow{FH} \perp \overleftrightarrow{EG}$. Entonces $\angle 3 \cong \angle 4$ y $m\angle 3 = m\angle 4$. Pero se da que $m\angle 3 > m\angle 4$, lo que conduce a una contradicción. Entonces la suposición de que $\overrightarrow{FH} \perp \overleftrightarrow{EG}$ debe ser falsa y se deduce que $\overrightarrow{FH}$ no es perpendicular a $\overleftrightarrow{EG}$. **23.** Suponga que los ángulos son verticales. Si son ángulos verticales, entonces son congruentes. Pero esto contradice la hipótesis de que los dos ángulos no son congruentes. Por tanto, nuestra suposición debe ser falsa y los ángulos no son ángulos verticales.
27. Si M es un punto medio de $\overline{AB}$, entonces $AM = \frac{1}{2}(AB)$. Suponga que N también es un punto medio de $\overline{AB}$ de manera que $AN = \frac{1}{2}(AB)$. Por sustitución, $AM = AN$. Por el postulado segmento-adición, $AM = AN + NM$. Utilizando de nuevo sustitución, $AN + NM = AN$. Sustrayendo da $NM = 0$. Pero esto contradice el postulado de la regla, que establece que la medida de un segmento de recta es un número positivo. Por tanto, nuestra suposición está errada y M es el único punto medio para $\overline{AB}$.

2.3 Ejercicios

1. $\ell \parallel m$ **3.** $\ell \nparallel m$ **5.** $\ell \nparallel m$ **7.** $p \parallel q$ **9.** No hay **11.** $\ell \parallel n$ **13.** No hay **15.** $\ell \parallel n$ **17.** 1. Dado 2. Si dos $\angle$s son complementarios al mismo $\angle$, entonces son $\cong$ 3. $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ **23.** $x = 20$ **25.** $x = 120$ **27.** $x = 9$ **29.** $x = 6$

2.3 Demostración seleccionada

19.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{AD} \perp \overline{DC}$ y $\overline{BC} \perp \overline{DC}$	1. Dado
2. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	2. Si dos rectas son $\perp$ a una tercera recta, entonces esas rectas son $\parallel$ entre sí

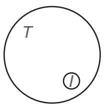
2.4 Ejercicios

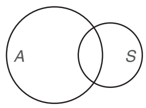
1. $m\angle C = 75°$ **3.** $m\angle B = 46°$ **5.** (a) Indeterminado (b) Determinado (c) Sobredeterminado **7.** (a) Equilátero (b) Isósceles **9.** (a) Equiángulo (b) Recto **11.** Si dos $\angle$s de un triángulo son $\cong$ a dos $\angle$s de otro triángulo, entonces los terceros $\angle$s de los triángulos son $\cong$.

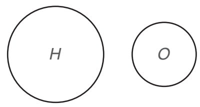
13. m∠1 = 122°; m∠2 = 58°; m∠5 = 72°
15. m∠2 = 57.7°; m∠3 = 80.8°; m∠4 = 41.5° **17.** 35°
19. 40° **21.** $x = 72$; m∠1 = 72°; m∠DAE = 36°
23. 360° **25.** $x = 45°$; $y = 45°$ **27.** $x = 108°$
29. $y = 20°$; $x = 100°$; m∠5 = 60° **35.** 44°
37. m∠N = 49°; m∠P = 98° **39.** 35° **41.** 75°
49. m∠M = 84°

2.5 Ejercicios

1. Aumenta **3.** $x = 113°$; $y = 67°$; $z = 36°$ **5.** (a) 5 (b) 35 **7.** (a) 540° (b) 1440° **9.** (a) 90° (b) 150° **11.** (a) 90° (b) 30° **13.** (a) 7 (b) 9 **15.** (a) $n = 5$ (b) $n = 10$ **17.** (a) 15 (b) 20 **19.** 135°

21. 

23. 

25. 

31. Figura (a): 90°, 90°, 120°, 120°, 120° Figura (b): 90°, 90°, 90° 135°, 135° **33.** 36° **35.** El polígono resultante también es un polígono regular. **37.** 150° **39.** (a) $n - 3$ (b) $\frac{n(n-3)}{2}$
41. 221° **43.** (a) No (b) Sí

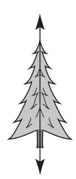
2.5 Demostración seleccionada

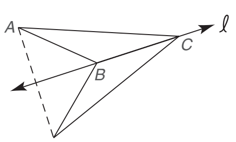
29.

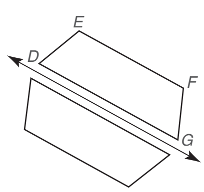
DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. El cuadrilátero $RSTV$ con diagonales $\overline{RT}$ y $\overline{SV}$ que se intersecan en W	1. Dado
2. m∠RWS = m∠1 + m∠2	2. La medida de un ∠ externo de un △ es igual a la suma de las medidas de los ∠s internos no adyacentes del △
3. m∠RWS = m∠3 + m∠4	3. Igual que la 2
4. m∠1 + m∠2 = m∠3 + m∠4	4. Sustitución

2.6 Ejercicios

1. M, T, X **3.** N, X **5.** (a), (c) **7.** (a), (b)
9. MOM **11.** (a)  (b) 

13. (a) 

(b) 

15. (a) 63° (b) Sí (c) Sí **17.** WHIM **19.** SIX **21.** WOW
23. (a) En el sentido de las manecillas del reloj (b) En sentido contrario al de las manecillas del reloj **25.** 62 365 kilowatts-hora **27.** (b), (c) **29.** (a) 12 (b) 6 (c) 4 (d) 3
31. $x = 50$

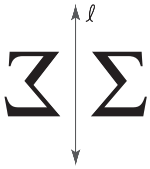
CAPÍTULO 2 EJERCICIOS DE REPASO

1. (a) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ (b) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ **2.** 110° **3.** $x = 37$
4. m∠D = 75°; m∠DEF = 125° **5.** $x = 20$; $y = 10$
6. $x = 30$; $y = 35$ **7.** $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$ **8.** Ninguno **9.** $\overline{BE} \parallel \overline{CF}$
10. $\overline{BE} \parallel \overline{CF}$ **11.** $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ y $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$ **12.** $x = 120°$; $y = 70°$ **13.** $x = 32°$; $y = 30°$ **14.** $y = -8$; $x = 24$
15. $x = 140°$ **16.** $x = 6$ **17.** m∠3 = 69°; m∠4 = 67°; m∠5 = 44° **18.** 110° **19.** S **20.** N **21.** N **22.** S
23. S **24.** A
25.

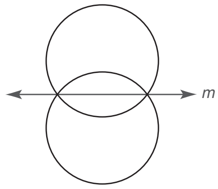
Número de lados	8	12	20	15	10	16	180
Medida de cada ∠ externo	45	30	18	24	36	22.5	2
Medida de cada ∠ interno	135	150	162	156	144	157.5	178
Número de diagonales	20	54	170	90	35	104	15 930

28. No es posible
30. *Enunciado:* Si dos ángulos son ángulos rectos, entonces los ángulos son congruentes.
Recíproco: Si dos ángulos son congruentes, entonces los ángulos son ángulos rectos.
Inverso: Si dos ángulos no son ángulos rectos, entonces los ángulos tampoco son congruentes.
Contrapositivo: Si dos ángulos no son congruentes, entonces los ángulos tampoco son ángulos rectos.
31. *Enunciado:* Si no está lloviendo, entonces estoy feliz.
Recíproco: Si estoy feliz, entonces no está lloviendo.
Inverso: Si está lloviendo, entonces no estoy feliz.
Contrapositivo: Si no estoy feliz, entonces está lloviendo.
32. *Contrapositivo* **37.** Suponga $x = -3$.
38. Suponga que los lados opuestos a estos ángulos son ≅.
39. Suponga que ∠1 ≅ ∠2. Entonces $m \parallel n$ ya que se forman ángulos correspondientes congruentes. Pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, la suposición debe ser falsa y se deduce que ∠1 ≇ ∠2. **40.** Suponga que $m \parallel n$. Entonces ∠1 ≅ ∠3 debido a que los ángulos alternos externos son congruentes cuando las rectas paralelas se cortan por una transversal. Pero esto contradice el hecho dado de que ∠1 ≇ ∠3. Por tanto, la suposición debe ser falsa y se deduce que m $\nparallel$ n. **43.** (a) B, H, W (b) H, S **44.** (a) Triángulo isósceles, círculo, pentágono regular (b) Círculo **45.** Congruente

46. (a)



(b)



47. 90°

CAPÍTULO 2 EJERCICIOS DE REPASO DEMOSTRACIONES SELECCIONADAS

33.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$	1. Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, entonces los $\angle$s correspondientes son $\cong$
3. $\angle 2 \cong \angle 3$	3. Dado
4. $\angle 1 \cong \angle 3$	4. Propiedad transitiva de la congruencia

34.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle 1$ es complementario a $\angle 2$ $\angle 2$ es complementario a $\angle 3$	1. Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 3$	2. Si dos $\angle$s ángulos son complementarios al mismo $\angle$, entonces dichos $\angle$s son $\cong$
3. $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$	3. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los $\angle$s correspondientes sean $\cong$, entonces dichas rectas son $\parallel$

35.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{BE} \perp \overline{DA}$ $\overline{CD} \perp \overline{DA}$	1. Dado
2. $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$	2. Si dos rectas son $\perp$ a una tercera recta, entonces dichas rectas son paralelas entre sí
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, entonces los $\angle$s ángulos alternos internos son $\cong$

36.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle A \cong \angle C$	1. Dado
2. $\overline{DC} \parallel \overrightarrow{AB}$	2. Dado
3. $\angle C \cong \angle 1$	3. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, los $\angle$s alternos internos son $\cong$
4. $\angle A \cong \angle 1$	4. Propiedad transitiva de la congruencia
5. $\overline{DA} \parallel \overline{CB}$	5. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los $\angle$s correspondientes sean $\cong$, entonces dichas rectas son $\parallel$

Capítulo 2 Examen

1. (a) $\angle 5$ (b) $\angle 3$ [2.1] **2.** (a) r y s (b) ℓ y m [2.3] **3.** "Q no" [2.2] **4.** $\angle R$ y $\angle S$ no son ángulos rectos [2.2] **5.** (a) $r \parallel t$ (b) $a \parallel c$ [2.3] **7.** (a) 36° (b) 33° [2.4] **8.** (a) Pentágono (b) Cinco (2.5) **9.** (a) Hexágono equiángulo (b) 120° [2.5] **10.** A: recta; D: recta; N: punto; O: ambas; X: ambas [2.6] **11.** (a) Reflexión (b) Deslizamiento (c) Rotación [2.6] **12.** 61° [2.1] **13.** 54° [2.3] **14.** 50° [2.4] **15.** 78° [2.4] **16.** 1. Dado 2. $\angle 2 \cong \angle 3$ 3. Propiedad transitiva de la congruencia 4. $\ell \parallel n$ [2.3] **17.** Suponga que $\angle M$ y $\angle Q$ son complementarios. Por definición, $m\angle M + m\angle Q = 90°$. Además, $m\angle M + m\angle Q + m\angle N = 180°$ debido a que éstos son los tres ángulos del $\triangle MNQ$. Por sustitución, $90° + m\angle N = 180°$, por tanto se deduce que $m\angle N = 90°$. Pero esto conduce a una contradicción ya que se da que $m\angle N = 120°$. La suposición debe ser falsa y se deduce que $\angle M$ y $\angle Q$ *no* son complementarios [2.2] **18.** 1. Dado 2. 180° 3. $m\angle 1 + m\angle 2 + 90° = 180°$ 4. 90° E5. $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios. R5, Definición de ángulos complementarios [2.4] **19.** 21° [2.4]

CAPÍTULO 3

3.1 Ejercicios

1. $\angle$A; $\overline{AB}$; No; No **3.** $m\angle A = 72°$ **5.** LAL **7.** $\triangle AED \cong \triangle FDE$ **9.** LLL **11.** AAL **13.** ALA **15.** ALA **17.** LLL **19.** (a) $\angle A \cong \angle A$ (b) ALA **21.** $\overline{AD} \cong \overline{EC}$ **23.** $\overline{MO} \cong \overline{MO}$ **25.** 1. Dado 2. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ 3. LLL **33.** Sí; LAL o LLL **35.** No **37.** (a) $\triangle CBE$, $\triangle ADE$, $\triangle CDE$ (b) $\triangle ADC$ (c) $\triangle CBD$

3.1 Demostraciones seleccionadas

27.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\overrightarrow{PQ}$ biseca $\angle MPN$	1. Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. Si un rayo biseca un $\angle$, forma dos $\angle$s $\cong$
3. $\overline{MP} \cong \overline{NP}$	3. Dado
4. $\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$	4. Identidad
5. $\triangle MQP \cong \triangle NQP$	5. LAL

31.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\angle VRS \cong \angle TSR$ y $\overline{RV} \cong \overline{TS}$	1. Dado
2. $\overline{RS} \cong \overline{RS}$	2. Identidad
3. $\triangle RST \cong \triangle SRV$	3. LAL

3.2 Ejercicios

9. m$\angle 2 = 48°$; m$\angle 3 = 48°$; m$\angle 5 = 42°$; m$\angle 6 = 42°$
11. 1. Dado 2. Si dos rectas son $\perp$, entonces forman $\angle$s rectos 3. Identidad 4. $\triangle HJK \cong \triangle HJL$ 5. $\overline{KJ} \cong \overline{JL}$
17. $c = 5$ **19.** $b = 8$ **21.** $c = \sqrt{41}$
31. (a) 8 (b) 37° (c) 53° **33.** 751 pies

3.2 Demostraciones seleccionadas

1.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\angle 1$ y $\angle 2$ son $\angle$s rectos $\overline{CA} \cong \overline{DA}$	1. Dado
2. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$	2. Identidad
3. $\triangle ABC \cong \triangle ABD$	3. HC

5.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\angle R$ y $\angle V$ son $\angle$s rectos $\angle 1 \cong \angle 2$	1. Dado
2. $\angle R \cong \angle V$	2. Todos los $\angle$s rectos son $\cong$
3. $\overline{ST} \cong \overline{ST}$	3. Identidad
4. $\triangle RST \cong \triangle VST$	4. AAL

13.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\angle$s P y R son $\angle$s rectos	1. Dado
2. $\angle P \cong \angle R$	2. Todos los $\angle$s rectos son $\cong$
3. M es el punto medio de $\overline{PR}$	3. Dado
4. $\overline{PM} \cong \overline{MR}$	4. El punto medio de un segmento forma dos segmentos $\cong$
5. $\angle NMP \cong \angle QMR$	5. Si dos rectas se intersecan, los ángulos verticales formados son $\cong$
6. $\triangle NPM \cong \triangle QRM$	6. ALA
7. $\angle N \cong \angle Q$	7. PCTCC

23.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\overline{DF} \cong \overline{DG}$ y $\overline{FE} \cong \overline{EG}$	1. Dado
2. $\overline{DE} \cong \overline{DE}$	2. Identidad
3. $\triangle FDE \cong \triangle GDE$	3. LLL
4. $\angle FDE \cong \angle GDE$	4. PCTCC
5. $\overrightarrow{DE}$ biseca $\angle FDG$	5. Si un rayo divide un $\angle$ en dos $\angle$s $\cong$, entonces el rayo biseca el ángulo

27.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\overline{MN} \cong \overline{QP}$	1. Dado
2. $\overline{MP} \cong \overline{MP}$	2. Identidad
3. $\triangle NMP \cong \triangle QPM$	3. LAL
4. $\angle 3 \cong \angle 4$	4. PCTCC
5. $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$	5. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los $\angle$s alternos internos sean $\cong$, entonces las rectas son $\parallel$

3.3 Ejercicios

1. Isósceles **3.** $\overline{VT} \cong \overline{VU}$ **5.** m$\angle U = 69°$
7. m$\angle V = 56°$ **9.** $L = E$ (equivalente) **11.** R y O son disyuntivos; por tanto $R \cap O = \emptyset$. **13.** Indeterminado
15. Sobredeterminado **17.** Determinado **19.** 55°
21. m$\angle 2 = 68°$; m$\angle 1 = 44°$ **23.** m$\angle 5 = 124°$
25. m$\angle A = 52°$; m$\angle B = 64°$; m$\angle C = 64°$
27. 26 **29.** 12 **31.** Sí **33.** 1. Dado 2. $\angle 3 \cong \angle 2$ 3. $\angle 1 \cong \angle 2$ 4. Si dos $\angle$s de un $\triangle$ son $\cong$, entonces los lados opuestos son $\cong$ **39.** (a) 80° (b) 100° (c) 40° **41.** 75° cada uno

3.3 Demostración seleccionada

35.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\angle 1 \cong \angle 3$	1. Dado
2. $\overline{RU} \cong \overline{VU}$	2. Dado
3. $\angle R \cong \angle V$	3. Si dos lados de un $\triangle$ son $\cong$, entonces los $\angle$s opuestos a esos lados también son $\cong$
4. $\triangle RUS \cong \triangle VUT$	4. ALA
5. $\overline{SU} \cong \overline{TU}$	5. PCTCC
6. $\triangle STU$ es isósceles	6. Si un $\triangle$ tiene dos lados $\cong$, es un $\triangle$ isósceles

3.4 Ejercicios

19. Construya un ángulo de 90°; biséquelo para formar dos $\angle$s de 45°. Biseque uno de los ángulos de 45° para obtener un $\angle$ de 22.5°. **31.** 120° **33.** 150°
39. D está en el bisector de $\angle A$.

3.5 Ejercicios

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Falso
9. Verdadero
11. (a) No es posible $(100° + 100° + 60° \neq 180°)$
(b) Posible $(45° + 45° + 90° = 180°)$
13. (a) Posible (b) No es posible $(8 + 9 = 17)$ (c) No es posible $(8 + 9 < 18)$ **15.** Triángulo rectángulo escaleno ($m\angle Z = 90°$) **17.** Triángulo obtuso isósceles ($m\angle Z = 100°$)
19. 4 cm **21.** 72° (dos de esos ángulos); 36° (sólo un ángulo) **23.** Nashville **25.** 1. $m\angle ABC > m\angle DBE$ y $m\angle CBD > m\angle EBF$ 3. Postulado ángulo-adición 4. $m\angle ABD > m\angle DBF$
29. $BC < EF$ **31.** $2 < x < 10$
33. $x + 2 < y < 5x + 12$ **35.** Demostración: Suponga que $PM = PN$. Entonces $\triangle MPN$ es isósceles. Pero eso contradice la hipótesis; por tanto, la suposición debe estar mal y $PM \neq PN$.

3.5 Demostración seleccionada

27.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. Cuadrilátero $RSTU$ con diagonal $\overline{US}$; $\angle R$ y $\angle TUS$ son $\angle$s rectos	1. Dado
2. $TS > US$	2. La distancia más corta de un punto a una recta es la distancia $\perp$
3. $US > UR$	3. Igual que (2)
4. $TS > UR$	4. Propiedad transitiva de la desigualdad

CAPÍTULO 3 EJERCICIOS DE REPASO

15. (a) $\overline{PR}$ (b) $\overline{PQ}$ **16.** $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ **17.** $\angle R, \angle Q, \angle P$
18. $\overline{DA}$ **19.** (b) **20.** 5, 35 **21.** 20° **22.** 115°
23. $m\angle C = 64°$ **24.** Isósceles **25.** El triángulo también es equilátero. **26.** 60°

CAPÍTULO 3 EJERCICIOS DE REPASO DEMOSTRACIONES SELECCIONADAS

1.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\angle AEB \cong \angle DEC$	1. Dado
2. $\overline{AE} \cong \overline{ED}$	2. Dado
3. $\angle A \cong \angle D$	3. Si dos lados de un $\triangle$ son $\cong$, entonces los $\angle$s opuestos a dichos lados también son $\cong$
4. $\triangle AEB \cong \triangle DEC$	4. ALA

5.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$	1. Dado
2. $\angle A \cong \angle D$	2. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, entonces los $\angle$s alternos internos son $\cong$
3. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	3. Dado
4. $\triangle BAC \cong \triangle EDF$	4. LAL
5. $\angle BCA \cong \angle EFD$	5. PCTCC
6. $\overline{BC} \parallel \overline{FE}$	6. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los $\angle$s alternos internos sean $\cong$, entonces las rectas son $\parallel$

9.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\overline{YZ}$ es la base de un triángulo isósceles	1. Dado
2. $\angle Y \cong \angle Z$	2. Los $\angle$s base de un $\triangle$ isósceles son $\cong$
3. $\overrightarrow{XA} \parallel \overline{YZ}$	3. Dado
4. $\angle 1 \cong \angle Y$	4. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, entonces los $\angle$s correspondientes son $\cong$
5. $\angle 2 \cong \angle Z$	5. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, entonces los $\angle$s alternos internos son $\cong$
6. $\angle 1 \cong \angle 2$	6. Propiedad transitiva para la congruencia

13.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	1. Dado
2. $\angle BAD \cong \angle CDA$	2. Dado
3. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	3. Identidad
4. $\triangle BAD \cong \triangle CDA$	4. LAL
5. $\angle CAD \cong \angle BDA$	5. PCTCC
6. $\overline{AE} \cong \overline{ED}$	6. Si dos $\angle$s de un $\triangle$ son $\cong$, entonces los lados opuestos de esos $\angle$s también son $\cong$
7. $\triangle AED$ es isósceles	7. Si un $\triangle$ tiene dos lados $\cong$, entonces es un $\triangle$ isósceles

Capítulo 3 Examen

1. (a) 75° (b) 4.7 cm [3.1] **2.** (a) $\overline{XY}$ (b) $\angle Y$ [3.1] **3.** (a) LAL (b) ALA [3.1] **4.** Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes [3.2] **5.** (a) No (b) Sí [3.2] **6.** Sí [3.2] **7.** (a) $c = 10$ (b) $\sqrt{28}$ (o $2\sqrt{7}$) [3.2] **8.** (a) $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ (b) No [3.3] **9.** (a) 38° (b) 36° [3.3] **10.** (a) 7.6 pulg (b) 57 [3.3] **13.** (a) $\overline{BC}$ (b) $\overline{CA}$ [3.5] **14.** $m\angle V > m\angle U > m\angle T$ [3.5] **15.** $EB > DC$ ya que $EB = \sqrt{74}$ y $DC = \sqrt{65}$ [3.2] **16.** $\overline{DA}$ [3.1]

17.

Enunciados	Razones
1. $\angle R$ y $\angle V$ son $\angle$s rectos	1. Dado
2. $\angle R \cong \angle V$	2. Todos los $\angle$s rectos son $\cong$
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Dado
4. $\overline{ST} \cong \overline{ST}$	4. Identidad
5. $\triangle RST \cong \triangle VST$	5. AAL [3.1]

18. R1. Dado R2. Si 2 $\angle$s de un $\triangle$ son $\cong$, los lados opuestos son $\cong$ E3. $\angle 1 \cong \angle 3$ R4. ALA E5. $\overline{US} \cong \overline{UT}$ E6. $\triangle STU$ es un triángulo isósceles [3.3] **19.** $a = 10$ cm [3.3]

CAPÍTULO 4

4.1 Ejercicios

1. (a) $AB = DC$ (b) $AD = BC$ **3.** (a) 8 (b) 5 (c) 70° (d) 110° **5.** $AB = DC = 8$; $BC = AD = 9$ **7.** $m\angle A = m\angle C = 83°$; $m\angle B = m\angle D = 97°$ **9.** $m\angle A = m\angle C = 80°$; $m\angle B = m\angle D = 100°$ **11.** $\overline{AC}$ **13.** (a) $\overline{VY}$ (b) 16 **15.** Verdadero **17.** Verdadero **19.** Paralelogramo **21.** Paralelogramo **23.** 1. Dado 2. $\overline{RV} \perp \overline{VT}$ y $\overline{ST} \perp \overline{VT}$ 3. $\overline{RV} \parallel \overline{ST}$ 4. $RSTV$ es un paralelogramo **31.** $\angle P$ es un ángulo recto **33.** $\overline{RT}$ **35.** 255 mph **37.** $\overline{AC}$ **39.** $m\angle A = m\angle C = 70°$; $m\angle B = m\angle D = 110°$; $ABCD$ es un paralelogramo

4.1 Demostración seleccionada

25.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. Paralelogramo $RSTV$	1. Dado
2. $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$	2. Los lados opuestos de un paralelogramo son $\parallel$
3. $\overline{XY} \parallel \overline{VT}$	3. Dado
4. $\overline{RS} \parallel \overline{XY}$	4. Si dos rectas son $\parallel$ a una tercera recta, entonces las rectas son $\parallel$
5. $RSYX$ es un paralelogramo	5. Si un cuadrilátero tiene lados opuestos $\parallel$, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo
6. $\angle 1 \cong \angle S$	6. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son $\cong$

4.2 Ejercicios

1. (a) Sí (b) No **3.** Paralelogramo **5.** (a) Cometa (b) Paralelogramo **7.** $\overline{AC}$ **9.** 6.18 **11.** (a) 8 (b) 7 (c) 6 **13.** 10 **15.** (a) Sí; diagonal que separa la cometa en 2 $\triangle$s $\cong$ (b) No **17.** Congruente **19.** 1. Dado 2. Identidad 3. $\triangle NMQ \cong \triangle NPQ$ 4. PCTCC 5. $MNPQ$ es una cometa **29.** $y = 6$; $MN = 9$; $ST = 18$ **31.** $x = 5$; $RM = 11$; $ST = 22$ **33.** $P = 34$ **35.** 270°

4.2 Demostraciones seleccionadas

21.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. M-Q-T y P-Q-R por tanto $MNPQ$ y $QRST$ son paralelogramos	1. Dado
2. $\angle N \cong \angle MQP$	2. Los $\angle$s opuestos en un paralelogramo son $\cong$
3. $\angle MQP \cong \angle RQT$	3. Si dos rectas se intersecan, los $\angle$s verticales formados son $\cong$
4. $\angle RQT \cong \angle S$	4. Igual que (2)
5. $\angle N \cong \angle S$	5. Propiedad transitiva para la congruencia

23.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. Cometa *HJKL* con diagonal $\overline{HK}$	1. Dado
2. $\overline{LH} \cong \overline{HJ}$ y $\overline{LK} \cong \overline{JK}$	2. Una cometa es un cuadrilátero con dos pares distintos de lados adyacentes ≅
3. $\overline{HK} \cong \overline{HK}$	3. Identidad
4. $\triangle LHK \cong \triangle JHK$	4. LLL
5. $\angle LHK \cong \angle JHK$	5. PCTCC
6. $\overrightarrow{HK}$ biseca $\angle LHJ$	6. Si un rayo divide un ∠ en dos ∠s ≅, entonces el rayo biseca el ∠

4.3 Ejercicios

1. $m\angle A = 60°$; $m\angle ABC = 120°$ **3.** El paralelogramo es un rectángulo. **5.** El cuadrilátero es un rombo. **7.** $\overline{MN} \parallel$ a $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$; $MN = AB = DC$ **9.** $x = 5$; $DA = 19$ **11.** $NQ = 10$; $MP = 10$ **13.** $QP = \sqrt{72}$ o $6\sqrt{2}$; $MN = \sqrt{72}$ o $6\sqrt{2}$ **15.** $\sqrt{41}$ **17.** $\sqrt{34}$ **19.** 5 **21.** Verdadero **23.** 1. Dado 4. Igual que en (3) 5. Si dos rectas son ∥ a una tercera recta, entonces las dos rectas son ∥ 6. Igual que en (2) 7. Igual que en (3) 8. Igual que en (3) 9. Igual que en (5) 10. *ABCD* es un paralelogramo **25.** (a) **27.** 176 **39.** 20.4 pies **41.** Rombo **43.** 150°

4.4 Ejercicios

1. $m\angle D = 122°$; $m\angle B = 55°$ **3.** El trapezoide es un trapezoide de isósceles. **5.** El cuadrilátero es un rombo. **7.** Trapezoide **9.** (a) Sí (b) No **11.** 9.7 **13.** 10.8 **15.** $7x + 2$ **19.** $h = 8$ **21.** 12 **23.** 22 pies **25.** 14
35. (a) 7.0 (b) 14.2 (c) 10.6 (d) Sí
37. (a) 3 pies (b) 12 pies (c) 13 pies (d) $\sqrt{73}$ pies **39.** 8 pies
41. $x = 144°$ o $x = 150°$

CAPÍTULO 4 EJERCICIOS DE REPASO

1. A **2.** S **3.** N **4.** S **5.** S **6.** A **7.** A **8.** A **9.** A **10.** N **11.** S **12.** N **13.** $AB = DC = 17$; $AD = BC = 31$ **14.** 106° **15.** 52 **16.** $m\angle M = 100°$; $m\angle P = 80°$ **17.** $\overline{PN}$ **18.** Cometa **19.** $m\angle G = m\angle F = 72°$; $m\angle E = 108°$ **20.** 14.9 cm **21.** $MN = 23$; $PO = 7$ **22.** 26 **23.** $MN = 6$; $m\angle FMN = 80°$; $m\angle FNM = 40°$ **24.** $x = 3$; $MN = 15$; $JH = 30$ **32.** (a) Son perpendiculares (b) 13 **33.** (a) Perpendicular (b) 30 **34.** (a) Cometas, rectángulos, cuadrados, rombos, trapezoides isósceles (b) Paralelogramos, rectángulos, cuadrados, rombos **35.** (a) Rombo (b) Cometa

CAPÍTULO 4 EJERCICIOS DE REPASO DEMOSTRACIONES SELECCIONADAS

25.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. *ABCD* es un paralelogramo	1. Dado
2. $\overline{AD} \cong \overline{CB}$	2. Los lados opuestos de un paralelogramo son ≅
3. $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$	3. Los lados opuestos de un paralelogramo son ∥
4. $\angle 1 \cong \angle 2$	4. Si dos rectas ∥ se cortan por una transversal, entonces los ∠s alternos internos son ≅
5. $\overline{AF} \cong \overline{CE}$	5. Dado
6. $\triangle DAF \cong \triangle BCE$	6. LAL
7. $\angle DFA \cong \angle BEC$	7. PCTCC
8. $\overline{DF} \parallel \overline{EB}$	8. Si dos rectas se cortan por una transversal de manera que los ∠s alternos externos sean ≅, entonces las rectas son ∥

26.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. *ABEF* es un rectángulo	1. Dado
2. *ABEF* es un paralelogramo	2. Un rectángulo es un paralelogramo con un ∠ recto
3. $\overline{AF} \cong \overline{BE}$	3. Los lados opuestos de un paralelogramo son ≅
4. *BCDE* es un rectángulo	4. Dado
5. $\angle F$ y $\angle BED$ son ∠s rectos	5. Todos los ángulos de un rectángulo son ∠s rectos
6. $\angle F \cong \angle BED$	6. Cualesquiera dos ∠s rectos son ≅
7. $\overline{FE} \cong \overline{ED}$	7. Dado
8. $\triangle AFE \cong \triangle BED$	8. LAL
9. $\overline{AE} \cong \overline{BD}$	9. PCTCC
10. $\angle AEF \cong \angle BDE$	10. PCTCC
11. $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$	11. Si las rectas se cortan por una transversal, de manera que los ∠s correspondientes sean ≅, entonces las rectas son ∥

27.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\overline{DE}$ es una mediana del $\triangle ADC$	1. Dado
2. E es el punto medio de $\overline{AC}$	2. Una mediana de un $\triangle$ es un segmento de recta trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto
3. $\overline{AE} \cong \overline{EC}$	3. El punto medio de un segmento forma dos segmentos $\cong$
4. $\overline{BE} \cong \overline{FD}$ y $\overline{EF} \cong \overline{FD}$	4. Dado
5. $\overline{BE} \cong \overline{EF}$	5. Propiedad transitiva para la congruencia
6. $ABCF$ es un paralelogramo	6. Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan entre sí, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo

28.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\triangle FAB \cong \triangle HCD$	1. Dado
2. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	2. PCTCC
3. $\triangle EAD \cong \triangle GCB$	3. Dado
4. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	4. PCTCC
5. $ABCD$ es un paralelogramo	5. Si un cuadrilátero tiene los dos pares de lados opuestos $\cong$, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo

29.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $ABCD$ es un paralelogramo	1. Dado
2. $\overline{DC} \cong \overline{BN}$	2. Dado
3. $\angle 3 \cong \angle 4$	3. Dado
4. $\overline{BN} \cong \overline{BC}$	4. Si dos $\angle$s de un $\triangle$ son $\cong$, entonces los lados opuestos a esos $\angle$s también son $\cong$
5. $\overline{DC} \cong \overline{BC}$	5. Propiedad transitiva para la congruencia
6. $ABCD$ es un rombo	6. Si un paralelogramo tiene dos lados adyacentes $\cong$, entonces el paralelogramo es un rombo

30.

DEMOSTRACIÓN	
Enunciados	**Razones**
1. $\triangle TWX$ es isósceles con base $\overline{WX}$	1. Dado
2. $\angle W \cong \angle X$	2. Los $\angle$s base de un $\triangle$ isósceles son $\cong$
3. $\overline{RY} \parallel \overline{WX}$	3. Dado
4. $\angle TRY \cong \angle W$ y $\angle TYR \cong \angle X$	4. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, entonces los $\angle$s correspondientes son $\cong$
5. $\angle TRY \cong \angle TYR$	5. Propiedad transitiva para la congruencia
6. $\overline{TR} \cong \overline{TY}$	6. Si dos $\angle$s de un $\triangle$ son $\cong$, entonces los lados opuestos a esos $\angle$s también son $\cong$
7. $\overline{TW} \cong \overline{TX}$	7. Un $\triangle$ isósceles tiene dos lados $\cong$
8. $TR = TY$ y $TW = TX$	8. Si dos segmentos son $\cong$, entonces son iguales en longitud
9. $TW = TR + RW$ y $TX = TY + YX$	9. Postulado segmento-adición
10. $TR + RW = TY + YX$	10. Sustitución
11. $RW = YX$	11. Propiedad de sustracción de la igualdad
12. $\overline{RW} \cong \overline{YX}$	12. Si los segmentos son = en longitud, entonces son $\cong$
13. $RWXY$ es un trapezoide isósceles	13. Si un cuadrilátero tiene un par de lados $\parallel$ y los lados no paralelos son $\cong$, entonces el cuadrilátero es un trapezoide isósceles

Capítulo 4 Examen

1. (a) Congruente (b) Suplementario [4.1]
2. 18.8 cm [4.1] **3.** $EB = 6$ [4.1] **4.** $\overline{VS}$ [4.1]
5. $x = 7$ [4.1] **6.** (a) Cometa (b) Paralelogramo [4.2]
7. (a) Altura (b) Rombo [4.1] **8.** (a) Los segmentos de recta son paralelos. (b) $MN = \frac{1}{2}(BC)$ [4.2] **9.** 15.2 cm [4.2]
10. $x = 23$ [4.2] **11.** $AC = 13$ [4.3] **12.** (a) $\overline{RV}$, $\overline{ST}$ (b) $\angle R$ y $\angle V$ (o $\angle S$ y $\angle T$) [4.4]
13. $MN = 14.3$ pulg [4.4] **14.** $x = 5$ [4.4] **15.** S1. Cometa $ABCD$; $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ R1. Dado R3. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ R4. LLL R5. $\angle B \cong \angle D$ R5. PCTCC [4.3] **16.** S1. Trapezoide $ABCD$ con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ R1. Dado R2. Congruente R3. Identidad R4. LAL R5. $\overline{AC} \cong \overline{DB}$ [4.4] **17.** $P = 26$ [4.4]

CAPÍTULO 5

5.1 Ejercicios

1. (a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) Inconmensurable **3.** (a) $\frac{5}{8}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) Inconmensurable **5.** (a) 3 (b) 8 **7.** (a) 6 (b) 4 **9.** (a) $\pm 2\sqrt{7} \approx \pm 5.29$ (b) $\pm 3\sqrt{2} \approx \pm 4.24$ **11.** (a) 4 (b) $-\frac{5}{6}$ o 3 **13.** (a) $\frac{3 \pm \sqrt{33}}{4} \approx 2.19$ o -0.69 (b) $\frac{7 \pm \sqrt{89}}{4} \approx 4.11$ o -0.61 **15.** 6.3 m/s **17.** $10\frac{1}{2}$ **19.** ≈ 24 enchufes **21.** (a) $4\sqrt{3} \approx 6.93$ (b) $4\frac{1}{2}$ **23.** El salario de la secretaria es de $24 900; el salario del vendedor es de $37 350; el salario del vicepresidente es de $62 250. **25.** 40° y 50° **27.** 30.48 cm **29.** $2\frac{4}{7} \approx 2.57$ **31.** $a = 12$; $b = 16$ **33.** 45° **35.** 4 pulg por $4\frac{2}{3}$ pulg **37.** (a) $\frac{5 + 5\sqrt{5}}{2}$ (b) 8.1

5.2 Ejercicios

1. (a) Son congruentes (b) Son proporcionales **3.** (a) Sí (b) No **5.** (a) $\triangle ABC \sim \triangle XTN$ (b) $\triangle ACB \sim \triangle NXT$ **7.** Sí; Sí, Las esferas tienen la misma forma; una es una ampliación de la otra a menos que sean congruentes. **9.** (a) 82° (b) 42° (c) $10\frac{1}{2}$ (d) 8 **11.** (a) Sí (b) Sí (c) Sí **13.** $5\frac{1}{3}$ **15.** 79° **17.** $n = 3$ **19.** 90° **21.** 12 **23.** $10 + 2\sqrt{5}$ o $10 - 2\sqrt{5}$; ≈ 14.47 o 5.53 **25.** 75 **27.** 2.5 pulg **29.** 3 pies, 9 pulg **31.** 74 pies **33.** No **35.** (a) Sí (b) Sí **37.** 3.75

5.3 Ejercicios

1. ACTSC **3.** (a) Verdadero (b) Verdadero **5.** LLL~ **7.** LAL~ **9.** LAL~ **11.** 1. Dado 2. Si 2 rectas son ⊥, forman ángulos rectos. 3. Todos los ángulos rectos son ≅. 4. Los ∠s opuestos de un ▱ son ≅. 5. AA **13.** 1. Dado 2. Definición de punto medio 3. Si un segmento de recta une los puntos medios de dos lados de un △, su longitud es $\frac{1}{2}$ de la longitud del tercer lado 4. Propiedad de división de la igualdad 5. Sustitución 6. LLL~ **15.** 1. $\overline{MN} \perp \overline{NP}$ y $\overline{QR} \perp \overline{RP}$ 2. Si dos rectas son ⊥, entonces forman un ∠ recto 3. $\angle N \cong \angle QRP$ 4. Identidad E5. $\triangle MNP \sim \triangle QRP$ R5. AA **17.** 1. $\angle H \cong \angle$ 2. Si dos ∠s son ∠s verticales, entonces son ≅ S3. $\triangle HJK \sim \triangle FGK$ R3. AA **19.** 1. $\frac{RQ}{NM} = \frac{RS}{NP} = \frac{QS}{MP}$ 2. $\triangle RQS \sim \triangle NMP$ 3. $\angle N \cong \angle R$ **21.** S1. $\overline{RS} \parallel \overline{UV}$ R1. Dado 2. Si 2 rectas ∥ se cortan por una transversal, los ∠s alternos internos son ≅ 3. $\triangle RST \sim \triangle VUT$ E4. $\frac{RT}{VT} = \frac{RS}{VU}$ R4. LCTSP **23.** $4\frac{1}{2}$ **25.** 16 **27.** $EB = 24$ **29.** 27° **35.** $QS = 8$ **37.** 150 pies

5.3 Demostraciones seleccionadas

31.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\overline{AB} \parallel \overline{DF}$ y $\overline{BD} \parallel \overline{FG}$	1. Dado
2. $\angle A \cong \angle FEG$ y $\angle BCA \cong \angle G$	2. Si dos rectas ∥ se cortan por una transversal, entonces los ∠s correspondientes son ≅
3. $\triangle ABC \sim \triangle EFG$	3. AA

33.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\triangle DEF \sim \triangle MNP$ $\overline{DG}$ y $\overline{MQ}$ son alturas	1. Dado
2. $\overline{DG} \perp \overline{EF}$ y $\overline{MQ} \perp \overline{NP}$	2. Una altura es un segmento trazado desde un vértice ⊥ hasta el lado opuesto
3. $\angle DGE$ y $\angle MQN$ son ∠s rectos	3. Las rectas ⊥ forman un ∠ recto
4. $\angle DGE \cong \angle MQN$	4. Los ∠s rectos son ≅
5. $\angle E \cong \angle N$	5. Si dos △s son ~ entonces los ∠s correspondientes son ≅ (ACTSC)
6. $\triangle DGE \sim \triangle MQN$	6. AA
7. $\frac{DG}{MQ} = \frac{DE}{MN}$	7. Los lados correspondientes de △s ~ son proporcionales LCTSP

5.4 Ejercicios

1. $\triangle RST \sim \triangle RVS \sim \triangle SVT$ **3.** $\frac{RT}{RS} = \frac{RS}{RV}$ o $\frac{RV}{RS} = \frac{RS}{RT}$ **5.** 4.5 **7.** (a) 10 (b) $\sqrt{34} \approx 5.83$ **9.** (a) 8 (b) 4 **11.** (a) Sí (b) No (c) Sí (d) No **13.** (a) Rectángulo (b) Agudo (c) Rectángulo (d) No △ **15.** 15 pies **17.** $6\sqrt{5} \approx 13.4$ m **19.** 20 pies **21.** 12 cm **23.** La base es 8; la altura es 6; las diagonales son 10. **25.** $6\sqrt{7} \approx 15.87$ pulg **27.** 12 pulg **29.** 4 **31.** $9\frac{3}{13}$ pulg **33.** $5\sqrt{5} \approx 11.18$ **39.** 60° **41.** $TS = 13$; $RT = 13\sqrt{2} \approx 18.38$

5.5 Ejercicios

1. (a) a (b) $a\sqrt{2}$ **3.** (a) $a\sqrt{3}$ (b) $2a$ **5.** $YZ = 8$; $XY = 8\sqrt{2} \approx 11.31$ **7.** $XZ = 10$; $YZ = 10$ **9.** $DF = 5\sqrt{3} \approx 8.66$; $FE = 10$ **11.** $DE = 12$; $FE = 24$ **13.** $HL = 6$; $HK = 12$; $MK = 6$ **15.** $AC = 6$; $AB = 6\sqrt{2} \approx 8.49$ **17.** $RS = 6$; $RT = 6\sqrt{3} \approx 10.39$ **19.** $DB = 5\sqrt{6} \approx 12.25$ **21.** $6\sqrt{3} + 6 \approx 16.39$ **23.** 45° **25.** 60°; 146 pies más **27.** $DC = 2\sqrt{3} \approx 3.46$; $DB = 4\sqrt{3} \approx 6.93$ **29.** $6\sqrt{3} \approx 10.39$ **31.** $4\sqrt{3} \approx 6.93$ (b) **33.** $6 + 6\sqrt{3} \approx 16.39$ **35.** (a) $6\sqrt{3}$ pulgadas 12 pulgadas **37.** $VW = 1.2$

5.6 Ejercicios

1. 30 oz del ingrediente A; 24 oz del ingrediente B; 36 oz del ingrediente C **3.** (a) Sí (b) Sí **5.** $EF = 4\frac{1}{6}$, $FG = 3\frac{1}{3}$, $GH = 2\frac{1}{2}$ **7.** $x = 5\frac{1}{3}$, $DE = 5\frac{1}{3}$, $EF = 6\frac{2}{3}$ **9.** $EC = 16\frac{4}{5}$ **11.** $a = 5$; $AD = 4$ **13.** (a) No (b) Sí **15.** 9 **17.** $4\sqrt{6} \approx 9.80$ **19.** 41° **21.** $\frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DE}$; $\frac{DC}{CB} = \frac{DE}{EB}$ **23.** $SV = 2\sqrt{3} \approx 3.46$; $VT = 4\sqrt{3} \approx 6.93$ **25.** $x = \frac{1 + \sqrt{73}}{2}$ o $x = \frac{1 - \sqrt{73}}{2}$; rechace los dos debido a que cada uno dará un número negativo para la longitud de un lado. **27.** (a) Verdadero (b) Verdadero **29.** $RK = 1.8$ **31.** 1. Dado 2. Propiedad medios-extremos 3. Propiedad de adición de la igualdad 4. Propiedad distributiva 6. Sustitución

37. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.62$ **39.** (a) $CD = 2$; $DB = 3$ (b) $CE = \frac{20}{11}$; $EA = \frac{24}{11}$ (c) $BF = \frac{10}{3}$; $FA = \frac{8}{3}$ (d) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = 1$

5.6 Demostración seleccionada

33.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\triangle RST$ con M el punto medio de $\overline{RS}$ $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overline{ST}$	1. Dado
2. $RM = MS$	2. El punto medio de un segmento divide el segmento en dos segmentos de igual medida
3. $\frac{RM}{MS} = \frac{RN}{NT}$	3. Si una recta es $\parallel$ a un lado de un $\triangle$ e interseca los otros dos lados, entonces divide dichos lados proporcionalmente
4. $\frac{MS}{MS} = 1 = \frac{RN}{NT}$	4. Sustitución
5. $RN = NT$	5. Propiedad medios-extremos
6. N es el punto medio de $\overline{RT}$	6. Si un punto divide un segmento en dos segmentos de igual medida, entonces el punto es un punto medio

CAPÍTULO 5 EJERCICIOS DE REPASO

1. Falso **2.** Verdadero **3.** Falso **4.** Verdadero **5.** Verdadero **6.** Falso **7.** Verdadero **8.** (a) $\pm 3\sqrt{2} \approx \pm 4.24$ (b) 26 (c) -1 (d) 2 (e) 7 o -1 (f) $-\frac{9}{5}$ o 4 (g) 6 o -1 (h) -6 o 3
9. \$3.78 **10.** Seis paquetes **11.** \$79.20
12. Las longitudes de los lados son 8, 12, 20 y 28.
13. 18 **14.** 20 y $22\frac{1}{2}$ **15.** 150° **16.** (a) LLL~ (b) AA (c) LAL~ (d) LLL~ **19.** $x = 5$; $m\angle F = 97°$
20. $AB = 6$; $BC = 12$ **21.** 3 **22.** $4\frac{1}{2}$ **23.** $6\frac{1}{4}$
24. $5\frac{3}{5}$ **25.** 10 **26.** 6 **27.** $EO = 1\frac{1}{5}$; $EK = 9$
30. (a) $8\frac{1}{3}$ (b) 21 (c) $2\sqrt{3} \approx 3.46$ (d) 3 **31.** (a) 16 (b) 40 (c) $2\sqrt{5} \approx 4.47$ (d) 4 **32.** (a) 30° (b) 24 (c) 20 (d) 16 **33.** $AE = 20$; $EF = 15$; $AF = 25$
34. $4\sqrt{2} \approx 5.66$ pulg **35.** $3\sqrt{2} \approx 4.24$ cm **36.** 25 cm
37. $5\sqrt{3} \approx 8.66$ pulg **38.** $4\sqrt{3} \approx 6.93$ pulg **39.** 12 cm
40. (a) $x = 9\sqrt{2} \approx 12.73$; $y = 9$ (b) $x = 4\frac{1}{2}$; $y = 6$ (c) $x = 12$; $y = 3$ (d) $x = 2\sqrt{14} \approx 7.48$; $y = 13$
41. 11 km **42.** (a) Agudo (b) No es un $\triangle$ (c) Obtuso (d) Rectángulo (e) No es un $\triangle$ (f) Agudo (g) Obtuso (h) Obtuso

CAPÍTULO 5 EJERCICIOS DE REPASO DEMOSTRACIONES SELECCIONADAS

17.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $ABCD$ es un paralelogramo; $\overline{DB}$ interseca $\overline{AE}$ en el punto F	1. Dado
2. $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$	2. Los lados opuestos de un paralelogramo son $\parallel$
3. $\angle CDB \cong \angle ABD$	3. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, entonces los $\angle$s alternos internos son $\cong$
4. $\angle DEF \cong \angle BAF$	4. Igual que en (3)
5. $\triangle DFE \sim \triangle BFA$	5. AA
6. $\frac{AF}{EF} = \frac{AB}{DE}$	6. LCTSP

18.

DEMOSTRACIÓN

Enunciados	Razones
1. $\angle 1 \cong \angle 2$	1. Dado
2. $\angle ADC \cong \angle 2$	2. Si dos rectas se intersecan, entonces los $\angle$s verticales formados son $\cong$
3. $\angle ADC \cong \angle 1$	3. Propiedad transitiva para la congruencia
4. $\angle A \cong \angle A$	4. Identidad
5. $\triangle BAE \sim \triangle CAD$	5. AA
6. $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$	6. LCTSP

Capítulo 5 Examen

1. (a) 3:5 $\left(\text{o } \frac{3}{5}\right)$ (b) $\frac{25 \text{ mi}}{\text{gal}}$ [5.1]
2. (a) $\frac{40}{13}$ (b) 9, -9 [5.1] **3.** 15°; 75° [5.1]
4. (a) 92° (b) 12 [5.2] **5.** (a) LAL$\sim$ (b) AA [5.3]
6. $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$ [5.4]
7. (a) $c = \sqrt{41}$ (b) $a = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ [5.4]
8. (a) Sí (b) No [5.4] **9.** $DA = \sqrt{89}$ [5.4]
10. (a) $10\sqrt{2}$ pulg (b) 8 cm [5.5]
11. (a) 5 m (b) 12 pies [5.5] **12.** $EC = 12$ [5.6]
13. $PQ = 4$; $QM = 6$ [5.6] **14.** 1 [5.6] **15.** $DB = 4$ [5.2]
16. S1. $\overline{MN} \parallel \overline{QR}$ R1. Dado 2. Los $\angle$s correspondientes son $\cong$ 3. $\angle P \cong \angle P$ 4. AA [5.3] **17.** 1. Dado 2. Identidad 3. Dado 5. Sustitución 6. LAL$\sim$ 7. $\angle PRC \cong \angle B$ [5.3]

CAPÍTULO 6

6.1 Ejercicios

1. 29° **3.** 47.6° **5.** 56.6° **7.** 313° **9.** (a) 90° (b) 270° (c) 135° (d) 135° **11.** (a) 80° (b) 120° (c) 160° (d) 80° (e) 120° (f) 160° (g) 10° (h) 50° (i) 30° **13.** (a) 72° (b) 144° (c) 36° (d) 72° (e) 18° **15.** (a) 12 (b) $6\sqrt{2}$ **17.** 3 **19.** $\sqrt{7} + 3\sqrt{3}$ **21.** 90°; cuadrado **23.** (a) La medida de un arco es igual a la medida de su ángulo central correspondiente. Por tanto los arcos congruentes tienen ángulos centrales congruentes. (b) La medida de un ángulo central es igual a la medida de su arco intersecado. Por tanto los ángulos centrales congruentes tienen arcos congruentes. (c) Trace los radios hasta los puntos extremos de las cuerdas congruentes. Los dos triángulos formados son congruentes por LLL. Los ángulos centrales de cada triángulo son congruentes por PCTCC. Por tanto los arcos correspondientes a los ángulos centrales también son congruentes. Por tanto las cuerdas congruentes tienen arcos congruentes. (d) Trace los cuatro radios hasta los puntos extremos de los arcos congruentes. También trace las cuerdas correspondientes a los arcos congruentes. Los ángulos centrales correspondientes a los arcos congruentes también son congruentes. Por tanto los triángulos son congruentes por LAL. Las cuerdas son congruentes por PCTCC. Por tanto los arcos congruentes tienen cuerdas congruentes. (e) Los ángulos centrales congruentes tienen arcos congruentes (de b). Los arcos congruentes tienen cuerdas congruentes (de d). Por tanto los ángulos centrales congruentes tienen cuerdas congruentes. (f) Las cuerdas congruentes tienen arcos congruentes (de c). Los arcos congruentes tienen ángulos centrales congruentes (de a). Por tanto las cuerdas congruentes tienen ángulos centrales congruentes. **25.** (a) 15° (b) 70° **27.** 72° **29.** 45° **31.** $\overline{MN} \parallel \overline{OP}$ en $\odot O$ 2. Si dos rectas $\parallel$ se cortan por una transversal, entonces los $\angle$s alternos internos son $\cong$ 3. Si dos $\angle$s son $\cong$, entonces sus medidas son $=$ 4. La medida de un $\angle$ inscrito es igual a $\frac{1}{2}$ de la medida de su arco intersecado 5. La medida de un $\angle$ central es igual a la medida de su arco 6. Sustitución **39.** Si $\overset{\frown}{ST} \cong \overset{\frown}{TV}$, entonces $\overline{ST} \cong \overline{TV}$ (los arcos $\cong$ en un círculo tienen cuerdas $\cong$). El $\triangle STV$ es un $\triangle$ isósceles ya que tiene dos lados $\cong$. **43.** $WZ = 1.75$

6.1 Demostración seleccionada

33. *Demostración:* Utilizando las cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ en $\odot O$ como lados de ángulos inscritos, $\angle B \cong \angle D$ y $\angle A \cong \angle C$ debido a que son ángulos inscritos que intersecan el mismo arco. $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ por AA.

6.2 Ejercicios

1. (a) 8° (b) 46° (c) 38° (d) 54° (e) 126° **3.** (a) 90° (b) 13° (c) 103° **5.** (a) 18° **7.** (a) 22° (b) 7° (c) 15° **9.** (a) 136° (b) 224° (c) 68° (d) 44° **11.** (a) 96° (b) 60° **13.** (a) 120° (b) 240° (c) 60° **15.** 28° **17.** $m\overset{\frown}{CE} = 88°$; $m\overset{\frown}{BD} = 36°$ **19.** (a) Suplementario (b) 107° **21.** 1. $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son tangentes a $\odot O$ desde A 2. La medida de un $\angle$ formado por una tangente y una cuerda es igual a $\frac{1}{2}$ de la medida del arco 3. Sustitución 4. Si dos $\angle$s son $=$ en medida, son $\cong$ 5. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ 6. El $\triangle ABC$ es isósceles **27.** ≈ 154.95 mi **29.** $m\angle 1 = 36°$; $m\angle 2 = 108°$ **31.** (a) 30° (b) 60° (c) 150° **33.** $\angle X \cong \angle X$; $\angle R \cong \angle W$; además, $\angle RVX \cong \angle WSX$ **35.** 10 **37.** $(\sqrt{2} - 1)$ cm

6.2 Demostración seleccionada

23. *Dado:* Tangente $\overline{AB}$ a $\odot O$ en el punto B; $m\angle A = m\angle B$

Demuestre: $m\overset{\frown}{BD} = 2 \cdot m\overset{\frown}{BC}$

Demostración: $m\angle BCD = m\angle A + m\angle B$; pero como $m\angle A = m\angle B$, $m\angle BCD = m\angle B + m\angle B$ o $m\angle BCD = 2 \cdot m\angle B$. $m\angle BCD$ también es igual a $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{BD}$ ya que es un $\angle$ inscrito. Por tanto $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{BD} = 2 \cdot m\angle B$ o $m\overset{\frown}{BD} = 4 \cdot m\angle B$. Pero si $\overline{AB}$ es una tangente a $\odot O$ en B, entonces $m\angle B = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{BC}$. Por sustitución, $m\overset{\frown}{BD} = 4(\frac{1}{2}m\overset{\frown}{BC})$ o $m\overset{\frown}{BD} = 2 \cdot m\overset{\frown}{BC}$.

6.3 Ejercicios

1. 30° **3.** $6\sqrt{5}$ **7.** 3 **9.** $DE = 4$ y $EC = 12$ o $DE = 12$ y $EC = 4$ **11.** 4 **13.** $x = 6$; $AE = 3$ **15.** $DE = 12$; $EC = 6$ **17.** $9\frac{2}{5}$ **19.** 9 **21.** $5\frac{1}{3}$ **23.** $3 + 3\sqrt{5}$ **25.** (a) Ninguna (b) Una (c) 4 **31.** Sí; $\overline{AE} \cong \overline{CE}$; $\overline{DE} \cong \overline{EB}$ **33.** 20° **35.** $AM = 5$; $PC = 7$; $BN = 9$ **37.** 12 **39.** 8.7 pulg **41.** (a) Obtuso (b) Equilátero **43.** 45°

6.3 Demostraciones seleccionadas

27. Si $\overline{AF}$ es una tangente a $\odot O$ y $\overline{AC}$ es una secante a $\odot O$, entonces $(AF)^2 = AC \cdot AB$. Si $\overline{AF}$ es tangente a $\odot Q$ y $\overline{AE}$ es una secante a $\odot Q$, entonces $(AF)^2 = AE \cdot AD$. Por sustitución, $AC \cdot AB = AE \cdot AD$.

29. *Demostración:* Sean M, N, P y Q los puntos de tangencia para $\overline{DC}$, $\overline{DA}$, $\overline{AB}$, y $\overline{BC}$, respectivamente. Como los segmentos tangentes de un punto externo son congruentes, $AP = AN$, $PB = BQ$, $CM = CQ$ y $MD = DN$. Por tanto, $AP + PB + CM + MD = AN + BQ + CQ + DN$. Reordenando y asociando, $(AP + PB) + (CM + MD) = (AN + DN) + (BQ + CQ)$ o $AB + CD = DA + BC$.

45. *Dado:* $\overleftrightarrow{AB}$ contiene O, el centro del círculo y $\overleftrightarrow{AB}$ contiene M, el punto medio de $\overline{RS}$ (Vea la figura 6.38.)

Demuestre: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{RS}$

Demostración: Si M es el punto medio de $\overline{RS}$ en $\odot O$, entonces $\overline{RM} \cong \overline{MS}$. Trace $\overline{RO}$ y $\overline{OS}$, los cuales son $>$ debido a que son radios en el mismo círculo. Utilizando $\overline{OM} \cong \overline{OM}$, $\triangle ROM \cong \triangle SOM$ por LLL. Por PCTCC $\angle OMS \cong \angle OMR$ y de aquí $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{RS}$.

6.4 Ejercicios

1. $m\angle CQD < m\angle AQB$ **3.** $QM < QN$ **5.** $CD < AB$ **7.** $QM > QN$ **11.** No; los ángulos no son congruentes. **15.** $\overline{AB}$; $\overline{GH}$; para un círculo que contiene cuerdas desiguales, la cuerda más cercana al centro tiene la longitud más larga y la cuerda a la distancia mayor desde el centro tiene la longitud menor. **17.** (a) $\overline{OT}$ (b) $\overline{OD}$ **19.** (a) $m\overset{\frown}{MN} > m\overset{\frown}{QP}$ (b) $m\overset{\frown}{MPN} < m\overset{\frown}{PMQ}$ **21.** Obtuso **23.** (a) $m\angle AOB > m\angle BOC$ (b) $AB > BC$ **25.** (a) $m\overset{\frown}{AB} > m\overset{\frown}{BC}$ (b) $AB > BC$

27. (a) $\angle C$ (b) $\overline{AC}$ **29.** (a) $\angle B$ (b) $\overline{AC}$
31. $\overline{AB}$ es $(4\sqrt{3} - 4\sqrt{2})$ más cerca que $\overline{CD}$. **37.** 7

CAPÍTULO 6 EJERCICIOS DE REPASO

1. 9 mm **2.** 30 cm **3.** $\sqrt{41}$ pulg **4.** $6\sqrt{2}$ cm
5. 130° **6.** 45° **7.** 80° **8.** 35°
9. $m\widehat{AC} = m\widehat{DC} = 93\frac{1}{3}°$; $m\widehat{AD} = 173\frac{1}{3}°$
10. $m\widehat{AC} = 110°$ y $m\widehat{AD} = 180°$
11. $m\angle 2 = 44°$; $m\angle 3 = 90°$; $m\angle 4 = 46°$; $m\angle 5 = 44°$
12. $m\angle 1 = 50°$; $m\angle 2 = 40°$; $m\angle 3 = 90°$; $m\angle 4 = 50°$
13. 24 **14.** 10 **15.** A **16.** S **17.** N **18.** S **19.** A
20. N **21.** A **22.** N **23.** (a) 70° (b) 28° (c) 64°
(d) $m\angle P = 21°$ (e) $m\widehat{AB} = 90°$; $m\widehat{CD} = 40°$ (f) 260°
24. (a) 3 (b) 8 (c) 16 (d) 4 (e) 4 (f) 8 o 1 (g) $3\sqrt{5}$
(h) 3 (i) $4\sqrt{3}$ (j) 3 **25.** 29 **26.** Si $x = 7$, entonces $AC = 35$; $DE = 17\frac{1}{2}$. Si $x = -4$, entonces $AC = 24$; $DE = 12$
30. $m\angle 1 = 93°$; $m\angle 2 = 25°$; $m\angle 3 = 43°$; $m\angle 4 = 68°$; $m\angle 5 = 90°$; $m\angle 6 = 22°$; $m\angle 7 = 68°$; $m\angle 8 = 22°$; $m\angle 9 = 50°$; $m\angle 10 = 112°$ **31.** $24\sqrt{2}$ cm
32. $15 + 5\sqrt{3}$ cm **33.** 14 cm y 15 cm **34.** $AD = 3$; $BE = 6$; $FC = 7$ **35.** (a) $AB > CD$ (b) $QP < QR$
(c) $m\angle A < m\angle C$

CAPÍTULO 6 EJERCICIOS DE REPASO DEMOSTRACIONES SELECCIONADAS

27. *Demostración:* Si $\overline{DC}$ es tangente a los círculos B y A en los puntos D y C, entonces $\overline{BD} \perp \overline{DC}$ y $\overline{AC} \perp \overline{DC}$. Los $\angle$s D y C son congruentes ya que son ángulos rectos. $\angle DEB \cong \angle CEA$ debido a ángulos verticales. $\triangle BDE \sim \triangle ACE$ por AA. Se deduce que $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{ED}$ ya que los lados correspondientes son proporcionales. De aquí, $AC \cdot ED = CE \cdot BD$.

28. *Demostración:* En $\odot O$, si $\overline{EO} \perp \overline{BC}$, $\overline{DO} \perp \overline{BA}$, y $\overline{EO} \cong \overline{OD}$, $\overline{BC} \cong \overline{BA}$. (Las cuerdas equidistantes del centro del círculo son congruentes.) Se deduce que $\widehat{BC} \cong \widehat{BA}$.

29. *Demostración:* Si $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ son tangentes a $\odot Q$ en A y B, entonces $\overline{AP} \cong \overline{BP}$. $\widehat{AC} \cong \widehat{BC}$ ya que C es el punto medio de $\widehat{AB}$. Se deduce que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y utilizando $\overline{CP} \cong \overline{CP}$, se tiene $\triangle ACP \cong \triangle BCP$ por LLL. $\angle APC \cong \angle BPC$ por PCTCC y de aquí $\overrightarrow{PC}$ biseca $\angle APB$.

Capítulo 6 Examen

1. (a) 272° (b) 134° [6.1] **2.** (a) 69° (b) 32° [6.1]
3. (a) 48° (b) Isósceles [6.1] **4.** (a) Recto (b) Congruente [6.2] **5.** (a) 69° (b) 37° [6.2] **6.** (a) 214° (b) 34° [6.2]
7. (a) 226° (b) 134° [6.2] **8.** (a) Concéntrico (b) 8 [6.1]
9. $2\sqrt{13}$ [6.1] **10.** (a) 1 (b) 2 [6.3] **11.** (a) 10 (b) 5 [6.3] **12.** $2\sqrt{6}$ [6.3] **14.** (a) $m\angle AQB > m\angle CQD$
(b) $AB > CD$ [6.4] **15.** (a) 1 (b) 7 [6.2]
16. S1. En $\odot O$, las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en E
R1. Dado 2. Los ángulos verticales son congruentes 4. AA
5. $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$ [6.3]

CAPÍTULO 7

7.1 Ejercicios

1. A, C, E **11.** El lugar geométrico de los puntos a una distancia dada de una recta fija son dos rectas paralelas a cualquier lado de la recta fija a la misma distancia (dada) de la recta fija. **13.** El lugar geométrico de los puntos a una distancia de 3 pulg del punto O es un círculo con centro O y radio 3 pulg. **15.** El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos D, E y F es el punto G para el cual $DG = EG = FG$. **17.** El lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas en $\odot Q$ paralela al diámetro $\overline{PR}$ es el bisector perpendicular de $\overline{PR}$. **19.** El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas que se intersecan son dos rectas perpendiculares que bisecan los ángulos formados por las dos rectas que se intersecan. **25.** El lugar geométrico de los puntos a una distancia de 2 cm de una esfera cuyo radio es 5 cm es dos esferas concéntricas con el mismo centro. El radio de una esfera es 3 cm y el radio de la otra esfera es 7 cm. **27.** El lugar geométrico es otra esfera con el mismo centro y un radio de longitud 2.5 m. **29.** El lugar geométrico de los puntos equidistantes de un techo de 8 pies y el piso es un plano paralelo al techo y el piso y a la mitad entre ellos.

7.2 Ejercicios

1. Sí **3.** Incentro **5.** Circuncentro **7.** (a) Bisectores de ángulo (b) Bisectores perpendiculares de los lados (c) Alturas (d) Medianas **9.** No (necesita 2) **11.** Triángulo equilátero
13. Punto medio de la hipotenusa **23.** No **25.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$
27. $RQ = 10$; $SQ = \sqrt{89}$ **29.** (a) 4 (b) 6 (c) 10.5
33. Equilátero **35.** (a) Sí (b) Sí **37.** (a) Sí (b) No
41. 3 pulg

7.3 Ejercicios

1. Primero construya los bisectores de ángulo de dos ángulos consecutivos, digamos A y B. El punto de intersección, O, es el centro del círculo inscrito.

En segundo lugar construya el segmento de recta $\overline{OM}$ perpendicular a $\overline{AB}$. Luego, utilizando el radio de longitud $r = OM$, construya el círculo inscrito con centro O.
3. Trace las diagonales (bisectores de ángulo) $\overline{JL}$ y $\overline{MK}$. Éstos determinan el centro O del círculo inscrito. Ahora construya el segmento de recta $\overline{OR} \perp \overline{MJ}$. Utilice OR como la longitud del radio del círculo inscrito. **9.** 27.2 pulg **11.** 8.3 cm
13. $a = 5$ pulg; $r = 5\sqrt{2}$ pulg **15.** $16\sqrt{3}$ pies; 16 pies
17. (a) 120° (b) 90° (c) 72° (d) 60° **19.** (a) 4 (b) 8 (c) 6 (d) 15 **21.** (a) 140° (b) 135° (c) 120° (d) 90° **23.** 6
25. (a) Sí (b) No (c) Sí (d) No **27.** $4 + 4\sqrt{2}$ **29.** 168°

CAPÍTULO 7 EJERCICIOS DE REPASO

7. El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del $\angle ABC$ es el bisector del $\angle ABC$. **8.** El lugar geométrico de los puntos a 1 pulg del punto B es el círculo con centro B y radio de longitud 1 pulg **9.** El lugar geométrico de los puntos equidistantes de D y E es el bisector perpendicular de $\overline{DE}$ **10.** El lugar geométrico de los puntos a $\frac{1}{2}$ de $\overleftrightarrow{DE}$ son dos rectas paralelas entre sí y a $\overleftrightarrow{DE}$, cada recta a $\frac{1}{2}$ pulg de $\overleftrightarrow{DE}$ y en lados opuestos de $\overleftrightarrow{DE}$.

11. El lugar geométrico de los puntos medios de los radios de un círculo es un círculo concéntrico con radio de la mitad de la longitud del radio dado. **12.** El lugar geométrico de los centros de todos los círculos que pasan a través de dos puntos dados es el bisector perpendicular del segmento de recta que une los dos puntos dados. **13.** El lugar geométrico del centro de un centavo que rueda alrededor de medio dólar es un círculo. **14.** El lugar geométrico de los puntos en el espacio a 2 cm del punto A es la esfera con centro A y radio de 2 cm. **15.** El lugar geométrico de los puntos a 1 cm del plano P es el de los dos planos paralelos entre sí y el plano P, cada plano a 1 cm de P y a lados opuestos de P. **16.** El lugar geométrico de los puntos en el espacio a menos de 3 unidades de un punto dado es el interior de una esfera. **17.** El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos planos paralelos es un plano paralelo a la mitad entre los dos planos. **24.** (a) 12 (b) 2 (c) $2\sqrt{3}$ **25.** $BF = 6$; $AE = 9$ **26.** (a) 72° (b) 108° (c) 72° **27.** (a) 36° (b) 144° (c) 36° **28.** (a) 8 (b) 40 cm **29.** (a) 24 pulg (b) $3\sqrt{2}$ pulg **30.** (a) No (b) No (c) Sí (d) Sí **31.** (a) No (b) Sí (c) No (d) Sí **32.** 14 pulg **33.** $40\sqrt{3}$ cm

Capítulo 7 Examen

1. El lugar geométrico de los puntos equidistantes de las rectas paralelas ℓ y m es la recta paralela a ℓ y m y a la mitad entre ellas [7.1] **2.** El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del $\angle ABC$ es el bisector del $\angle ABC$ [7.1] **3.** El lugar geométrico de los puntos equidistantes de D y E es el bisector perpendicular de $\overline{DE}$ [7.1] **4.** El lugar geométrico de los puntos a 3 cm del punto P es el círculo con centro P y radio de longitud 3 cm [7.1] **5.** El lugar geométrico de los puntos en el espacio a 3 cm del punto P es la esfera con centro P y radio de longitud 3 cm [7.1] **6.** (a) Incentro (b) Centroide [7.2] **7.** (a) Circuncentro (b) Ortocentro [7.2] **8.** Triángulo equilátero o triángulo equiángulo [7.2] **9.** Bisectores de ángulo y medianas [7.2] **10.** (a) V (b) V (c) F (d) F [7.3] **11.** (a) 1.5 pulg (b) $3\sqrt{3}$ pulg [7.3] **12.** (a) 72° (b) 108° [7.3] **13.** 10 lados [7.3] **14.** 80 cm [7.3] **15.** (a) $4\sqrt{3}$ pulg (b) 8 pulg [7.3]

CAPÍTULO 8

8.1 Ejercicios

1. Dos triángulos con áreas iguales no necesariamente son congruentes. Dos cuadrados con áreas iguales deben ser congruentes debido a que los lados son congruentes
3. 37 unidades^2 **5.** Las alturas a $\overline{PN}$ y $\overline{MN}$ son congruentes. Esto se debe a que los $\triangle$s QMN y QPN son congruentes; las alturas correspondientes de los $\triangle$s $\cong$ son $\cong$ **7.** Son iguales **9.** 54 cm^2 **11.** 18 m^2 **13.** 72 pulg^2 **15.** 100 pulg^2 **17.** 126 pulg^2 **19.** 264 unidades^2 **21.** 144 unidades^2 **23.** 192 pies^2 **25.** (a) 300 pies^2 (b) 3 galones (c) \$46.50 **27.** $156 + 24\sqrt{10}$ pies^2 **29.** (a) 9 pies cuadrados = 1 yarda cuadrada (b) 1296 pulgadas cuadradas = 1 yarda cuadrada **31.** 24 cm^2 **33.** $\overline{MN}$ une los puntos medios de $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, así $MN = \frac{1}{2}(AB)$. Por tanto, $\overline{AP} \cong \overline{PB} \cong \overline{MN}$. $\overline{PN}$ une los puntos medios de $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$, por tanto $PN = \frac{1}{2}(AC)$. Por tanto, $\overline{AM} \cong \overline{MC} \cong \overline{PN}$. $\overline{MP}$ une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, por lo que $MP = \frac{1}{2}(BC)$. Por tanto, $\overline{CN} \cong \overline{NB} \cong \overline{MP}$. Los cuatro triángulos son $\cong$ por LLL. Así, las áreas de estos triángulos son las mismas. De aquí, el área del triángulo grande es igual a cuatro veces el área de uno de los triángulos pequeños. **37.** 8 pulg **39.** (a) 12 pulg (b) 84 pulg^2 **41.** 56 por ciento **43.** Por el postulado área-adición, $A_{R\cup S} = A_R + A_S$. Ahora $A_{R\cup S}$, A_R y A_S son números positivos. Si p representa el área de la región S, de modo que $A_{R\cup S} = A_R + p$. Por la definición de desigualdad, $A_R < A_{R\cup S}$, o $A_{R\cup S} > A_R$. **45.** $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ **47.** $4\frac{8}{13}$ pulg **49.** 8 **51.** $P = 2x + \frac{96}{x}$ **53.** 48 unidades^2 **55.** (a) 10 (b) 26 (c) 18 (d) No

8.1 Demostración seleccionada

35. *Demostración:* $A = (LH)(HJ) = s^2$. Por el teorema de Pitágoras, $s^2 + s^2 = d^2$.

$$2s^2 = d^2$$
$$s^2 = \frac{d^2}{2}$$

Por tanto, $$A = \frac{d^2}{2}$$

8.2 Ejercicios

1. 30 pulg **3.** $4\sqrt{29}$ m **5.** 30 pies **7.** 38 **9.** 84 pulg^2 **11.** 1764 mm^2 **13.** 40 pies^2 **15.** 80 unidades^2 **17.** $36 + 36\sqrt{3}$ unidades^2 **19.** 16 pulg, 32 pulg y 28 pulg **21.** 15 cm **23.** (a) $\frac{9}{4}$ (b) $\frac{4}{1}$ **27.** $24 + 4\sqrt{21}$ unidades^2 **29.** 96 unidades^2 **31.** 6 yd por 8 yd **33.** (a) 770 pies (b) \$454.30 **35.** 624 pies^2 **37.** Cuadrado con lados de longitud 10 pulg **39.** (a) 52 unidades (b) 169 unidades^2 **41.** 60 pulg^2 **43.** (a) No (b) Sí **47.** 12 pies^2 **49.** 5 pulg^2 **51.** $h = 2.4$ **53.** 2 unidades

8.2 Demostraciones seleccionadas

25. Utilizando la fórmula de Herón, el semiperímetro es $\frac{1}{2}(3s)$ o $\frac{3s}{2}$. Entonces

$$A = \sqrt{\frac{3s}{2}\left(\frac{3s}{2} - s\right)\left(\frac{3s}{2} - s\right)\left(\frac{3s}{2} - s\right)}$$
$$A = \sqrt{\frac{3s}{2}\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{s}{2}\right)}$$
$$A = \sqrt{\frac{3s^4}{16}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{s^4}}{\sqrt{16}}$$
$$A = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$$

45. El área de un trapezoide $= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) = h \cdot \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$. La longitud de la mediana de un trapezoide es $m = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$. Por sustitución, el área de un trapezoide es $A = hm$.

Sección 8.3

1. (a) 12.25 cm^2 (b) 88.36 pulg^2
3. (a) $1.5625\sqrt{3}$ m^2 (b) $27\sqrt{3}$ pulg^2
5. $P = 68.4$ pulg **7.** $r = \frac{20}{3}\sqrt{3}$ cm
9. Hexágono regular **11.** Cuadrado

13. 40.96 cm^2 **15.** $63.48\sqrt{3}$ $pulg^2$
17. 97.5 cm^2 **19.** 317.52 $pulg^2$
21. $54\sqrt{3}$ cm^2 **23.** $75\sqrt{3}$ $pulg^2$
25. 750 cm^2 **27.** 460.8 $pies^2$
29. $(24 + 12\sqrt{3})$ $pulg^2$ **31.** $\frac{2}{1}$ o 2:1
33. $(24 + 24\sqrt{2})$ $unidades^2$
35. $\approx$ 182 $unidades^2$ **37.** $\frac{3}{4}$ o 3:4

8.4 Ejercicios

1. $C = 16\pi$ cm; $A = 64\pi$ cm^2 **3.** $C = 66$ pulg; $A = 346\frac{1}{2}$ $pulg^2$
5. (a) $r = 22$ pulg; $d = 44$ pulg (b) $r = 30$ pies; $d = 60$ pies
7. (a) $r = 5$ pulg; $d = 10$ pulg (b) $r = 1.5$ cm; $d = 3.0$ cm
9. $\frac{8}{3}\pi$ pulg **11.** $C \approx 77.79$ pulg **13.** $r \approx 6.7$ cm **15.** $\ell \approx$ 7.33 pulg **17.** 16 $pulg^2$ **19.** $5 < AN < 13$ **21.** $(32\pi - 64)$ $pulg^2$ **23.** $(600 - 144\pi)$ $pies^2$ **25.** ≈ 7 cm **27.** 8 pulg
29. $A = A_{\text{CÍRCULO MAYOR}} - A_{\text{CÍRCULO MENOR}}$
$A = \pi R^2 - \pi r^2$
$A = \pi(R^2 - r^2)$
Pero $R^2 - r^2$ es una diferencia de dos cuadrados, por tanto
$A = \pi(R + r)(R - r)$.
31. 3 pulg y 4 pulg **33.** (a) ≈ 201.06 $pies^2$ (b) 2.87 pintas. Por tanto, se deben comprar 3 pintas (c) \$8.85
35. (a) ≈ 1256 $pies^2$ (b) 20.93. Por tanto, se necesitan 21 libras de semillas. (c) \$34.65 **37.** ≈ 43.98 cm
39. ≈ 14.43 pulg **41.** $\approx 27\,488.94$ mi **43.** 15.7 pies/s
45. 12π cm^2

8.5 Ejercicios

1. 34 pulg **3.** 150 cm^2 **5.** $\frac{3}{2}rs$ **7.** 54 mm **9.** 24 $pulg^2$
11. 1 pulg **13.** $P = \left(16 + \frac{8}{3}\pi\right)$pulg y $A = \frac{32}{3}\pi$ $pulg^2$
15. ≈ 30.57 pulg **17.** $P\,(12 + 4\pi)$ pulg; $A = (24\pi - 36\sqrt{3})$ $pulg^2$ **19.** $\left(25\sqrt{3} - \frac{25}{2}\pi\right)cm^2$
21. $\frac{9}{2}$ cm **23.** 36π **25.** 90° **27.** Cortando la pizza en 8 rebanadas **29.** $A = \left(\frac{\pi}{2}\right)s^2 - s^2$ **31.** $r = 3\frac{1}{3}$ pies o 3 pies, 4 pulg **35.** (a) 3 (b) 2 **37.** $\frac{308\pi}{3} \approx 322.54$ $pulg^2$ **39.** $1875\pi \approx$ 5890 $pies^2$ **41.** $\sqrt{5}$ cm $\approx$ 2.2 cm

CAPÍTULO 8 EJERCICIOS DE REPASO

1. 480 **2.** (a) 40 (b) $40\sqrt{3}$ (c) $40\sqrt{2}$ **3.** 50
4. 204 **5.** 336 **6.** 36 **7.** (a) $24\sqrt{2} + 18$ (b) $24 + 9\sqrt{3}$ (c) $33\sqrt{3}$ **8.** $A = 216$ $pulg^2$; $P = 60$ pulg. **9.** (a) 19,000 $pies^2$ (b) 4 bolsas (c) \$72 **10.** (a) 3 rollos dobles (b) 3 rollos
11. (a) $\frac{289}{4}\sqrt{3} + 8\sqrt{33}$ (b) $50 + \sqrt{33}$ **12.** 168
13. 5 cm por 7 cm **14.** (a) 15 cm, 25 cm y 20 cm (b) 150 cm^2 **15.** 36 **16.** $36\sqrt{3}$ cm^2 **17.** 20
18. (a) 72° (b) 108° (c) 72° **19.** $96\sqrt{3}$ $pies^2$
20. 6 pulg **21.** $162\sqrt{3}$ $pulg^2$ **22.** (a) 8 (b) ≈ 120 cm^2
23. (a) No. Los bisectores $\perp$ de los lados de un paralelogramo no necesariamente son concurrentes. (b) No. Los bisectores $\perp$ de los lados de un rombo no necesariamente son concurrentes. (c) Sí. Los bisectores $\perp$ de los lados de un rectángulo son concurrentes. (d) Sí. Los bisectores $\perp$ de los lados de un cuadrado son concurrentes.
24. (a) No. Los bisectores de $\angle$ de un paralelogramo no necesariamente son concurrentes. (b) Sí. Los bisectores de $\angle$ de un rombo son concurrentes. (c) No. Los bisectores de $\angle$ de un rectángulo no necesariamente son concurrentes. (d) Sí. Los bisectores de $\angle$ de un cuadrado son concurrentes.
25. $147\sqrt{3} \approx 254.61$ $pulg^2$
26. (a) 312 $pies^2$ (b) 35 yd^2 (c) \$384.95
27. $64 - 16\pi$ **28.** $\frac{49}{2}\pi - \frac{49}{2}\sqrt{3}$ **29.** $\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$
30. $288 - 72\pi$ **31.** $25\sqrt{3} - \frac{25}{3}\pi$ **32.** $\ell = \frac{2\pi\sqrt{5}}{3}$ cm; $A = 5\pi$ cm^2 **33.** (a) 21 pies (b) $\approx 346\frac{1}{2}$ $pies^2$
34. (a) 6π $pies^2$ (b) $(6\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}\sqrt{3})$ pies **35.** $(9\pi - 18)$ $pulg^2$
39. (a) ≈ 28 yd^2 (b) ≈ 21.2 $pies^2$ **40.** (a) ≈ 905 $pies^2$ (b) \$162.90 (c) Aproximadamente 151 flores

CAPÍTULO 8 EJERCICIOS DE REPASO DEMOSTRACIÓN SELECCIONADA

36. *Demostración:* Por un teorema anterior

$$\begin{aligned} A_{\text{ANILLO}} &= \pi R^2 - \pi r^2 \\ &= \pi(OC)^2 - \pi(OB)^2 \\ &= \pi[(OC)^2 - (OB)^2] \end{aligned}$$

En el $\triangle OBC$ rectángulo,

$$(OB)^2 + (BC)^2 = (OC)^2$$

Por tanto, $$(OC)^2 - (OB)^2 = (BC)^2$$

A su vez, $A_{\text{ANILLO}} = \pi(BC)^2$.

Capítulo 8 Examen

1. (a) Pulgadas cuadradas (b) Igual [8.1] **2.** (a) $A = s^2$ (b) $C = 2\pi r$ [8.4] **3.** (a) Verdadero (b) Falso [8.2]
4. 23 cm^2 [8.1] **5.** 120 $pies^2$ [8.1] **6.** 24 $pies^2$ [8.2]
7. 24 cm^2 [8.2] **8.** 6 pies [8.2] **9.** (a) 29 pulg (b) 58 $pulg^2$ [8.3] **10.** (a) 10π pulg (b) 25π $pulg^2$ [8.4] **11.** $\approx 5\frac{1}{2}$ pulg [8.4]
12. 314 cm^2 [8.4] **13.** $(16\pi - 32)$ $pulg^2$ [8.5]
14. 54π cm^2 [8.5] **15.** $(36\pi - 72)$ $pulg^2$ [8.5]
16. $r = 2$ pulg [8.3]

CAPÍTULO 9

9.1 Ejercicios

1. (a) Sí (b) Oblicuo (c) Hexágono (d) Prisma hexagonal oblicuo (e) Paralelogramo
3. (a) 12 (b) 18 (c) 8
5. (a) cm^2 (b) cm^3
7. 132 cm^2 **9.** 120 cm^3 **11.** (a) 16 (b) 8 (c) 16
13. (a) $2n$ (b) n (c) $2n$ (d) $3n$ (e) n (f) 2 (g) $n + 2$
15. (a) 671.6 cm^2 (b) 961.4 cm^2 (c) 2115.54 cm^3
17. (a) 72 $pies^2$ (b) 84 $pies^2$ (c) 36 $pies^3$
19. 1728 $pulg^3$ **21.** 6 pulg por 6 pulg por 3 pulg
23. $x = 3$ **25.** \$4.44 **27.** 640 $pies^3$
29. (a) $T = L + 2B$, $T = hP + 2(e \cdot e)$, $T = e(4e) + 2e^2$, $T = 4e^2 + 2e^2$, $T = 6e^2$ (b) 96 cm^2 (c) $V = Bh$, $V = e^2 \cdot e$, $V = e^3$ (d) 64 cm^3

31. 4 cm **35.** \$128
37. 864 pulg^2 **39.** 10 gal **41.** 720 cm^2 **43.** 2952 cm^3

9.2 Ejercicios

1. (a) Prisma pentagonal recto (b) Prisma pentagonal oblicuo
3. (a) Pirámide cuadrada regular (b) Pirámide cuadrada oblicua
5. (a) Pirámide (b) E (c) $\overline{EA}$, $\overline{EB}$, $\overline{EC}$, $\overline{ED}$
(d) $\triangle EAB$, $\triangle EBC$, $\triangle ECD$, $\triangle EAD$ (e) No **7.** (a) 5 (b) 8
(c) 5 **9.** 66 pulg^2 **11.** 32 cm^3 **13.** (a) $n+1$ (b) n (c) n
(d) $2n$ (e) n (f) $n+1$ **15.** 3a, 4a
17. (a) Altura inclinada (b) Arista lateral **19.** 4 pulg
21. (a) 144.9 cm^2 (b) 705.18 cm^3 **23.** (a) 60 pies^2
(b) 96 pies^2 (c) 48 pies^3 **25.** $36\sqrt{5} + 36 \approx 116.5$ pulg^2
27. 480 pies^2 **29.** 900 pies^3 **31.** ≈ 24 pies **33.** 336 pulg^3
37. 96 pulg^2 **39.** $\frac{8}{1}$ u 8:1 **41.** 39.4 pulg^3

9.3 Ejercicios

1. (a) Sí (b) Sí (c) Sí **3.** (a) $60\pi \approx 188.50$ pulg^2
(b) $110\pi \approx 345.58$ pulg^2 (c) $150\pi \approx 471.24$ pulg^3
5. ≈ 54.19 pulg^2 **7.** 5 cm **9.** El radio tiene una longitud de 2 pulg y la altura tiene una longitud de 3 pulg.
11. $32\pi \approx 100.53$ pulg^3 **13.** $2\sqrt{13} \approx 7.21$ cm **15.** 2 m
17. $4\sqrt{3} \approx 6.93$ pulg **19.** $3\sqrt{5} \approx 6.71$ cm
21. (a) $6\pi\sqrt{85} \approx 173.78$ pulg^2
(b) $6\pi\sqrt{85} + 36\pi \approx 286.88$ pulg^2 (c) $84\pi \approx 263.89$ pulg^3
23. 54π pulg^3 **25.** 2000π cm^3
27. 1200π cm^3 **29.** $65\pi \approx 204.2$ cm^2
31. $192\pi \approx 603.19$ pulg^3 **35.** $60\pi \approx 188.5$ pulg^2
37. $\frac{4}{1}$ o 4:1 **39.** ≈ 471.24 gal **43.** ≈ 290.60 cm^3
45. ≈ 318 gal **47.** ≈ 38 pies^2

9.4 Ejercicios

1. El poliedro *EFGHIJK* es cóncavo.
3. El poliedro *EFGHIJK* tiene nueve caras (F), siete vértices (V) y 14 aristas (E). $V + F = E + 2$ se vuelve
$$7 + 9 = 14 + 2$$
5. Un hexágono regular tiene seis caras (F), ocho vértices (V) y 12 aristas (E). $V + F = E + 2$ se convierte
$$8 + 6 = 12 + 2$$
7. (a) 8 caras (b) Octaedro regular **9.** 9 caras
11. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{5}{12}$ (c) $\frac{5}{6}$ **13.** $6\sqrt{2} \approx 8.49$ pulg
(b) $6\sqrt{3} \approx 10.39$ pulg **15.** 44 pulg^2 **17.** 105.84 cm^2
19. (a) 17.64 m^2 (b) 4.2 m **21.** (a) 1468.8 cm^2 (b) \$8.81
23. (a) $\frac{3}{2}$ o 3:2 (b) $\frac{3}{2}$ o 3:2
25. $r = 3\sqrt{2} \approx 4.24$ pulg; $h = 6\sqrt{2} \approx 8.49$ pulg
27. (a) $3\sqrt{3} \approx 5.20$ pulg (b) 9 pulg
29. (a) $36\pi \approx 113.1$ m^2 (b) $36\pi \approx 113.1$ m^3 **31.** 1.5 pulg
33. 113.1 pies^2; ≈ 3 pintas **35.** $7.4\pi \approx 23.24$ pulg^3
37. (a) Sí (b) Sí **39.** Paralelo **41.** Congruente
43. $S = 36\pi$ unidades^2; $V = 36\pi$ unidades^3

CAPÍTULO 9 EJERCICIOS DE REPASO

1. 672 pulg^2 **2.** 297 cm^2
3. Las dimensiones son 6 pulg por 20 pulg; $V = 720$ pulg^3
4. $T = 468$ cm^2; $V = 648$ cm^3 **5.** (a) 360 pulg^2 (b) 468 pulg^2
(c) 540 pulg^3
6. (a) 624 cm^2 (b) $624 + 192\sqrt{3} \approx 956.55$ cm^2
(c) $1248\sqrt{3} \approx 2161.6$ cm^3
7. $\sqrt{89} \approx 9.43$ cm **8.** $3\sqrt{7} \approx 7.94$ pulg
9. $\sqrt{74} \approx 8.60$ pulg **10.** $2\sqrt{3} \approx 3.46$ cm **11.** (a) 540 pulg^2
(b) 864 pulg^2 (c) 1296 pulg^3 **12.** (a) $36\sqrt{19} \approx 156.92$ cm^2
(b) $36\sqrt{19} + 36\sqrt{3} \approx 219.27$ cm^2 (c) $96\sqrt{3} \approx 166.28$ cm^3
13. (a) 120π pulg^2 (b) 192π pulg^2 (c) 360π pulg^3
14. (a) ≈ 351.68 pies^3 (b) ≈ 452.16 pies^2
15. (a) $72\pi \approx 226.19$ cm^2 (b) $108\pi \approx 339.29$ cm^2
(c) $72\pi\sqrt{3} \approx 391.78$ cm^3 **16.** $\ell = 10$ pulg **17.** ≈ 616 pulg^2
18. ≈ 904.32 cm^3 **19.** 120π unidades^3
20. $\frac{\text{área superficial del más pequeño}}{\text{área superficial del más grande}} = \frac{1}{9}$; $\frac{\text{volumen del más pequeño}}{\text{volumen del más grande}} = \frac{1}{27}$
21. $\approx 183\frac{1}{3}$ pulg^3 **22.** 288π cm^3 **23.** $\frac{32\pi}{3}$ pulg^3
24. ≈ 1017.36 pulg^3 **25.** $(2744 - \frac{1372}{3}\pi)$ pulg^3
26. (a) 8 (b) 4 (c) 12 **27.** 40π mm^3
28. (a) $V = 16, E = 24, F = 10$, se convierte $V + F = E + 2$, $16 + 10 = 24 + 2$
(b) $V = 4, E = 6, F = 4$, se convierte $V + F = E + 2$, $4 + 4 = 6 + 2$
(c) $V = 6, E = 12, F = 8$, se convierte $V + F = E + 2$, $6 + 8 = 12 + 2$
29. 114 pulg^3 **30.** (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{5}{8}$
31. (a) 78 pulg^2 (b) $16\sqrt{3}$ cm^2 **32.** Triángulo rectángulo (3,4,5)

Capítulo 9 Examen

1. (a) 15 (b) 7 [9.1] **2.** (a) 16 cm^2 (b) 112 cm^2
(c) 80 cm^3 [9.1] **3.** (a) 5 (b) 4 [9.2]
4. (a) $32\sqrt{2}$ pies^2 (b) $(16 + 32\sqrt{2})$ pies^2 [9.2]
5. 15 pies [9.2] **6.** 3 pulg [9.2] **7.** 50 pies^3 [9.2]
8. (a) Falso (b) Verdadero [9.3] **9.** (a) Verdadero (b) Verdadero [9.3, 9.4] **10.** 12 [9.4]
11. $3\sqrt{5}$ cm [9.3] **12.** (a) 48π cm^2 (b) 96π cm^3 [9.3]
13. $h = 6$ pulg [9.3]
14. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{8}$ [9.4] **15.** (a) 1256.6 pies^2
(b) 4188.8 pies^3 [9.4]
16. 2 horas y 47 minutos [9.4]

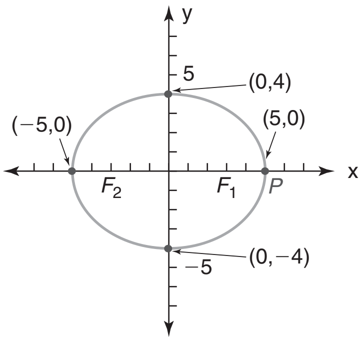
CAPÍTULO 10

10.1 Ejercicios

3. (a) 4 (b) 8 (c) 5 (d) 9 **5.** $b = 3.5$ o $b = 10.5$
7. (a) 5 (b) 10 (c) $2\sqrt{5}$ (d) $\sqrt{a^2 + b^2}$
9. (a) $\left(2, \frac{-3}{2}\right)$ (b) (1, 1) (c) (4, 0) (d) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
11. (a) $(-3, 4)$ (b) $(0, -2)$ (c) $(-a, 0)$ (d) $(-b, -c)$
13. (a) $\left(4, -\frac{5}{2}\right)$ (b) (0, 4) (c) $\left(\frac{7}{2}, -1\right)$ (d) (a, b)
15. (a) $(5, -1)$ (b) $(0, -5)$ (c) $(2, -a)$ (d) $(b, -c)$
17. (a) $(-3, -4)$ (b) $(-2, 0)$ (c) $(-a, 0)$ (d) $(-b, c)$
19. (a) $x = 4$ (b) $y = b$ (c) $x = 2$ (d) $y = 3$
21. $(2.5, -13.7)$ **23.** (2, 3); 16 **25.** (a) Isósceles
(b) Equilátero (c) Triángulo rectángulo isósceles
27. $x + y = 6$ **29.** $(a, a\sqrt{3})$ o $(a, -a\sqrt{3})$
31. $(0, 1 + 3\sqrt{3})$ y $(0, 1 - 3\sqrt{3})$ **33.** 17 **35.** 9
37. (a) 135π unidades^3 (b) 75π unidades^3
39. (a) 96π unidades^3 (b) 144π unidades^3

41. (a) 90π unidades^2 (b) 9π unidades^2

43.



45. (a) $(-3, -1)$ (b) $(1, -3)$ (c) $(3, 1)$

47. (a) $(5, 4)$ (b) $(5, 8)$ (c) $(3, 2)$

10.2 Ejercicios

1. $(4, 0)$ y $(0, 3)$ **3.** $(5, 0)$ y $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ **5.** $(-3, 0)$

7. $(6, 0)$ y $(0, 3)$ **9.** (a) 4 (b) Indefinida (c) -1 (d) 0 (e) $\frac{d-b}{c-a}$ (f) $-\frac{b}{a}$ **11.** (a) 10 (b) 15

13. (a) Colineales (b) No colineales **15.** (a) $\frac{3}{4}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) -2 (d) $\frac{a-b}{c}$ **17.** (a) 2 (b) $-\frac{4}{3}$ (c) $-\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{h+j}{f+g}$

19. Ninguna **21.** Perpendiculares **23.** $\frac{3}{2}$ **25.** 23

33. Triángulo rectángulo **35.** $(4, 7)$; $(0, -1)$; $(10, -3)$

39. $m_{\overline{EH}} = \frac{2c-0}{2b-0} = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b}$

$m_{\overline{FG}} = \frac{c-0}{(a+b)-a} = \frac{c}{b}$

Debido a las pendientes iguales, $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$. Por tanto $EFGH$ es un trapezoide. **43.** $-\frac{b^2}{2m}$

10.2 Demostración seleccionada

37. $m_{\overline{VT}} = \dfrac{e-e}{(c-d)-(a+d)} = \dfrac{0}{c-a-2d} = 0$

$m_{\overline{RS}} = \dfrac{b-b}{c-a} = \dfrac{0}{c-a} = 0$

$\therefore \overline{VT} \parallel \overline{RS}$

$RV = \sqrt{[(a+d)-a]^2 + (e-b)^2}$

$= \sqrt{d^2 + (e-b)^2} = \sqrt{d^2 + e^2 - 2be + b^2}$

$ST = \sqrt{[c-(c-d)]^2 + (b-e)^2}$

$= \sqrt{(d)^2 + (b-e)^2}$

$= \sqrt{d^2 + b^2 - 2be + e^2}$

$\therefore RV = ST$

$RSTV$ es un trapezoide isósceles.

10.3 Ejercicios

1. (a) $a\sqrt{2}$ si $a > 0$ (b) $\frac{d-b}{c-a}$ **3.** (a) -1 (b) $-\frac{b}{a}$

5. $\overline{AB}$ es horizontal y $\overline{BC}$ es vertical; $\therefore \overline{AB} \perp \overline{BC}$. De aquí, el $\angle B$ es un $\angle$ recto y el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.

7. $m_{\overline{QM}} = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$

$m_{\overline{PN}} = \frac{c-0}{(a+b)-a} = \frac{c}{b}$

$\therefore \overline{QM} \parallel \overline{PN}$

$m_{\overline{QP}} = \frac{c-c}{(a+b)-b} = \frac{0}{a} = 0$

$m_{\overline{MN}} = \frac{0-0}{a-0} = \frac{0}{a} = 0$

$\therefore \overline{QP} \parallel \overline{MN}$

Debido a que los dos pares de lados opuestos son paralelos, $MNPQ$ es un paralelogramo.

9. $m_{\overline{MN}} = 0$ y $m_{\overline{QP}} = 0$; $\therefore \overline{MN} \parallel \overline{QP}$. $\overline{QM}$ y $\overline{PN}$ son verticales; $\therefore \overline{QM} \parallel \overline{PN}$. De aquí, $MQPN$ es un paralelogramo. Debido a que $\overline{QM}$ es vertical y $\overline{MN}$ es horizontal, el $\angle QMN$ es un ángulo recto. Dado que el paralelogramo $MQPN$ tiene un $\angle$ recto, también es un rectángulo.

11. $A = (0, 0)$; $B = (a, 0)$; $C = (a, b)$

13. $M = (0, 0)$; $N = (r, 0)$; $P = (r + s, t)$

15. $A = (0, 0)$; $B = (a, 0)$; $C = (a - c, d)$

17. (a) Cuadrado
$A = (0, 0)$; $B = (a, 0)$; $C = (a, a)$; $D = (0, a)$
(b) Cuadrado (con puntos medios de los lados)
$A = (0, 0)$; $B = (2a, 0)$; $C = (2a, 2a)$; $D = (0, 2a)$

19. (a) Paralelogramo
$A = (0, 0)$; $B = (a, 0)$; $C = (a + b, c)$; $D = (b, c)$
(**NOTA:** Se eligió D antes de C)
(b) Paralelogramo (con puntos medios de los lados)
$A = (0, 0)$; $B = (2a, 0)$; $C = (2a + 2b, 2c)$; $D = (2b, 2c)$

21. (a) Triángulo isósceles
$R = (0, 0)$; $S = (2a, 0)$; $T = (a, b)$
(b) Triángulo isósceles (con puntos medios de los lados)
$R = (0, 0)$; $S = (4a, 0)$; $T = (2a, 2b)$

23. $r^2 = s^2 + t^2$ **25.** $c^2 = a^2 - b^2$ **27.** $b^2 = 3a^2$

29. (a) Positivo (b) Negativo (c) $2a$

31. (a) Fórmula de la pendiente (b) Fórmula de la distancia (c) Fórmula del punto medio (d) Fórmula de la pendiente

37. $(6 - 2a, 0)$

10.4 Ejercicios

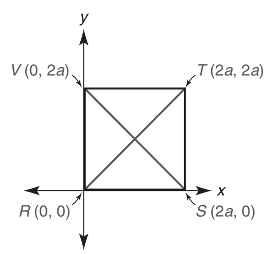
21. $m_1 = -\frac{A}{B}$; $m_2 = \frac{B}{A}$; $m_1 \cdot m_2 = -1$, por tanto $\ell_1 \perp \ell_2$.

23. $3x - 2y = 2$ **25.** $x^2 + y^2 = 9$ **27.** $m = -\frac{a}{b}$

29. Verdadero. El cuadrilátero que resulta es un paralelogramo.

10.4 Demostraciones seleccionadas

3. Las diagonales de un cuadrado son bisectores perpendiculares entre sí.

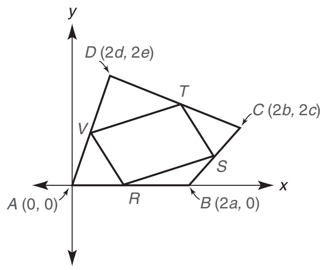


Demostración: Si el cuadrado $RSTV$ tiene los vértices ilustrados. Entonces los puntos medios de las diagonales son $M_{\overline{RT}} = (a, a)$ y $M_{\overline{VS}} = (a, a)$. Además, $m_{\overline{RT}} = 1$ y $m_{\overline{VS}} = -1$. Debido a que las dos diagonales comparten el punto medio (a, a) y a que el producto de sus pendientes es -1, son bisectores perpendiculares entre sí.

7. Los segmentos que unen los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero forman un paralelogramo.

Demostración: Como se ilustra, los puntos medios de los lados del cuadrilátero $ABCD$ son

$$R = \left(\frac{0 + 2a}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right) = (a, 0)$$
$$S = \left(\frac{2a + 2b}{2}, \frac{0 + 2c}{2}\right) = (a + b, c)$$
$$T = \left(\frac{2d + 2b}{2}, \frac{2e + 2c}{2}\right) = (d + b, e + c)$$
$$V = \left(\frac{0 + 2d}{2}, \frac{0 + 2e}{2}\right) = (d, e)$$

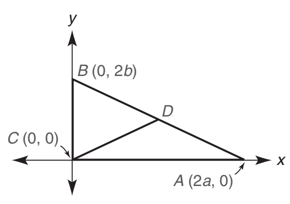


Ahora se determinan las pendientes como sigue:

$$m_{\overline{RS}} = \frac{c - 0}{(a + b) - a} = \frac{c}{b}$$
$$m_{\overline{ST}} = \frac{(e + c) - c}{(d + b) - (a + b)} = \frac{e}{d - a}$$
$$m_{\overline{TV}} = \frac{(e + c) - e}{(d + b) - d} = \frac{c}{b}$$
$$m_{\overline{VR}} = \frac{e - 0}{d - a} = \frac{e}{d - a}$$

Debido a que $m_{\overline{RS}} = m_{\overline{TV}}$, $\overline{RS} \parallel \overline{TV}$. Además, $m_{\overline{ST}} = m_{\overline{VR}}$, por tanto $\overline{ST} \parallel \overline{VR}$. Entonces $RSTV$ es un paralelogramo.

11. El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices del triángulo.



Demostración: Sea el $\triangle ABC$ rectángulo con vértices, como se ilustra. Entonces D, el punto medio de la hipotenusa, está dado por

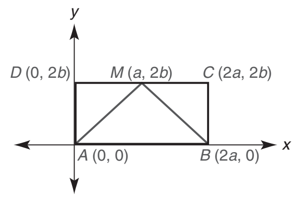
$$D = \left(\frac{0 + 2a}{2}, \frac{2b + 0}{2}\right) = (a, b)$$

Ahora $\quad BD = DA = \sqrt{(2a - a)^2 + (0 - b)^2}$
$= \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Además, $\quad CD = \sqrt{(a - 0)^2 + (b - 0)^2}$
$= \sqrt{a^2 + b^2}$

Entonces D equidista de A, B y C.

15. Si el punto medio de un lado de un rectángulo se une con los puntos extremos del lado opuesto, se forma un triángulo isósceles.



Demostración: Sea el rectángulo $ABCD$ con puntos extremos, como se muestra en la figura anterior. Con M el punto medio de $\overline{DC}$,

$$M = \left(\frac{0 + 2a}{2}, \frac{2b + 2b}{2}\right) = (a, 2b)$$
$$MA = \sqrt{(a - 0)^2 + (2b - 0)^2}$$
$$MA = \sqrt{a^2 + 4b^2}$$
$$MB = \sqrt{(a - 2a)^2 + (2b - 0)^2}$$
$$MB = \sqrt{a^2 + 4b^2}$$

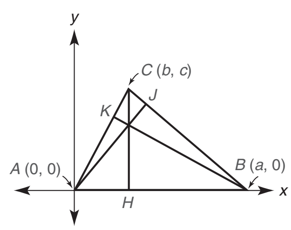
Como $MA = MB$, el $\triangle AMB$ es isósceles.

10.5 Ejercicios

1. $x + 2y = 6$; $y = -\frac{1}{2}x + 3$
3. $-x + 3y = -40$; $y = \frac{1}{3}x - \frac{40}{3}$ **9.** $2x + 3y = 15$
11. $x + y = 6$ **13.** $-2x + 3y = -3$ **15.** $bx + ay = ab$
17. $-x + y = -2$ **19.** $5x + 2y = 5$
21. $4x + 3y = -12$ **23.** $-x + 3y = 2$
25. $y = -\frac{b}{a}x + \frac{bg + ha}{a}$ **27.** $(6, 0)$ **29.** $(5, -4)$
31. $(6, -2)$ **33.** $(3, 2)$ **35.** $(6, -1)$ **37.** $(5, -2)$
39. $(6, 0)$ **41.** $\left(\frac{a - c}{b}, a\right)$ **43.** $\left(b, \frac{ab - b^2}{c}\right)$

10.5 Demostraciones seleccionadas

45. Las alturas de un triángulo son congruentes.



Demostración: Para el $\triangle ABC$, sean las alturas $\overline{CH}$, $\overline{AJ}$ y $\overline{BK}$. Puesto que $\overline{AB}$ es horizontal ($m_{\overline{AB}} = 0$), $\overline{CH}$ es vertical y tiene la ecuación $x = b$.

Debido a que $m_{\overline{BC}} = \frac{c - 0}{b - a} = \frac{c}{b - a}$, la pendiente de la altura $\overline{AJ}$ es $m_{\overline{AJ}} = -\frac{b - a}{c} = \frac{a - b}{c}$. Puesto que $\overline{AJ}$ contiene $(0, 0)$, su ecuación es $y = \frac{a - b}{c}x$.

La intersección de las alturas $\overline{CH}(x = b)$ y $\overline{AJ}\left(y = \frac{a - b}{c}x\right)$ está en $x = b$, por tanto $y = \frac{a - b}{c} \cdot b = \frac{b(a - b)}{c} = \frac{ab - b^2}{c}$. Es decir, $\overline{CH}$ y $\overline{AJ}$ se intersecan en $\left(b, \frac{ab - b^2}{c}\right)$. La altura restante es $\overline{BK}$. Como $m_{\overline{AC}} = \frac{c - 0}{b - 0} = \frac{c}{b}$ $m_{\overline{BK}} = -\frac{b}{c}$. Debido a que $\overline{BK}$ contiene $(a, 0)$, su ecuación es $y - 0 = -\frac{b}{c}(x - a)$ o $y = \frac{-b}{c}(x - a)$.

Para que las tres alturas sean concurrentes $\left(b, \frac{ab - b^2}{c}\right)$ debe encontrarse en la recta $y = \frac{-b}{c}(x - a)$. Sustituyendo queda

$$\begin{aligned}\frac{ab - b^2}{c} &= \frac{-b}{c}(b - a)\\ &= \frac{-b(b - a)}{c}\\ &= \frac{-b^2 + ab}{c}\end{aligned}$$

lo cual es verdadero. Entonces las tres alturas son congruentes.
47. Primero, encuentre la ecuación de la recta a través de P que es perpendicular a $Ax + By = C$. Segundo, encuentre el punto de intersección D de las dos rectas. Por último utilice la fórmula de la distancia para encontrar la longitud de $\overline{PD}$.

CAPÍTULO 10 EJERCICIOS DE REPASO

1. (a) 7 (b) 6 (c) 13 (d) 5
2. (a) 8 (b) 10 (c) $4\sqrt{5}$ (d) 10
3. (a) $\left(6, \frac{1}{2}\right)$ (b) $(-2, 4)$ (c) $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{2x - 3}{2}, y\right)$
4. (a) $(2, 1)$ (b) $(-2, -2)$ (c) $(0, 3)$ (d) $(x + 1, y + 1)$
5. (a) Indefinida (b) 0 (c) $-\frac{5}{12}$ (d) $-\frac{4}{3}$
6. (a) Indefinida (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{4}{3}$
7. $(-4, -8)$ **8.** $(3, 7)$ **9.** $x = \frac{4}{3}$ **10.** $y = -4$
11. (a) Perpendicular (b) Paralela (c) Ninguna (d) Perpendicular **12.** No colineal
13. $x = 4$ **14.** $(7, 0)$ y $(0, 3)$
17. (a) $3x + 5y = 21$ (b) $3x + y = -7$ (c) $-2x + y = -8$ (d) $y = 5$
18. $m_{\overline{AB}} = \frac{4}{3}$; $m_{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$; $m_{\overline{AC}} = -2$. Puesto que $m_{\overline{AC}} \cdot m_{\overline{BC}} = -1$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ y el $\angle C$ es un $\angle$ recto; el triángulo es un $\triangle$ rectángulo. **19.** $AB = \sqrt{85}$; $BC = \sqrt{85}$. Como $AB = BC$, el triángulo es isósceles.
20. $m_{\overline{RS}} = \frac{-4}{3}$; $m_{\overline{ST}} = \frac{5}{6}$; $m_{\overline{TV}} = \frac{-4}{3}$; $m_{\overline{RV}} = \frac{5}{6}$. Por tanto, $\overline{RS} \parallel \overline{VT}$ y $\overline{RV} \parallel \overline{ST}$ y $RSTV$ es un paralelogramo.
21. $(3, 5)$ **22.** $(1, 4)$ **23.** $(3, 5)$
24. $(1, 4)$ **25.** $(16, 11)$, $(4, -9)$, $(-4, 5)$
26. (a) $\sqrt{53}$ (b) -4 (c) $\frac{1}{4}$
27. $A = (-a, 0)$; $B = (0, b)$; $C = (a, 0)$
28. $D = (0, 0)$; $E = (a, 0)$; $F = (a, 2a)$; $G = (0, 2a)$
29. $R = (0, 0)$; $U = (0, a)$; $T = (a, a + b)$
30. $M = (0, 0)$; $N = (a, 0)$, $Q = (a + b, c)$; $P = (b, c)$
31. (a) $\sqrt{(a + c)^2 + (b + d - 2e)^2}$ (b) $-\frac{a}{b - e}$ o $\frac{a}{e - b}$ (c) $y - 2d = \frac{a}{e - b}(x - 2c)$

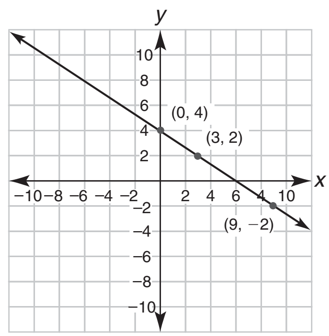
Capítulo 10 Examen

1. (a) $(5, -3)$ (b) $(0, -4)$ [10.1] **3.** $CD = 10$ [10.1]
4. $(-3, 5)$ [10.1]
5.

x	0	3	**0**	9
y	**4**	**2**	4	**−2**

[10.2]

6. [10.2]



7. (a) -3 (b) $\frac{d - b}{c - a}$ [10.2]
8. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $-\frac{3}{2}$ [10.2]
9. Paralelogramo [10.3]
10. $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ o $a^2 = b^2 + c^2$ [10.3]
11. (a) Triángulo isósceles (b) Trapezoide [10.3]
12. (a) Fórmula de la pendiente (b) Fórmula de la distancia [10.3]
13. $D(0, 0)$, $E(2a, 0)$, $F(a, b)$ [10.3] **14.** (b) [10.4]
15. $m_{\overline{VR}} = m_{\overline{TS}}$ por tanto $-\frac{v}{r} = \frac{v}{t - s}$. Respuestas posibles: $r = s - t$ o $s = r + t$ o equivalente [10.4]
16. (a) $y = x + 4$ (b) $y = \frac{3}{4}x - 3$ [10.5]
17. $y = cx + (b - ac)$ [10.5] **18.** $(4, 1)$ [10.5]
19. $(-1, 4)$ [10.5] **20.** $M = (a + b, c)$ y $N = (a, 0)$. Entonces $m_{\overline{AC}} = \frac{2c - 0}{2b - 0} = \frac{c}{b}$ y $m_{\overline{MN}} = \frac{c - 0}{a + b - a} = \frac{c}{b}$. Con $m_{\overline{AC}} = m_{\overline{MN}}$, se deduce que $\overline{AC} \parallel \overline{MN}$ [10.4]

CAPÍTULO 11

11.1 Ejercicios

1. sen $\alpha = \frac{5}{13}$; sen $\beta = \frac{12}{13}$ **3.** sen $\alpha = \frac{8}{17}$; sen $\beta = \frac{15}{17}$
5. sen $\alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$; sen $\beta = \frac{\sqrt{10}}{5}$ **7.** 1 **9.** 0.2924
11. 0.9903 **13.** 0.9511 **15.** $a \approx 6.9$ pulg; $b \approx 9.8$ pulg
17. $a \approx 10.9$ pies; $b \approx 11.7$ pies **19.** $c \approx 8.8$ cm; $d \approx 28.7$ cm
21. $\alpha \approx 29°$; $\beta \approx 61°$ **23.** $\alpha \approx 17°$; $\beta \approx 73°$
25. $\alpha \approx 19°$; $\beta \approx 71°$ **27.** $\alpha \approx 23°$ **29.** $d \approx 103.5$ pies
31. $d \approx 128.0$ pies **33.** $\alpha \approx 24°$
35. (a) ≈ 5.4 pies (b) ≈ 54 pies^2 **37.** $\theta \approx 50°$
39. (a) $h = s \cdot$ sen 36°; (b) $d = 2s \cdot$ sen 54°

11.2 Ejercicios

1. cos $\alpha = \frac{12}{13}$; cos $\beta = \frac{5}{13}$ **3.** cos $\alpha = \frac{3}{5}$; cos $\beta = \frac{4}{5}$
5. cos $\alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$; cos $\beta = \frac{\sqrt{15}}{5}$ **7.** (a) sen $\alpha = \frac{a}{c}$; cos $\beta = \frac{a}{c}$. Por tanto, sen α = cos β (b) cos $\alpha = \frac{b}{c}$; sen $\beta = \frac{b}{c}$. Por tanto, cos α = sen β **9.** 0.9205 **11.** 0.9563
13. 0 **15.** 0.1392 **17.** $a \approx 84.8$ pies; $b \approx 53.0$ pies
19. $a = b = 5$ cm **21.** $c \approx 19.1$ pulg; $d \approx 14.8$ pulg
23. $\alpha = 60°$; $\beta = 30°$ **25.** $\alpha = 51°$; $\beta \approx 39°$
27. $\alpha \approx 65°$; $\beta = 25°$ **29.** $\theta \approx 34°$ **31.** $x \approx 1147.4$ pies
33. ≈ 8.1 pulg **35.** ≈ 13.1 cm **37.** $\alpha \approx 55°$
39. (a) m$\angle A = 68°$ (b) m$\angle B = 112°$
43. $5r^2$ sen 54° cos 54°.

11.3 Ejercicios

1. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$; $\tan\beta = \frac{4}{3}$ **3.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\tan\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
5. $\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\tan\alpha = \frac{5}{12}$; $\cot\alpha = \frac{12}{5}$;
$\sec\alpha = \frac{13}{12}$; $\csc\alpha = \frac{13}{5}$ **7.** $\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\tan\alpha = \frac{a}{b}$;
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$; $\sec\alpha = \frac{c}{b}$; $\csc\alpha = \frac{c}{a}$
9. $\text{sen}\,\alpha = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$; $\tan\alpha = \frac{x}{1}$;
$\cot\alpha = \frac{1}{x}$; $\sec\alpha = \sqrt{x^2+1}$; $\csc\alpha = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ **11.** 0.2679
13. 1.5399 **15.** $x \approx 7.5$; $z \approx 14.2$
17. $y \approx 5.3$; $z \approx 8.5$ **19.** $d \approx 8.1$
21. $\alpha \approx 37°$; $\beta \approx 53°$ **23.** $\theta \approx 56°$; $\gamma \approx 34°$
25. $\alpha \approx 29°$; $\beta \approx 61°$ **27.** 1.4826 **29.** 2.0000
31. 13 456 **33.** (b) ≈ 0.4245 **35.** (b) ≈ 7.1853
37. $\approx$ 1376.8 pies **39.** $\approx$ 4.1 pulg **41.** $\approx 72°$
43. $\alpha \approx 47°$. El rumbo se puede describir como 47° NW.
45. $\approx$ 26 730 pies
47. (a) $h \approx 9.2$ pies (b) $V \approx 110.4$ pies^3

11.4 Ejercicios

1. (a) $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot \text{sen } 78°$ (b) $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\cdot \text{sen } 56°$
3. (a) $\frac{\text{sen } 40°}{5} = \frac{\text{sen}\,\beta}{8}$ (b) $\frac{\text{sen } 41°}{5.3} = \frac{\text{sen } 87°}{c}$
5. (a) $c^2 = 5.2^2 + 7.9^2 - 2(5.2)(7.9)\cos 83°$
(b) $6^2 = 9^2 + 10^2 - 2\cdot 9\cdot 10\cdot\cos\alpha$
7. (a) $\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b}$ (b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
9. (a) (3, 4, 5) es una tripleta pitagórica; γ se encuentra opuesta al lado más largo y debe ser un ángulo recto. (b) 90°
11. 8 pulg^2 **13.** $\approx$ 11.6 pies^2 **15.** $\approx$ 15.2 pies^2
17. $\approx$ 11.1 pulg **19.** $\approx$ 8.9 m **21.** $\approx 55°$
23. $\approx 51°$ **25.** ≈ 10.6 **27.** ≈ 6.9
29. (a) $\approx$ 213.4 pies (b) $\approx$ 13 294.9 pies^2 **31.** $\approx$ 8812 m
33. $\approx$ 15.9 pies **35.** 6 **37.** $\approx$ 14.0 pies **41.** 51.8 cm^2
43. $\frac{1}{2}ab$

CAPÍTULO 11 EJERCICIOS DE REPASO

1. seno; $\approx$ 10.3 pulg **2.** seno; $\approx$ 7.5 pies
3. coseno; $\approx$ 23.0 pulg **4.** seno; $\approx$ 5.9 pies
5. tangente; $\approx 43°$ **6.** coseno; $\approx 58°$ **7.** seno; $\approx 49°$
8. tangente; $\approx 16°$ **9.** $\approx$ 8.9 unidades **10.** $\approx 60°$
11. $\approx$ 13.1 unidades **12.** $\approx$ 18.5 unidades **13.** $\approx$ 42.7 pies
14. $\approx$ 74.8 cm **15.** $\approx 47°$ **16.** $\approx 54°$
17. $\approx$ 26.3 pulg^2 **19.** Si $m\angle S = 30°$ y $m\angle Q = 90°$, entonces los lados del $\triangle RQS$ se pueden representar con $RQ = x$, $RS = 2x$, y $SQ = x\sqrt{3}$. $\text{sen } S = \text{sen } 30° = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$. **21.** $\approx$ 8.4 pies
22. $\approx$ 866 pies **23.** $\approx 41°$ **24.** $\approx 8°$ **25.** $\approx$ 5.0 cm
26. $\approx$ 4.3 cm **27.** $\approx 68°$ **28.** $\approx 106°$
29. 3 a 7 (o 3:7) **30.** $\approx$ 1412.0 m
31. $\cos\theta = \frac{24}{25}$; $\sec\theta = \frac{25}{24}$ **32.** $\sec\theta = \frac{61}{60}$; $\cot\theta = \frac{60}{11}$
33. $\csc\theta = \frac{29}{20}$; $\text{sen}\,\theta = \frac{20}{29}$ **34.** $h \approx 6.9$ pies; $V \approx 74.0$ pies^3

Capítulo 11 Examen

1. (a) $\frac{a}{c}$ (b) $\frac{b}{a}$ [11.1, 11.3] **2.** (a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ [11.1, 11.2]
3. (a) 1 (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ [11.1, 11.3]
4. (a) 0.3907 (b) 0.1908 [11.1, 11.2]
5. $\theta \approx 42°$ [11.1] **6.** (a) tan 26° (b) cos 47° [11.2, 11.3]
7. $a \approx 14$ [11.1]
8. $y \approx 9$ [11.1] **9.** $\theta \approx 56°$ [11.1]
10. (a) Verdadero (b) Verdadero [11.2] **11.** 92 pies [11.1]
12. 10° [11.1] **13.** (a) $\csc\alpha = 2$ (b) $\alpha = 30°$ [11.1, 11.3]
14. (a) $\frac{a}{c}$ (b) $\frac{c}{a}$ [11.3]
15. $\approx$ 42 cm^2 [11.4] **16.** $\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$ [11.4]
17. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ [11.4]
18. $\alpha \approx 33°$ [11.4] **19.** $x \approx 11$ [11.4]
20. $5a^2 \tan 54°$ [11.3]

APÉNDICE A

A.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. Términos indefinidos, definiciones, axiomas o postulados y teoremas **3.** (a) Reflexiva (b) Transitiva (c) Sustitución (d) Simétrica **5.** (a) 12 (b) −2 (c) 2 (d) −12
7. (a) 35 (b) −35 (c) −35 (d) 35 **9.** No: Axioma conmutativo para la multiplicación **11.** (a) 9 (b) −9 (c) 8 (d) −8
13. (a) −4 (b) −36 (c) 18 (d) $-\frac{1}{4}$ **15.** −\$60
17. (a) 65 (b) 16 (c) 9 (d) $8x$ **19.** (a) 10π (b) $11\sqrt{2}$ (c) $7x^2y$ (d) $7\sqrt{3}$ **21.** (a) 14 (b) 20 (c) 14 (d) 38
23. (a) −1 (b) $\frac{1}{9}$ (c) $-\frac{8}{9}$ (d) $-\frac{1}{2}$ **25.** (a) 6 (b) $12x^2 - 7x - 10$
27. $5x + 2y$ **29.** $10x + 5y$ **31.** $10x$

A.2 FÓRMULAS Y ECUACIONES

1. $5x + 8$ **3.** $2x - 2$ **5.** $5x + 8$ **7.** $x^2 + 7x + 12$
9. $6x^2 + 11x - 10$ **11.** $2a^2 + 2b^2$ **13.** 60
15. 40 **17.** 148 **19.** 12π **21.** 7 **23.** −12
25. 12 **27.** 5 **29.** 30 **31.** 8 **33.** 4 **35.** 32

A.3 DESIGUALDADES

1. La longitud de $\overline{AB}$ es mayor que la longitud de $\overline{CD}$.
3. La medida del ángulo ABC es mayor que la medida del ángulo DEF. **5.** (a) 4 (b) 10 **7.** $IJ < AB$
9. (a) Falso (b) Verdadero (c) Verdadero (d) Falso
11. La medida del segundo ángulo debe ser mayor que 148° y menor que 180°. **13.** (a) $-12 \leq 20$ (b) $-10 \leq -2$ (c) $18 \geq -30$ (d) $3 \geq -5$

15.

No cambia	No cambia
No cambia	No cambia
No cambia	Cambia
No cambia	Cambia

17. $x \leq 7$ **19.** $x < -5$ **21.** $x < 20$
23. $x \geq -24$ **25.** $x \leq -2$ **27.** No verdadero si $c < 0$
29. No verdadero si $a = -3$ y $b = -2$

A.4 ECUACIONES CUADRÁTICAS

1. (a) 3.61 (b) 2.83 (c) -5.39 (d) 0.77
3. a, c, d, f **5.** (a) $2\sqrt{2}$ (b) $3\sqrt{5}$ (c) 30 (d) 3
7. (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{5}{7}$ (c) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
9. (a) $\sqrt{54} \approx 7.35$ y $3\sqrt{6} \approx 7.35$
(b) $\sqrt{\frac{5}{16}} \approx 0.56$ y $\frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0.56$
11. $x = 4$ o $x = 2$ **13.** $x = 12$ o $x = 5$
15. $x = -\frac{2}{3}$ o $x = 4$ **17.** $x = \frac{1}{3}$ o $x = \frac{1}{2}$
19. $x = 5$ o $x = 2$ **21.** $x = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2} \approx 5.30$ o 1.70
23. $x = 2 \pm 2\sqrt{3} \approx 5.46$ o -1.46
25. $x = \frac{3 \pm \sqrt{149}}{10} \approx 1.52$ o -0.92
27. $x = \pm\sqrt{7} \approx \pm 2.65$ **29.** $x = \pm\frac{5}{2}$ **31.** $x = 0$ o $x = \frac{b}{a}$
33. 5 por 8 **35.** $n = 6$ **37.** $c = 5$

Glosario

altura longitud de la altitud de una figura geométrica
altura de un cilindro (prisma) segmento de recta entre y perpendicular a cada una de las dos bases
altura de un cono (pirámide) segmento de *recta* desde el vértice del cono perpendicular hasta el plano de la base
altura de un paralelogramo segmento de recta trazado perpendicular desde un vértice hasta un lado adyacente (conocido como base relacionada) del paralelogramo
altura de un trapecio segmento de recta trazado perpendicular desde un vértice hasta el lado paralelo restante
altura de un triángulo segmento de recta trazado perpendicular desde un vértice del triángulo hasta el lado opuesto del triángulo; la longitud de la altitud es la altura del triángulo
altura inclinada de un cono cualquier segmento de recta que une el vértice del cono con un punto en la base circular
altura inclinada de una pirámide regular segmento de recta que une el vértice de la pirámide con el punto medio de un borde base de la pirámide
ángulo figura plana formada por dos rayos que tienen un punto extremo común
ángulo agudo ángulo cuya medida se encuentra entre 0 y 90°
ángulo bisector *véase* bisector de un ángulo
ángulo central de un círculo ángulo cuyo vértice se encuentra en el centro del círculo y cuyos lados son radios del círculo
ángulo central de un polígono regular ángulo cuyo vértice se encuentra en el centro del polígono regular y cuyos lados son dos radios consecutivos del polígono
ángulo de depresión (elevación) ángulo agudo formado por un rayo horizontal y un rayo determinado por una rotación hacia abajo (hacia arriba)
ángulo del vértice de un triángulo isósceles ángulo formado por los dos lados congruentes del triángulo
ángulo exterior de un polígono ángulo formado por un lado del polígono y una extensión de un segundo lado que tiene un punto extremo común con el primer lado
ángulo inscrito de un círculo ángulo cuyo vértice se encuentra en un círculo y cuyos lados son cuerdas del círculo
ángulo interior de un polígono cualquier ángulo formado por dos lados consecutivos del polígono, de tal manera que el ángulo se encuentra en el interior del polígono
ángulo obtuso ángulo cuya medida se encuentra entre 90 y 180°
ángulo llano ángulo cuya medida es exactamente 180°; ángulo cuyos lados son rayos opuestos
ángulo recto ángulo cuya medida es exactamente 90°
ángulo reflejo ángulo cuyos lados miden entre 180 y 360°
ángulos adyacentes dos ángulos que tienen un vértice y un lado común entre ellos
ángulos complementarios dos ángulos cuyas medidas suman 90°
ángulos de la base de un triángulo isósceles los dos ángulos congruentes del triángulo isósceles
ángulos suplementarios dos ángulos cuya suma de medidas es 180°
ángulos verticales par de ángulos que se encuentran en posiciones opuestas cuando se forman mediante dos rectas que se intersecan
apotema de un polígono regular cualquier recta trazada desde el centro del polígono regular perpendicular a uno de sus lados
arco segmento (parte) de un círculo determinado por dos puntos en el círculo y todos los puntos entre ellos
arco que se interseca arco (un arco) de un círculo que se corta en el interior de un ángulo (o ángulo relacionado)
arco mayor arco cuya medida se encuentra entre 180 y 360°
arco menor arco cuya medida se encuentra entre 0 y 180°
área medida en unidades cuadradas de la cantidad de región dentro de una figura plana cerrada
área lateral suma de las áreas de las caras laterales de un sólido o el área de la superficie lateral curva, excluyendo el área o las áreas base (como en prismas, pirámides, cilindros y conos)
área superficial medida del área total de un sólido; suma del área lateral y del área base en muchas figuras sólidas
argumento válido argumento en el cual la conclusión se deduce lógicamente de premisas o suposiciones previamente establecidas (y aceptadas)
arista de un poliedro cualquier segmento de recta que une dos vértices consecutivos del poliedro (incluye prismas y pirámides)
axioma *véase* postulado

base lado (de una figura plana) o cara (de una figura sólida) respecto de la que se traza una altura
base de un triángulo isósceles lado del triángulo cuya longitud es única; lado opuesto al vértice
bases de un trapecio los dos lados paralelos del trapecio
bisector de un ángulo rayo que separa el ángulo dado en dos ángulos congruentes menores
bisector perpendicular de un segmento de recta recta (o parte de una recta) que es perpendicular a un segmento de recta dado y biseca ese segmento de recta

cara de un poliedro cualquiera de los polígonos que se encuentra en un plano determinado por los vértices del poliedro; incluye base(s) y caras laterales de prismas y pirámides

catetos de un trapecio los dos lados no paralelos del trapecio

catetos de un triángulo isósceles los dos lados congruentes del triángulo

catetos de un triángulo rectángulo los dos lados que forman el ángulo recto del triángulo

centro de un círculo el punto interior del círculo cuya distancia desde todos los puntos en el círculo es la misma

centro de un polígono regular centro común de los círculos inscrito y circunscrito del polígono regular

centro de una esfera punto interior de la esfera cuya distancia desde todos los puntos en la esfera es la misma

centroide de un triángulo el punto de concurrencia para las tres medianas del triángulo

cilindro (circular) sólido generado por todos los segmentos de rectas paralelos al eje del cilindro y que contienen puntos extremos correspondientes en las dos bases circulares congruentes

cilindro circular recto cilindro en el cual el segmento de recta que une los centros de las bases circulares es perpendicular al plano de cada base

círculo conjunto de puntos en un plano que se encuentran a una distancia fija desde un punto dado (el centro del círculo) en el plano

círculo circunscrito círculo que contiene todos los vértices de un polígono cuyos lados son cuerdas del círculo

círculo inscrito círculo que se encuentra dentro de un polígono, de tal manera que los lados del polígono son tangentes del círculo

círculos concéntricos (esferas) dos o más círculos (esferas) que tienen el mismo centro

círculos tangentes dos círculos que tienen un punto en común; los círculos pueden ser tangentes externa o internamente

circuncentro de un triángulo centro del círculo circunscrito de un triángulo; el punto de concurrencia para el bisector perpendicular de los tres lados del triángulo

circunferencia medida lineal de la distancia alrededor de un círculo

cometa en forma de rombo cuadrilátero que tiene dos pares distintos de lados adyacentes congruentes

conclusión la cláusula "entonces" de un enunciado "si, entonces"; parte de un teorema que indica la afirmación que se debe demostrar

congruente se refiere a figuras (como ángulos) que se pueden hacer coincidir

conjunto cualquier colección de objetos, números o puntos

cono circular recto cono en el que el segmento de recta que une el vértice del cono con el centro de la base circular es perpendicular a la base

corolario teorema que se deduce de otro teorema como un "subproducto"; teorema que se demuestra con facilidad como consecuencia de otro teorema

cosecante en un triángulo rectángulo la proporción $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$

coseno en un triángulo rectángulo la proporción $\frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

cotangente en un triángulo rectángulo la proporción $\frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$

cuadrilátero polígono que tiene exactamente cuatro lados

cuadrilátero oblicuo cuadrilátero en el que no todos sus lados se encuentran en un plano

cubo prisma cuadrangular recto cuyos lados son congruentes

cuerda de un círculo cualquier segmento de recta que une dos puntos en el círculo

decágono polígono con exactamente 10 lados

deducción forma de razonamiento mediante la cual se llega a conclusiones específicas al aplicar principios establecidos

desigualdad triangular enunciado que establece que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo no puede ser mayor que la longitud del tercer lado

diagonal de un polígono segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono

diámetro cualquier segmento de recta que une dos puntos en un círculo (o esfera) y que también contiene el centro del círculo (o esfera)

dodecaedro (regular) poliedro que tiene exactamente 12 caras que son pentágonos regulares congruentes

dodecágono polígono que tiene exactamente 12 lados

ecuaciones equivalentes ecuaciones para las cuales las soluciones son las mismas

esfera conjunto de puntos en el espacio que se encuentran a una distancia fija desde un punto dado (el centro de la esfera)

exterior se refiere a todos los puntos que se encuentran fuera de un plano o figura sólida encerrada (acotada)

extremos de una proporción el primer y el último términos de una proporción; en $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a y b son los extremos

fórmula cuadrática la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, que proporciona soluciones para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$

grado unidad de medida que corresponde a $\frac{1}{360}$ de una revolución completa; se utiliza con ángulos y arcos

heptágono polígono que tiene exactamente siete lados

hexaedro (regular) poliedro que tiene seis caras cuadrangulares congruentes; también se denomina cubo

hexágono polígono que tiene exactamente seis lados

hipotenusa de un triángulo rectángulo lado de un triángulo rectángulo que se encuentra opuesto al ángulo recto

hipótesis la cláusula "si" de un enunciado "si, entonces"; parte de un teorema que proporciona la información dada

icosaedro (regular) poliedro con 20 caras congruentes que son triángulos equiláteros
incentro de un triángulo centro del círculo inscrito en un triángulo; punto de concurrencia para los tres bisectores angulares de los ángulos del triángulo
inducción forma de razonamiento en la cual se utiliza una variedad de observaciones específicas para obtener una conclusión general
interior se refiere a todos los puntos que se encuentran dentro de un plano o figura sólida encerrada (acotada)
intersección puntos que comparten dos figuras geométricas
intersecciones puntos en los cuales la gráfica de una ecuación interseca los ejes
intuición establecer una conclusión mediante la percepción
inverso relativo al enunciado "si P, entonces Q", este enunciado tiene la forma "si no P, entonces no Q"

lema teorema que se introduce y se demuestra de tal modo que se pueda demostrar un teorema posterior
lugar geométrico conjunto de todos los puntos que satisfacen una condición o condiciones dadas

media geométrica segundo y tercer términos repetidos de ciertas proporciones; en $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, b es la media geométrica de a y c
media proporcional *véase* media geométrica
mediana de un trapecio segmento de recta que une los puntos medios de dos catetos (lados no paralelos) del trapecio
mediana de un triángulo segmento de recta que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto
medias de una proporción segundo y tercer términos de una proporción; en $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, b y c son las medias

nonágono polígono que tiene exactamente nueve lados

octaedro (regular) poliedro con ocho caras congruentes que son triángulos equiláteros
octágono polígono que tiene exactamente ocho lados
ortocentro de un triángulo punto de concurrencia para las tres alturas del triángulo

paralelepípedo prisma rectangular recto; una caja
paralelogramo cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos
pendiente medida de la inclinación de una recta; en el sistema coordenado rectangular, la pendiente m de la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ donde $x_1 \neq x_2$
pentágono polígono que tiene exactamente cinco lados
perímetro de un polígono suma de las longitudes de los lados del polígono
pi (π) razón constante entre la circunferencia **C** de un círculo y la longitud de su diámetro, es común que esta razón se aproxime mediante la fracción $\frac{22}{7}$ o con el decimal 3.1416
pirámide regular pirámide cuya base es un polígono regular y cuyas caras laterales son triángulos isósceles congruentes
poliedro figura sólida cuyas caras son polígonos que intersecan otras caras a lo largo de lados comunes de los polígonos
poliedro regular poliedro cuyos bordes son congruentes y cuyas caras son congruentes
polígono figura plana cuyos lados son segmentos de rectas que se intersecan sólo en sus puntos extremos
polígono cíclico polígono que se puede inscribir en un círculo
polígono circunscrito polígono cuyos lados son tangentes a un círculo en el interior del polígono
polígono cóncavo polígono en el cual al menos una diagonal se encuentra en el exterior del polígono
polígono convexo polígono en el cual todas las diagonales se encuentran en el interior del polígono
polígono equiangular tipo de polígono cuyos ángulos son congruentes (iguales)
polígono equilátero tipo de polígono cuyos lados son congruentes (iguales)
polígono inscrito polígono cuyos vértices se encuentran en un círculo de forma tal que los lados del polígono son cuerdas del círculo
polígono regular polígono cuyos lados son congruentes y cuyos ángulos interiores son congruentes
polígonos semejantes polígonos que tienen la misma forma
postulado enunciado que se supone verdadero
prisma recto prisma en el cual los bordes laterales son perpendiculares al plano de cada base
prisma regular prisma recto cuyas bases son polígonos regulares
proporción extendida proporción que tiene tres o más miembros tales como $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$
punto de tangencia (contacto) punto en el cual una tangente a un círculo toca el círculo
punto medio punto en un segmento de recta (o arco) que separa el segmento de recta (arco) en dos partes congruentes
puntos colineales puntos que se encuentran en la misma recta
puntos coplanares puntos que se encuentran en el mismo plano
puntos no colineales cuatro o más puntos que no se encuentran en la misma recta
puntos no coplanares cuatro o más puntos que no se encuentran en el mismo plano

radián medida de un ángulo central de un círculo cuyo arco que se interseca tiene una longitud igual al radio del círculo
radio segmento de recta que une el centro de un círculo (o esfera) con cualquier punto en el círculo (o esfera)
rayo parte de una recta que inicia en un punto y se extiende infinitamente en una dirección

rayos opuestos dos rayos que tienen un punto extremo común y que en conjunto forman una recta

recíproco relativo al enunciado “si P, entonces Q”, este enunciado tiene la forma “si Q, entonces P”

recta auxiliar recta (o parte de una recta) agregada a un dibujo para ayudar a completar una demostración o resolver un problema

recta de centros recta (o segmento de recta) que une los centros de dos círculos

recta tangente de un círculo recta (o parte de una recta) que toca un círculo sólo en un punto

rectángulo paralelogramo que contiene un ángulo recto

rectas concurrentes tres o más rectas que contienen el mismo punto

rectas paralelas (planos) dos rectas en un plano (o dos planos) que no se intersecan

rectas perpendiculares dos rectas que se intersecan para formar ángulos adyacentes congruentes

regla instrumento idealizado utilizado para trazar partes de rectas

relación proporcional comparación entre dos cantidades a y b, en general escrita $\frac{a}{b}$ o $a{:}b$

relación proporcional razón que compara tres o más números, como $a{:}b{:}c$

rombo paralelogramo con dos lados adyacentes congruentes

secante en un triángulo rectángulo la relación proporcional $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$

secante de un círculo recta (o parte de una recta) que interseca un círculo en dos puntos

sector de un círculo región del plano delimitada por dos radios del círculo y el arco que interseca el ángulo central formado por esos radios

segmento de recta parte de una recta determinada por dos puntos y todos los puntos en la recta que se encuentran entre estos dos puntos

segmento de un círculo región plana delimitada por una cuerda y un arco menor (arco mayor) que tiene los mismos puntos extremos que esa cuerda

semicírculo arco de un círculo determinado por un diámetro; arco de círculo cuya medida es exactamente 180°

seno en un triángulo rectángulo, la relación proporcional $\overline{AB}$

simetría respecto a un punto (P) figura para la cual cada punto A tiene un segundo punto C en la figura para la cual P es el punto medio de $\overline{AC}$

simetría respecto a una recta (ℓ) figura para la que cada punto A tiene un segundo punto B en la figura para la cual ℓ es el bisector perpendicular de $\overline{AB}$

tangente en un triángulo rectángulo la razón $\frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$

tangente común recta (o segmento) que es tangente a más de un círculo; puede ser una tangente común o una tangente interna común

teorema enunciado que se deduce por lógica de definiciones y principios anteriores; enunciado que se puede demostrar

tetraedro (regular) sólido de cuatro caras en el cual las caras son triángulos equiláteros congruentes

toroide sólido tridimensional que tiene forma de “dona”

transversal recta que interseca dos o más rectas, intersecando cada una en un punto

trapecio cuadrilátero que tiene exactamente dos lados paralelos

trapezoide isósceles trapezoide que tiene dos lados congruentes (sus lados no paralelos)

triángulo polígono que tiene exactamente tres lados

triángulo agudo triángulo cuyos tres ángulos interiores son agudos

triángulo escaleno triángulo en el cual dos lados no son congruentes

triángulo isósceles triángulo que tiene dos lados congruentes

triángulo obtuso triángulo que tiene exactamente un ángulo interior que es obtuso

triángulo rectángulo triángulo en el cual exactamente un ángulo interior es un ángulo recto

unión incorporación de dos conjuntos cualesquiera como figuras geométricas

vértice de un ángulo punto en el cual convergen los dos lados del ángulo

vértice de un poliedro cualquier punto en el que tres bordes del poliedro convergen

vértice de un polígono cualquier punto en el que dos lados del polígono convergen

vértice de un triángulo isósceles punto en el cual convergen los dos lados congruentes del triángulo

volumen medida en unidades cúbicas de la cantidad de espacio dentro de una región acotada de espacio

Índice analítico

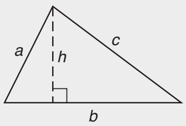
R

Fórmulas

FIGURAS PLANAS:

P = Perímetro; C = Circunferencia; A = Área

Triángulo:



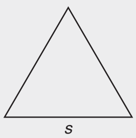
$P = a + b + c$

$A = \frac{1}{2}bh$

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

donde s = semiperímetro

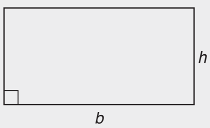
Triángulo equilátero:



$P = 3s$

$A = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$

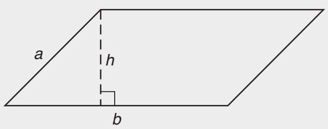
Rectángulo:



$P = 2b + 2h$

$A = bh$ o $A = \ell w$

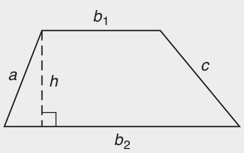
Paralelogramo:



$P = 2a + 2b$

$A = bh$

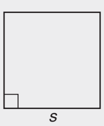
Trapezoide:



$P = a + b_1 + c + b_2$

$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

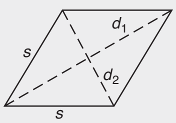
Cuadrado:



$P = 4s$

$A = s^2$

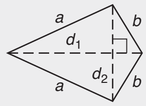
Rombo:



$P = 4s$

$A = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$

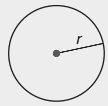
Cometa:



$P = 2a + 2b$

$A = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$

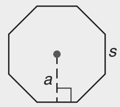
Círculo:



$C = 2\pi r$ o $C = \pi d$

$A = \pi r^2$

Polígono regular (*n* lados):

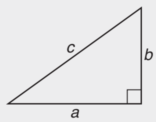


$P = n \cdot s$

$A = \frac{1}{2}aP$

FÓRMULAS DIVERSAS:

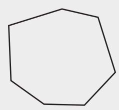
Triángulo rectángulo:



$c^2 = a^2 + b^2$

$A = \frac{1}{2}ab$

Polígonos (*n* lados):

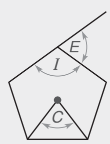


Suma (ángulos internos) = $(n - 2) \cdot 180°$

Suma (ángulos externos) = $360°$

Número (de diagonales) = $\frac{n(n-3)}{2}$

Polígono regular (*n* lados): I = medida del ángulo interno, E = medida del ángulo externo, y C = medida del ángulo central

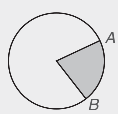


$I = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$

$E = \frac{360°}{n}$

$C = \frac{360°}{n}$

Sector:



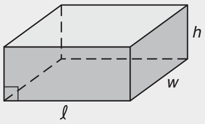
$\ell\widehat{AB} = \frac{m\widehat{AB}}{360°} \times 2\pi r$

$A = \frac{m\widehat{AB}}{360°} \times \pi r^2$

SÓLIDOS (FIGURAS ESPACIALES):

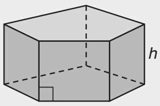
L = Área lateral; T (o S) = Área (Superficie) total; V = Volumen

Paralelepípedo (caja):



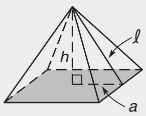
$T = 2\ell w + 2\ell h + 2wh$
$V = \ell wh$

Prisma recto:



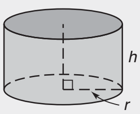
$L = hP$
$T = L + 2B$
$V = Bh$

Pirámide regular:



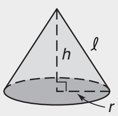
$L = \frac{1}{2}\ell P$
$\ell^2 = a^2 + h^2$
$T = L + B$
$V = \frac{1}{3}Bh$

Cilindro circular recto:



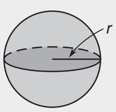
$L = 2\pi rh$
$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$
$V = \pi r^2 h$

Cono circular recto:



$L = \pi r\ell$
$\ell^2 = r^2 + h^2$
$T = \pi r\ell + \pi r^2$
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Esfera:

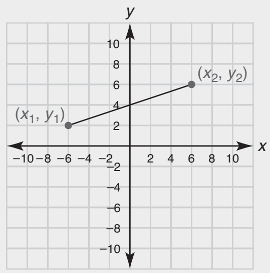


$S = 4\pi r^2$
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Diversos:

Ecuación de Euler: $V + F = E + 2$

GEOMETRÍA ANALÍTICA:



Distancia:
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Punto medio:
$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$

Rectas paralelas:
$\ell_1 \parallel \ell_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$

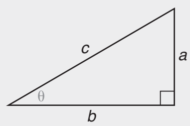
Rectas perpendiculares:
$\ell_1 \perp \ell_2 \leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

Ecuaciones de una recta:

Pendiente-Intersección: $y = mx + b$
Punto-Pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$
General: $Ax + By = C$

TRIGONOMETRÍA

Triángulo rectángulo:



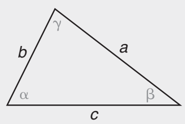
$\operatorname{sen}\theta = \frac{\textit{opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$

$\cos\theta = \frac{\textit{adyacente}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$

$\tan\theta = \frac{\textit{opuesto}}{\textit{adyacente}} = \frac{a}{b}$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Triángulo:



$A = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen}\alpha$

$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

o

$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Abreviaturas

AA	ángulo-ángulo (demuestra que los son semejantes)
AAL	ángulo-ángulo-lado (demuestra que los son congruentes)
ACTSC	Los ángulos correspondientes de triángulos semejantes son congruentes.
ady.	adyacente
ALA	ángulo-lado-ángulo (demuestra que los son congruentes)
alt.	altura
cm	centímetros
cm^2	centímetros cuadrados
cm^3	centímetros cúbicos
comp.	complementario
corr.	correspondientes
cos	coseno
cot	cotangente
csc	cosecante
diag.	diagonal
gal	galón
HC	hipotenusa-cateto (demuestra que los $\triangle$s son congruentes)
hr	hora
km	kilómetro
LAL	lado-ángulo-lado (demuestra que los $\triangle$s son congruentes)
LAL$\sim$	lado-ángulo-lado (demuestra que los $\triangle$s son semejantes)
LCTSP	Los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales
LLL	lado-lado-lado (demuestra que los $\triangle$s son congruentes)
LLL$\sim$	lado-lado-lado (demuestra que los $\triangle$s son semejantes)
m	metros
mi	millas
mm	milímetros
n-gon	polígono de *n* lados
op.	opuesto
pto.	punto
PCTCC	Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.
sec	secante
sec.	sección
sen	seno
sup.	suplementario
tan	tangente
trans.	transversal
trap.	trapezoide
vert.	vertical (ángulo o recta)
yd	yardas

Símbolos

$\ldots$	y así sucesivamente
$\angle$, $\angle$s	ángulo, ángulos
$\overset{\frown}{AB}$	arco AB
$\odot$, $\odot$s	círculo, círculos
$\cong$	congruente a
$\ncong$	no congruente a
$^\circ$	grado
$=$	igual a
$\neq$	no igual a
$\approx$	aproximadamente igual a
$\varnothing$	conjunto vacío
$>$	mayor que
$\geq$	mayor que o igual a
$\cap$	intersección
$<$	menor que
$\leq$	menor que o igual a
AB	longitud del segmento de recta AB
$\ell\overset{\frown}{AB}$	longitud del arco AB
$\overleftrightarrow{AB}$	recta AB
$\overline{AB}$	segmento de recta AB
$m\angle ABC$	medida del ángulo ABC
$m\overset{\frown}{AB}$	medida del arco AB
$\parallel$	paralela a
$\nparallel$	no paralela a
$\square$	paralelogramo
$\perp$	perpendicular
(x, y)	punto en el plano xy
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	proporción
$a{:}b$ o $\frac{a}{b}$	relación proporcional
$\overrightarrow{AB}$	rayo AB
$\subseteq$	subconjunto de
$\therefore$	por lo tanto
$\triangle$	triángulo
$\cup$	unión

Variables comunes

a	apotema (longitud)
a, b, c	longitudes de los lados de un triángulo
A	área de una figura plana
α	alfa (nombre de un ángulo)
b	base de una figura plana (longitud)
b	intersección y de una recta
B	área de la base de un sólido
β	beta (nombre de un ángulo)
C	circunferencia de un círculo
d	diámetro (longitud), diagonal
D	número de diagonales
e	arista de un cubo (longitud)
E	medida de un ángulo externo
γ	gama (nombre de un ángulo)
h	altura (longitud de una altura)
I	medida de un ángulo interno
ℓ	altura inclinada (longitud)
l	longitud de un rectángulo
L	área lateral
m	pendiente de una recta
M	punto medio de un segmento de recta
n	número de lados (de un polígono)
O	origen de un sistema coordenado rectangular
P	perímetro de una figura plana
π	pi
r	radio (longitud)
s	lado de un polígono regular
S	área superficial
T	área total
θ	teta (nombre de un ángulo)
V	volumen
w	ancho de un rectángulo

Notas

Notas

Notas

Notas

Con base en el éxito de las ediciones anteriores,

la quinta edición de ***Geometría*** contiene los principios importantes y aplicaciones del mundo real de la geometría plana con un enfoque inductivo que incluye actividades integradas y herramientas para promover la aplicación y el descubrimiento interactivos.

Características sobresalientes

- Recordatorios al margen que sirven como un mecanismo conveniente para recordar ciertos puntos importantes.
- Actividades llamadas *Descubra* que enfatizan la inducción en el desarrollo de la geometría.
- Recuadros *Perspectiva histórica* que proporcionan un vistazo de la historia de la geometría.
- Repasos y exámenes de capítulos que contienen numerosos problemas de práctica y exámenes para cada capítulo.
- Conjuntos de ejercicios en la *Student Solutions Guide*, con referencias al libro, que ofrecen más práctica y repasos adicionales.

¡Nuevo en esta edición!

- Se han agregado aproximadamente 150 ejercicios nuevos.
- Se incorporó un capítulo 7 nuevo para aislar los temas basados en el lugar geométrico y la concurrencia.
- Una nueva presentación pedagógica titulada *Estrategia para una demostración* proporciona ideas sobre la construcción de demostraciones.

RECURSOS ADICIONALES

Student Solutions Guide with Solutions Manual
ISBN: 978-1-439-04793-4
Esta guía contiene las soluciones de problemas con número impar del libro, así como nuevos conjuntos de ejercicios interactivos para un repaso adicional.

Text Specific DVD
ISBN: 978-1-439-04795-8
Presentados por Dana Mosely, estos DVD cubren temas clave del libro, ofreciendo una alternativa valiosa para el repaso y estudio independientes.

CENGAGE Learning®

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607481889-5
ISBN-10: 607481889-4

9 786074 818895